19
Dynamika umysłu w perspektywie gödlowskiej

Wprowadzenie. Pojawiała się nieraz w dziejach myśl, że dla każdego dobrze postawionego problemu da się znaleźć wiodący do jego rozwiązania algorytm. Znajdujemy ją u Leibniza, Hilberta, neopozytywistów, a w wydaniu najnowszym – u entuzjastów tzw. silnej teorii sztucznej inteligencji. Algorytm (przypomnijmy po raz któryś) jest to taka metoda rozwiązywania określonego rodzaju problemów, która prowadzi do wyniku w sposób niezawodny, odwołując się jedynie do cech obserwowalnych zmysłowo i kierując się regułami, które określają postępowanie jako serię oddzielnych kroków z dokładnością do kroków możliwie najmniejszych. W takim postępowaniu nie ma miejsca na wnikanie w sens problemu, na intuicję czy pomysłowość; toteż np. Leibniz wierzył (przynajmniej w chwilach reformatorskiego zapału), że gdy już się zalgorytmizuje całą wiedzę, to nawet najgłupsi będą sobie radzić z najtrudniejszymi kwestiami.

Czy przyjąć to stanowisko? Jest to pytanie żywotne dla humanistów, bo jeśliby odpowiedzieć na nie w sposób twierdzący, to humanistyka znikłaby z mapy naszej wiedzy, a zastąpiłaby ją robotyka. A że do humanistów przede wszystkim adresowany jest obecny esej, to nim dojdziemy do ujęcia umysłu w perspektywie gödlowskiej, co stanowi współczesną ofertę dla humanistyki, pomocne będzie pewne wspomnienie ze złotego wieku humanistów, jakim był okres Oświecenia.

Istotę humanistyki ujął luminarz tamtej epoki Alexander Pope w powiedzeniu *The proper study of mankind is Man* (poemat filozoficzny „On the Nature and State of Man", list II, odc. 1). Ludzkość jako podmiot cywilizacji i Człowiek jako podmiot rozumności – oto tematy badań humanistycznych. Wszechstronnym do tej myśli komentarzem są dociekania nad całokształtem dziejów ludzkości, czyli nad postępem cywilizacji, które zawdzięczamy myślicielom Oświecenia szkockiego, jak Francis Hutcheson, Lord Kames, David Hume, Adam Smith. Ich kluczem do scenariusza dziejów jest wgląd w rozumność Człowieka jako twórcy cywilizacji: jest to próba zrozumienia dzieła poprzez poznanie natury twórcy. Ów projekt badawczy sprzed trzech prawie wieków zasługuje na kontynuację w naszych czasach. Jego ciąg dalszy dokonuje się na gruncie tej wiedzy o ludzkim umyśle, która dziś owocuje światopoglądem informatycznym. Wtedy w nowym świetle jawi się ludzkość i człowiek jako obiekt dociekań humanistycznych.

§1. Humanistyka a robotyka

1.1. Od czasów Arystotelesa kursuje kilka definicji człowieka, które mają w swej treści jeden element wspólny: wszystkie zaczynają się od słowa „zwierzę". Mamy więc zwierzę rozumne, społeczne, zdolne do śmiechu (była i taka definicja – animal risibile). Nic dziwnego, że świat zwierząt był w refleksji nad człowiekiem jedynym porównawczym punktem odniesienia, skoro innego punktu nie było. Dziś mamy inny, głębiej wnikający w istotę rzeczy. Żeby go uchwycić, skupmy się na drugim członie klasycznej definicji człowieka, na rozumności. Czym ona jest?

Jeśli powiemy, że jest to w gruncie rzeczy to samo, co *inteligencja*, czyli zdolność do rozwiązywania problemów, będzie to krok w dobrym kierunku, ale nie można na nim poprzestać, byłaby to bowiem definicja zbyt szeroka. Rozwiązywanie problemów jest właściwe całemu światu organicznemu, a na pewno królestwu zwierząt; już bakterie mają swoje problemy i nieźle sobie z nimi radzą (przechytrzając np. ludzi w unieszkodliwianiu antybiotyków).

Ludzie mają możność rozwiązywania problemów na co najmniej dwa sposoby, jeden podzielany z resztą zwierząt, a drugi – przy pomocy języka. W tym drugim udział języka jest stopniowalny, a gdy występuje w stopniu maksymalnym, mamy do czynienia z postępowaniem algorytmicznym. Polega ono na tym, że aby rozwiązać problem, nie trzeba mieć ani jakiejś wiedzy instynktownej, ani wiedzy dyskursywnej o prawach rządzących daną dziedziną rzeczywistości; wystarczy mechanicznie wykonywać słowne instrukcje, których sekwencja stanowi algorytm. Weźmy najprostszy przykład: instrukcję słodzenia herbaty wykonywaną przez dziecko pouczone przez dorosłych. Dorosły wie, że cukier jest potrzebny organizmowi i poprawia smak i że wystarczy w tym celu jedna lub dwie łyżeczki do szklanki; dzięki tej wiedzy rozwiązuje on problem „czy słodzić i jak". Na tej podstawie formułuje słowny przepis, który przekazuje dziecku, a wtedy problem „czy i jak" rozwiązuje ono skutecznie bez posiadania owej wiedzy, a jedynie przez dokładne wykonanie instrukcji. W takim postępowaniu algorytmicznym dziecko wykazuje podobieństwo nie z jakimkolwiek zwierzęciem (instrukcji słodzenia nie zrozumie bakteria, ani nawet szympans), lecz z odpowiednio zaprogramowanym robotem.

Odkrywamy więc nową możliwość zdefiniowania człowieka, o której nie śniło się starożytnym ani ich następcom, aż po wiek XX. Klasyczna metoda definiowania polegała na przyjęciu zbioru zwierząt za rodzaj nadrzędny, w którym wyróżnia się gatunek ludzki jako podzbiór, za różnicę gatunkową biorąc cechę rozumności. Teraz bierzemy jako rodzaj nadrzędny klasę układów zdolnych do rozwiązywania problemów, której podzbiorami są: (A) zwierzęta nie będące ludźmi, (B) roboty, (C) ludzie. Klasa C podziela z klasą A umiejętność rozwiązywania problemów w sposób instynktowny, a z klasą B – w sposób algorytmiczny.

Rozważmy sumę klas B+C. Co w tym zbiorze zsumowanym odróżnia ludzi od pozostałych jego elementów? To samo, co odróżnia dorosłego od dziecka z powyższego przykładu; albo początkującego kuchcika od wytrawnego kucharza, który sam tworzy receptury potraw i przekazuje kuchcikowi do wiernego wykonania według instrukcji. Jest to zdolność tworzenia algorytmów na podstawie posiadanej wiedzy. Towarzyszy jej właściwość nie mniej dla twórczego myślenia istotna – specyficznie ludzka zdolność do stawiania pytań i doświadczania wątpliwości, ale w obecnym punkcie rozważań poprzestaniemy na pierwszej.

1.2. Zdolność do konstruowania algorytmów wymaga dwóch dyspozycji, które Alan Turing (1939) uważał za niezbędne w rozumowaniu matematycznym człowieka. Są nimi intuicja oraz pomysłowość czyli inwencja. Tę obserwację Turinga możemy bez zastrzeżeń uogólnić na wszelkie rozumowania, mając na uwadze tworzenie algorytmów jako jedną z odmian w zbiorze rozumowań. Tak dochodzimy do nowoczesnej definicji człowieka, właściwej epoce informatycznej. *Człowiek jest to istota zdolna do rozwiązywania (A) jednych problemów na drodze instynktownej, (B) innych na drodze algorytmicznej, (C) jeszcze innych na drodze rozumowań wymagających intuicji i pomysłowości*, m.in. rozumowań, których produktami są algorytmy.

Intuicja jest ważnym źródłem wiedzy dla tworzenia algorytmów. Np. intuicja nieskończonego zbioru liczb naturalnych, z zerem i relacją następnika, stanowi tę porcję wiedzy o świecie liczb, dzięki której jakiś pomysłowy Hindus w głębokim średniowieczu stworzył algorytm pozycyjnego zapisu dowolnej liczby naturalnej. Nazwiska tego geniusza nie znamy, wiemy natomiast, że notację tę dopracował i upowszechnił uczony arabski Al-Chwarizmi, którego przekręcone przez łaciników imię dało początek słowu „algorytm".

W powyższym określeniu nie występuje słowo „zwierzę", obecne od tysiącleci w filozoficznej definicji człowieka, mamy więc w tym jakby świtanie nowej humanistyki. W tym świetle, do istoty człowieka nie należy to, żeby miał wątrobę i trzustkę. Wprawdzie w obecnym stanie rzeczy bez tych i innych narządów nie działałby mózg Al-Chwarizmiego ani żadnego innego człowieka, ale jeśli przyroda lub ludzka technika wytworzy kiedyś istotę bez takich atrybutów cielesności, lecz mającą dar intuicji i pomysłowości, a więc zdolną również do pytań i wątpliwości, bez wahania jej przyznamy atrybut człowieczeństwa. Natomiast miano robotów zachowamy dla urządzeń zdolnych rozwiązywać problemy tylko dzięki algorytmom. Mogą to być algorytmy gotowe, od początku wbudowane przez programistę, a mogą być takie które sprawiają, że układ jest zdolny uczyć się (w wyniku interakcji z otoczeniem) rozwiązywania problemów, ale tak czy inaczej nie są one ekwiwalentem intuicji i pomysłowości. Gdyby jednak ten drugi proces doprowadził jakimś sposobem do wykształcenia się jednej i drugiej w jestestwach nie organicznych, to nie odmówimy im awansu z klasy robotów do klasy istot rozumnych.

§2. Dynamika dodatnich sprzężeń zwrotnych między umysłem i językiem

2.1. Algorytmy jako instrukcje rozwiązywania problemów powstają dzięki ludzkiej intuicji i pomysłowości. Z drugiej strony, te cnoty umysłu nie wydawałyby owoców, gdyby nie miały do dyspozycji algorytmów jako swych niezastąpionych narzędzi. Niezliczone problemy leżałyby odłogiem nie rozwiązane, gdyby nie to całe instrumentarium rachowania oparte na algorytmie pozycyjnego zapisu liczb i algorytmach podstawowych działań arytmetycznych. Droga od intuicji do ugruntowanego twierdzenia prowadzi przez obliczenia sterowane algorytmami. Mógł Pierre Fermat mieć silną intuicję prawdziwości swego twierdzenia i pomysł dowodu. Ale dopóki Andrew Wiles w roku 1995 (w trzysta przeszło lat po Fermacie) nie opublikował swych składających się na dowód 130 stron obliczeń, nie mogliśmy na tym twierdzeniu polegać jako na wiarogodnym wglądzie w świat liczb.

Liczba 130 stron to wskaźnik niezwykłej długości dowodu, a ta z kolei jest miarą stopnia złożoności, a więc i stopnia trudności, tego problemu, na który konkluzja dowodu jest odpowiedzią. Kwestia złożoności dowodu matematycznego, podobnie jak kwestia złożoności oprogramowania dla komputera, dostarcza nam niejako laboratorium do badania stosunku między intuicją i algorytmem. Wiedząc o zmaganiach Andrew Wilesa z tą gigantyczną trudnością (dziesięć lat wyłącznie temu poświęconych), której przez 300 lat nie zdołali pokonać atakujący ten problem wybitni matematycy, możemy sobie przedstawić, jak wielkiej wymagało to intuicji i pomysłowości. Wiemy też, jak trudne było dla recenzentów sprawdzenie poprawności dowodu, a gdy po paru miesiącach od ogłoszenia (1993) pierwszej wersji wykryli oni błąd, kolejne miesiące zajęła autorowi praca nad jego poprawieniem. O czym to świadczy? O tym, że intuicja nawet znakomitych umysłów bywa zawodna, dobrze by więc było, żeby przyszła jej z pomocą jakaś procedura algorytmiczna. Z tego jednak, co wiemy o komputerowym sprawdzaniu poprawności dowodów, to tekst dowodu tak opracowany, żeby mógł go interpretować program testujący, bywa dziesiątki razy dłuższy (mierząc liczbą wierszy) niż tekst dowodu intuicyjnego, co w przypadku wywodów Wilesa oznaczałoby tysiące stron do prześledzenia. A to mogłoby stanowić nieprzekraczalną barierę dla ludzkiej pamięci (typu pamięci operacyjnej, jeśli użyć porównania do komputera). Nie ma więc w badaniach naukowych odwrotu od posługiwania się intuicją, i nie stanie się tak, jak eksperymentował myślowo Leibniz, że dla każdego problemu znajdzie się kiedyś algorytm, który pozwoli nawet umysłom tępym znaleźć nań odpowiedź w sposób mechaniczny, bez myślowego wysiłku.

Z drugiej strony, nawet gdy nic nie wiemy o treści dowodu Wilesa, możemy być pewni, że do zapisu liczb posługiwał się on algorytmem zapisu pozycyjnego, a do obliczania potęg (których dotyczy twierdzenie Fermata) stosował algorytm potęgowania, nie usiłując przedstawiać sobie w myśli, ile to będzie gdy jakieś x pomnożyć przez siebie n razy. Gdyby z takich środków algorytmicznych nie korzystał, rozbiłby się o barierę praktycznej niewykonalności. Znajdujemy przeto w tej historii wymowny przykład współdziałania intuicji i pomysłowości z algorytmem; jest to interakcja wzmacniająca obie strony.

Na potrzeby dalszych rozważań uogólnijmy ten przypadek na dwa sposoby. Zachodząca w nim interakcja algorytmu z intuicją i pomysłowością to szczególny przypadek sprzężenia zwrotnego między umysłem (intuicja i pomysłowość) z tekstem językowym, jakim jest algorytm, czyli (ogólniej) z językiem. *Sprzężenie zwrotne* jest to wzajemne oddziaływanie między dwoma czynnikami cechujące się takim rytmem, że jeśli czynnik X wywoła pewną zmianę w czynniku Y, to wtedy Y wpływa analogicznie na X, potem znów X na Y itd. Zmiana polega na wzmocnieniu lub na osłabieniu intensywności procesu. Osłabianie zachodzi m.in. w zjawiskach regulacji, gdy wbudowany w tym celu mechanizm zapobiega przekroczeniu jakiegoś niebezpiecznego progu intensywności, np. ciśnienia w maszynie parowej (taką kontrolę sprawuje regulator Watta). Zjawisko to określamy jako *sprzężenie zwrotne ujemne*. Natomiast *sprzężenie zwrotne dodatnie* zachodzi wtedy, gdy każdy z dwóch procesów oddziałuje na drugi wzmacniająco. Może to być np. zwarcie między mikrofonem i źródłem dźwięku czy eskalacja ostrości sporu, w miarę, jak każda ze stron po retorsjach drugiej czuje się coraz bardziej poszkodowana. Prócz takich sytuacji, raczej negatywnych, istnieją w życiu społecznym sytuacje rozwijania się różnych wartości dzięki ich wspieraniu się wzajemnemu na zasadzie sprzężenia. I tak, proces rozwoju gospodarki sprzyja wzrostowi stabilizacji politycznej i wolności, oba zaś te stany przyczyniają się, zwrotnie, do rozwoju gospodarki. Rosnący poziom edukacji także sprzyja wzrostowi gospodarczemu, a ten się odwzajemnia wzrostem nakładów na edukację. Podobnie pozytywne wzmocnienia zachodzą między edukacją i badaniami naukowymi, itd.

Niebywały rozwój nauk w naszej cywilizacji tłumaczy się potężnym sprzężeniem dodatnim, które zachodzi między twórczym umysłem i algorytmem; jak koło zamachowe napędza ono postęp nauki, wprawiając go w coraz szybsze obroty. Ten szczególny związek trzeba ujmować w kontekście prawidłowości ogólniejszej, mianowicie sprzężenia między myślą i mową. Pojawia się ta prawidłowość nie tylko na wyżynach poznania naukowego. Doświadczamy jej w codziennym życiu, kiedy myśl wyprzedza mowę. Tak było, gdy jakiś nasz praprzodek po raz pierwszy ujrzał ogień, a z ust wydarł mu się okrzyk podziwu czy strachu (czy może jednego z drugim). Ten dźwięk, jeśli się powtórzył, jeśli powtórzyli go też ileś razy inni, stał się w danej grupie nazwą ognia. Mamy tu model sytuacji świadczący o pierwszeństwie myśli przed mową, bo zauważenie czegoś, wyodrębnienie tego uwagą z otoczenia oraz wzięcie za reprezentację pewnej szerszej klasy zjawisk, to są pierwociny myśli abstrakcyjnej. A gdy już nazwa ognia się utrwaliła, zaczęła oddawać przysługi myśleniu, jak ogień pozyskać, jak ugasić, do czego użyć itd.

Sformułujmy to ogólnie: gdy się uda myśl wysłowić, wspomaga to myśl, żeby stała się pełniejsza i jaśniejsza; gdy damy wyraz słowny tej nowej, to kolejne takie wysłowienie służy dojściu do myśli bardziej pogłębionej, która rzecz ujmie jeszcze trafniej. To są te zmagania naszej myśli i mowy, które Norwid ujął frazą *odpowiednie dać rzeczy słowo* (choć może nie każdy zmagań takich doświadcza, oszczędzone one są pewnie grafomanom). Jest to więc taka sekwencja: najpierw myśl bez słów, potem jej wysłowienie, które pomaga narodzić się myśli postrzegającej wysłowienia tego niedoskonałość. Dzięki temu nasuwa się werbalizacja bardziej trafna, i tak aż do punktu, w którym uznamy, że „to jest to", czyli że słowo przylega do myśli jak dobrze skrojona szata, a myśl ujmuje sedno rzeczy. Na swój sposób doświadczają takiego stanu prawdziwi poeci, a na swój sposób matematycy.

2.2. Matematycy są w tej dobrej sytuacji, że współczesna logika dostarcza jasnego i w pełni sprawdzalnego kryterium, czy werbalizacja jest już doskonała. Trzeba w tym celu teorię zaksjomatyzować i przyjąć odpowiednie reguły wnioskowania, a następnie wykazać, że każde prawdziwe zdanie danej teorii da się wywnioskować z jej aksjomatów, a żadne fałszywe wywnioskować się nie da. Mówiąc bardziej technicznie, trzeba udowodnić o danej teorii, że jest *zupełna* oraz *niesprzeczna*. Będzie to świadczyć niezbicie, że aksjomaty bez reszty opisują tę dziedzinę rzeczywistości, do której opisu zostały powołane. Jeśliby natomiast było tak, że jakieś zdanie wyrażone w języku danej teorii jest prawdziwe, a wywnioskować z aksjomatów się nie da, to powiemy o danej teorii, że jest niezupełna. To zaś znaczy, że aksjomatom nie udaje się wyrazić tego, do czego nasza myśl bez nich dociera, gdy uda się jej rozpoznać jakieś zdanie prawdziwe, a nie dające się wywieść z aksjomatów.

Dowodzenie, o którym tu mowa jest zdefiniowane rygorystyczne. Mają to być reguły tak precyzyjne, jak te stosowane w algorytmach, a więc dyktujące krok po kroku, jak przekształcać aksjomaty w ich konsekwencje, a te w kolejne konsekwencje, aż dojdzie się do konsekwencji będącej tym zdaniem, którego prawdziwości chcemy dowieść. Przy tym, owe służące wnioskowaniu reguły przekształcania formuł dotyczą ich postrzegalnych zmysłowo cech fizycznych, mianowicie kształtu i położenia, a nie ich treści (por. to z definicją algorytmu na początku eseju). Tego rodzaju dowód nazywa się *formalnym*, a ze względu na wyżej opisany charakter reguł dowodzenia można go też określić jako algorytmiczny.

Gdy z końcem XIX wieku pojawiła się, jako nowa dziedzina wiedzy, logika matematyczna, służąca do analizy i oceny rozumowań w matematyce, ufano, że dostarczy ona środków, żeby w sposób zupełny móc zaksjomatyzować dowolną teorię matematyczną; to znaczy tak dobrać jej aksjomaty, żeby dały się z nich wyprowadzić w drodze dowodu wszystkie zdania w danej teorii prawdziwe i tylko prawdziwe. Było to, mówiąc swobodnie, równoznaczne z przekonaniem, że w matematyce jej precyzyjny język symboliczny ma moc ekspresji zdolną wyrazić adekwatnie wszystkie nasze zrozumienia dotyczące matematycznej rzeczywistości. Okazało się jednak, że te oczekiwania spełniają się tylko w odniesieniu do bardzo prostych teorii, jak niektóre teorie algebraiczne, ale już gdy wejdziemy w świat liczb naturalnych, język przestaje nadążać za myślą. Pojawiają się zdania, których prawdziwość myśl nasza rozpoznaje, ale dowodu formalnego, czyli bez reszty zamkniętego w symbolach, dostarczyć się nie da.

Nie musi to jednak oznaczać zastygnięcia teorii formalnej w takim kształcie. Będąc niezupełna, jest ona jednak *uzupełnialna* do wyższego poziomu, na którym pozbędzie się poprzedniego braku, a choć swoiste braki pojawią się na tym nowym etapie, da się ona uzupełnić do kolejnego poziomu, i tak dalej. Wchodzi bowiem do gry taka sama dynamika interakcji myśli i języka, jak ta opisana wyżej w odniesieniu do werbalizacji w języku naturalnym. I podobnie jak w wersji „naturalnej", wyższy poziom werbalizacji, która jest w tym przypadku formalizacją, umożliwia rodzenie się nowych myśli, które nie miałyby szans zaistnienia, gdyby nie dostąpiły wsparcia ze strony precyzyjnego języka formalnego.

O istnieniu takiej uzupełnialnej stopniowo niezupełności dowiedziano się po raz pierwszy w roku 1931, gdy Kurt Gödel odkrył, że jest to właściwość arytmetyki liczb naturalnych.[1] Wykazał on, że żadna aksjomatyka nie wystarczy, żeby na jej podstawie udowodnić formalnie (algorytmicznie) wszystkie prawdziwe zdania arytmetyki. Możemy natomiast uzyskiwać coraz większy zbiór prawd dowiedzionych, w miarę jak wzbogacamy aksjomatykę o nowe formuły, bądź też wzmacniamy logiczne reguły dowodzenia algorytmicznego. Podsumujmy: *na każdym ze szczebli rozwijania aksjomatycznej arytmetyki liczb naturalnych są w niej prawdy niedowodliwe formalnie, ale zarazem z każdego szczebla można wspiąć się na wyższy, to jest taki, na którym niektóre prawdy dotąd niedowodliwe dadzą się dowieść.*[2]

Takie pozyskiwanie za pomocą dowodów formalnych coraz większego zbioru prawd jest procesem bez granic, potencjalnie nieskończonym.

---

1 Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* „Monatshefte für Mathematik und Physik" 38, 1931, ss. 173-198. Istnieją liczne omówienia tego wyniku Gödla i prowadzącego doń rozumowania. Godne uwagi jest sprawozdanie z jego wywodów zawarte w znakomicie napisanej historii logiki: Wiliam Kneale and Martha Kneale, *The Developement of Logic*, Clarendon Press, Oxford 1962, rozdz. XII, odc. 3. Przystępne i wysoce kompetentne omówienie daje pozycja: Ernest Nagel and James R. Newman, *Gödel's Proof*, New York University Press, 1952; polski przekład Barbary Stanosz pt. *Twierdzenie Gödla*, PWN 1966. Gruntowną, godną polecenia, monografią jest Stanisława Krajewskiego *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Wyd. IFiS PAN, 2003.

2 K. Gödel, *Über die Länge von Beweisen.* „Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums" 7, 1936, 23–24.

Mamy więc w perspektywie nieskończony proces postępu nauki. Drugą okolicznością godną uwagi jest powstawanie warunków do pojawienia się dodatnich sprzężeń zwrotnych – na zasadzie prawidłowości opisanej wyżej w §2.1. Po intuicyjnym rozpoznaniu jakiejś prawdy niedowodliwej formalnie, możemy ją dołączyć do aksjomatów (one też zostały przyjęte bez dowodu), wzmacniając tą drogą moc dedukcyjną teorii. Oznacza to przyrost informacji, a im więcej informacji, czyli im większa wiedza, tym większa skala i tempo kolejnego przyrostu. Tę nieograniczoną perspektywę rozprzestrzeniania się umysłu nazywam tu gödlowską, ponieważ Gödel był tym, który jej istnienie pierwszy dowodnie wykazał, czyniąc to na polu tak sprawdzalnym, jakim jest arytmetyka.

Żeby się osobiście o tej perspektywie przekonać, trzeba uzyskać jakiś wgląd w treść i uzasadnienie wyniku Gödla. Skala poziomów tego wtajemniczenia może być bardzo rozległa: od kilku zdań ogólnikowej informacji po specjalistyczne monografie, gdy cały pokaźny tom stanowi wykład i interpretację twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki. Dwa następujące dalej odcinki sprawie tej poświęcone są bliskie raczej dolnego progu zrozumień. Ich celem jest doprowadzić czytelnika, jeśli nie do przekonania o prawdziwości twierdzenia, to przynajmniej do wyobrażenia sobie, na czym taki stan przekonania mógłby polegać. To jest minimum, do którego powinien się czuć zobowiązany współczesny humanista. Żeby odciążyć i możliwie skrócić tok wywodu, nie opisuję tu metody arytmetyzacji języka przez kodowania liczbowe, mogąc odesłać Czytelnika do poprzedniego eseju; tam była o tym mowa z innego jeszcze względu, lecz przede wszystkim ze względu na przygotowanie do obecnego sprawozdania z argumentacji Gödla.

§3. MAG: samopotwierdzalne MetaArytmetyczne zdanie Gödlowskie

3.1. Istnieje osobliwa klasa wypowiedzi, można powiedzieć, egocentrycznych, gdy wypowiedź mówi jedynie coś o sobie samej, a nic na inny temat. Oto przykład: „Niniejsze zdanie składa się z siedmiu wyrazów”. Wypowiedzi tego rodzaju są poprawne gramatycznie, a przy tym spełniają bez zarzutu warunek wymagany od każdego zdania, że ma być prawdziwe lub fałszywe. Powyższe zdanie jest prawdziwe, a jeśliby słowo „siedmiu” zamienić na inny liczebnik, stanie się fałszywe. Nie można mu więc nic zarzucić poza pewnego rodzaju dziwacznością, ale to mu nie odbierze statusu zdania w sensie logicznym.

Mamy w tej klasie zdania jeszcze osobliwsze, do których zastosujemy określenie: zdanie samopotwierdzalne, w skrócie SP. Z treści takiego zdania wynika, że jest ono z konieczności prawdą, czyli samo siebie potwierdza. Do tej kategorii należy wyrażenie będące bohaterem tego eseju, zwane *zdaniem gödlowskim*. Swe kluczowe znaczenie dla dyskutowanego problemu zawdzięcza ono temu, że występuje w dwóch wersjach. Jedna z nich jest samopotwierdzalna w sposób oczywisty i bezpośredni. Druga zaś dzięki temu, że z pierwszą jest równoważna, okazuje się również samopotwierdzalna. Ta druga jest sformułowana w języku arytmetyki, co będzie nam przypominał skrót AG – *Arytmetyczne zdanie Gödlowskie*. Pierwsza jest sformułowana w języku, którym się mówi o arytmetyce, czyli w jej metajęzyku, stąd skrót MAG – *MetaArytmetyczne zdanie Gödlowskie*. W obecnym odcinku zajmiemy się MAG-iem, zaś AG-iem w odcinku następnym.

Żeby zrozumieć istotę zdań samopotwierdzalnych, trzeba mieć na uwadze, że zdanie takie bierze się z zanegowania jakiegoś zdania antynomialnego czyli, krócej, antynomii. Antynomia jest to wypowiedź, z której wynika jej własne zaprzeczenie, co ją nieuchronnie skazuje na fałszywość. A jeśli antynomia jest z konieczności fałszywa, to jej zaprzeczenie musi być prawdziwe na mocy samej swej treści, co znaczy, że jest zdaniem samopotwierdzalnym.

Nim opiszemy ten mechanizm dla zdania gödlowskiego, przyjrzyjmy się mu na przykładzie słynnej antynomii kłamcy, występującej w rozmaitych szatach słownych. Rozważmy ją ubraną w krótkie zdanie, które oznaczymy jako: Ant.1 – **Jestem zawsze omylny.** To znaczy, cokolwiek sądzę, zawsze to jest fałszywe. Skoro zawsze, to Ant.1 jest również fałszywe, a wobec tego prawdziwe jest jego zaprzeczenie, czyli sąd, że nie zawsze jestem omylny. Gdy uznaje za prawdę jakiś sąd (tutaj Ant.1) i zarazem muszę uznać jego konsekwencję stanowiącą jego zaprzeczenie, to popadam w sprzeczność, co mnie w tym przypadku zobowiązuje do odrzucenia sądu Ant.1 czyli uznania, że **nie zawsze jestem omylny**.

To wnioskowanie każe zaliczyć negację zdania Ant.1 do wypowiedzi samopotwierdzalnych. Skoro bowiem jej zaprzeczeniem jest zdanie antynomialne, zobowiązuje to (pod sankcją popadnięcia w sprzeczność) do uznania owej negacji zdania antynomialnego za prawdę na mocy samej jej treści, bez potrzeby konfrontowania z jakimiś faktami; czyli że potwierdzenie dokonuje się samo, niejako automatycznie.

MAG jest zdaniem, które **stwierdza o sobie samym, że w arytmetyce liczb naturalnych nie ma dlań dowodu formalnego**. To znaczy takiego, że reguły dowodzenia twierdzeń na podstawie aksjomatów mają charakter czysto formalny, czyli odnoszą się do fizycznego kształtu ciągów symboli, nie zaś do ich sensu. Tę cechę odwoływania się przez reguły wyłącznie do fizycznej postaci symboli, to znaczy do ich kształtu i usytuowania w przestrzeni, dowód formalny podziela z procedurami algorytmicznymi. Można go jeszcze bardziej przybliżyć do algorytmu, tak dobierając reguły dowodzenia, żeby w przypadku każdej dającej się dowieść formuły dowód doprowadzał do niej w sposób mechaniczny, to znaczy bez potrzeby posługiwania się jakąkolwiek inwencją (podczas gdy dowody twierdzeń matematycznych nie korzystające z takiej procedury wymagają czasem od matematyków nieprzeciętnej inwencji). W obecnym jednak rozważaniu ta druga cecha, mechaniczność dochodzenia do konkluzji, nie jest istotna, jest natomiast istotny ów formalny charakter kroków dowodowych. Będziemy go mieli w domyśle, ilekroć dalej będzie mowa o dowodzie lub dowodliwości; w domyśle będzie także to, że chodzi o dowód wychodzący z aksjomatów arytmetyki liczb naturalnych. Pomijając, dla skrótu, te klauzule rozważamy następującą wypowiedź, w której „dowodliwe" znaczy, że zdanie da się dowieść na podstawie aksjomatów, nie koniecznie natomiast dowód ten ma być aktualnie wykonany.

MAG: *Niniejsze zdanie nie jest dowodliwe.*

Jest to zdanie samopotwierdzalne, a więc z konieczności prawdziwe – *przy założeniu, że są prawdziwe, a więc nie rodzące sprzeczności, aksjomaty arytmetyczne.* Jest to założenie istotne; na nim się opiera następująca argumentacja. Gdyby MAG było zdaniem fałszywym, to byłoby dowodliwe. A jako dowodliwe na podstawie prawdziwych przesłanek, to jest, wynikające z aksjomatów na mocy reguł logiki, byłoby prawdziwe. Tak więc, zaprzeczenie zdania MAG implikuje jego prawdziwość. Gdy jakieś zdanie wynika z własnego zaprzeczenia, trudno o mocniejszy argument na rzecz jego prawdziwości. Certyfikatem dla tego argumentu jest prawo logiki: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$; można by je nazwać prawem samopotwierdzania.

Rozumowanie to ma być punktem wyjścia dla argumentacji, że istnieją w arytmetyce zdania prawdziwe, a nie dające się dowieść formalnie. Tak jednak, jak to zdanie obecnie wygląda, nie ma w nim odniesienia do arytmetyki (poza domyślną klauzulą, że chodzi o dowód na podstawie aksjomatów tej teorii). Wszak niedowodliwe ma być to zdanie w języku arytmetyki, powinno więc mówić coś o liczbach, MAG natomiast jest zdaniem z jej metajęzyka. Potrzebne jest zatem coś w rodzaju przekładu tego zdania metajęzykowego na język arytmetyczny. A mówiąc dokładniej, powinno to być coś więcej niż przekład, bo to zdanie arytmetyczne, podzielając z MAG-iem przypisanie sobie samemu niedowodliwości (w czym jest podobieństwo do przekładu), powinno wyrażać ponadto jakąś prawdę arytmetyczną (czego MAG nie czyni). Zabieg, który tu się wykonuje nazywa się technicznie *odwzorowaniem*, w takim sensie, w jakim mówi się np. o odwzorowaniu pewnej geometrii nieeuklidesowej w geometrii Euklidesa. Odwzorowanie teorii A w teorii B gwarantuje, że każde twierdzenie prawdziwe w A, gdy się je odwzoruje w B, także w B będzie prawdziwe. W obecnym zagadnieniu chodzi o to, żeby odwzorować MAG w arytmetycznym zdaniu gödlowskim, które określamy tu skrótem AG.

§4. AG: samopotwierdzalne Arytmetyczne zdanie Gödlowskie

4.1. Metodą odwzorowania użytą przez Gödla jest pewien system kodowania napisów za pomocą cyfr. W ten sposób zdanie MAG zamieni się w formułę utworzoną z cyfr, a więc należącą do języka arytmetyki. Opis tej metody, nawet poczyniony w wielkim skrócie, musi być dość obszerny, toteż aby nie odciągać uwagi od głównego nurtu argumentacji, odsyłam do opisu, który dałem wcześniej (esej 18, §4 dotyczący arytmetyzacji języka) z myślą o przygotowaniu do obecnych rozważań.

Za sprawą procedury kodowania każde zdanie zapisane w języku logiki predykatów, czy to arytmetyczne, czy meta-arytmetyczne, jest reprezentowane przez liczbę zwaną jego numerem gödlowskim. Trzeba więc zacząć od zapisania zdania MAG w postaci formuły logicznej. Pierwszym przybliżeniem jest następująca formuła, w pewien sposób pochodna od MAG (co sygnalizuje apostrof).

MAG': *Dla zdania g nie istnieje ciąg formuł x – taki, że D(x,g).*

Predykat „*D*" czytamy „jest dowodem". Zwrot „nie istnieje" ma w logice odpowiednik złożony z dwóch symboli, którym są przypisane numery gödlowskie. Zmiennej x również jest przypisany przez nasz klucz kodowy pewien numer, który oznaczymy przez x^*. Mamy też metodę obliczania numeru całego wyrażenia jako liczby zależnej od wyżej podanych. Trzeba jeszcze tylko dysponować symbolem dla zapisania relacji arytmetycznej zachodzącej między $g*$ jako numerem zdania gödlowskiego g oraz $x*$ jako numerem ciągu formuł x. Relacja ta jest arytmetycznym odwzorowaniem stosunku, który nazywamy w metajęzyku dowodzeniem; oznaczmy ją przez D^* (gwiazdki tu i wcześniej oznaczają odwzorowania pojęć metajęzykowych w arytmetycznych). I tak otrzymamy formułę arytmetyczną:

$$\text{AG:}\quad \neg\exists x^* D^*(x^*, g^*).$$

Pominiemy też kwestię, zbyt dla tych rozważań techniczną, obliczenia wartości liczbowej D*. Nie da się natomiast pominąć innej kwestii (choć i tu także zrezygnujemy ze szczegółów technicznych), jest ona bowiem dla naszej argumentacji kluczowa.

4.2. Jest to pytanie, jak oddać słowo „niniejsze", które pełni istotną rolę w MAG, a którego nie ma już w AG'. Problem w tym, że w języku logicznym nie ma środków by oddać tego rodzaju słowa. W teorii języka noszą one miano wyrażeń okazjonalnych; można też rzec sytuacyjnych, mają one bowiem tę osobliwość, że zachowując wciąż to samo brzmienie nieustannie zmieniają sens w zależności od kontekstu sytuacyjnego, czyli okazji użycia związanej z okolicznościami czasu lub miejsca. Słowo „dziś" np. oznacza inny dzień, gdy się je wypowie 1-go, a inny 2-go stycznia.

Podobnie jest ze słowem „niniejsze". Żeby mogło ono coś oznaczać, trzeba stworzyć odpowiedni kontekst sytuacyjny, ale formuły matematyczne to są właśnie takie, które kontekstu takiego nie potrzebują i nawet mieć go nie mogą, dotyczą bowiem obiektów bytujących poza czasem i przestrzenią. A jednak Gödel znalazł wielce pomysłowy sposób na stworzenie odpowiedniego kontekstu, który dostarcza ekwiwalentu dla słowa „niniejsze". Stał się on możliwy tylko dzięki arytmetyzacji metajęzyka, a polega na tym, żeby pisząc formułę AG, oznaczyć ją numerem w taki sposób, żeby był to właśnie numer g^*. Jak to zrobić, jest to nader skomplikowany problem, którego rozwiązanie okazuje sie majstersztykiem techniki obliczeniowej Gödla. Nie będziemy tu próbowali za nią nadążyć. Poprzestaniemy na przyjrzeniu się wynikowi, którego zapisem jest wiersz zaczynający się od numeru formuły, przy czym numer ten jest liczbą g^*, o której dana formuła stwierdza, że nie istnieje liczba $x*$, która byłaby numerem ciągu formuł będącego dowodem formuły numerowanej liczbą $g*$; a to znaczy, że oznaczona tą liczbą formuła g nie ma w arytmetyce dowodu. Oto ów zapis:

$$\text{g*:}\quad \neg\exists x^* D^*(x^*, g^*).$$

Operowanie tym napisem wymaga nieco wyobraźni. Trzeba sobie wyobrazić, że na miejscach gwiazdkowanych liter występują jakieś konkretne liczby (ich zapisy byłyby tak długie, że niewykonalne praktycznie na papierze). Mamy więc do czynienia z twierdzeniem arytmetycznym, które ma nam do powiedzenia dwie rzeczy: jedną, że zachodzi pewien fakt arytmetyczny, drugą, że formuła z numerem g* nie ma dowodu formalnego z aksjomatów arytmetyki. Tu drugie może być kolejnym wyzwaniem dla naszej wyobraźni, gdy już poradziliśmy sobie z wcześniejszym, żeby w gwiazdkowanych symbolach upatrywać liczby. Jak jednak dopatrzeć się w formule numer g* informacji o jej niedowodliwości?

Pomóżmy sobie następującą historią w roli przykładu, nie do końca może realistycznego, ale w granicach fizycznej i społecznej wykonalności. Wyobraźmy sobie, że w pewnej wysoko zinformatyzowanej uczelni frekwencja na zajęciach jest kontrolowana przez następującą procedurę. Każdy przedmiot wykładowy jest oznaczony pewnym numerem, numerowane są także kolejne wykłady z tego przedmiotu (np. 5-2 to drugi wykład z przedmiotu numer pięć). Oczywiście, każdy student ma student ma swój własny numer umieszczony w elektronicznej karcie stanowiącej legitymację. Wchodząc do sali wykładowej student rejestruje obecność przez okazanie swej karty czytnikowi, który na życzenie drukuje listy złożone z samych zapisów cyfrowych, np. na liście pod tytułem 5-2 znajdą się numery kart studentów zarejestrowane w danym dniu, m.in. numer 99. Taki wydruk informuje o pewnych relacjach liczbowych, np. że 99 znajduje się w zbiorze liczb oznaczonym liczbą 5-2. Ale nie tylko. Kto zna *klucz kodowy* zastosowany do *numerycznego odwzorowania* osób (studenci) i zdarzeń (wykłady), temu jeden z napisów na wydruku powie, że Jan Dyląg (student nr 99) nie był obecny na drugim wykładzie z zakresu przemysłowej hodowli pstrągów (przedmiot nr 5). Jeśli pod koniec roku okaże się po przejrzeniu wszystkich list, że nie ma numeru takiej listy, na której widniałaby cyfra „99", będzie to **zarazem** informacja, że nie ma takiego wykładu, który Jan Dyląg zaszczyciłby swą obecnością. Przypomina to po części strukturę formuły z numerem g*, która na takiej samej zasadzie – odwzorowania przez kodowanie numeryczne – informuje, że nie ma takiej liczby, która byłaby numerem ciągu formuł dowodzącego zdania numerowanego liczbą g^*.

W powyższym przykładzie dwie informacje, nazwijmy je, numeryczna i faktograficzna, są równoważne inferencyjnie, to znaczy, każda z nich da się wywnioskować z drugiej. Z tego, że na wszystkich listach brak numeru 99 wynika niezawodnie fakt, że na wszystkich wykładach brak było Dyląga. I odwrotnie, z faktu nieobecności Dyląga wynika informacja o stanie zapisów numerycznych na listach. A zatem, prawdziwość każdej z tych dwu informacji gwarantuje prawdziwość drugiej.

To, że wnioskować o prawdziwości można w obu kierunkach, ma kluczowe znaczenie dla argumentacji o istnieniu w arytmetyce zdań niedowodliwych formalnie. Zdaniem, którego prawdziwość potrafimy rozpoznać intuicyjnie jest wypowiedź metajęzykowa MAG, a dzięki owej równoważności zyskujemy pewność o prawdziwości zdania arytmetycznego na temat liczby g, mającego numer $g*$. A że to zdanie mówi o nieistnieniu liczby, która reprezentowałaby jego formalny dowód, pośrednio stwierdza brak takiego dowodu czyli swą niedowodliwość. Istnieje przeto w arytmetyce liczb naturalnych zdanie prawdziwe, którego nie da się formalnie dowieść z aksjomatów arytmetyki (o ile są niesprzeczne). Podsumowujemy to określeniem, że arytmetyka liczb naturalnych *jest teorią niezupełną.*

§5. Humanistyczna interpretacja niezupełności arytmetyki

5.1. Przysłowiowe stawianie kropki nad „i" jest zabiegiem jak najwłaściwszym, jako że „i" bez kropki nie byłoby sobą. Stawianie dwu kropek byłoby stanowczo przesadą, a jednak dopuszczam się czegoś takiego w tym końcowym odcinku. Powtarzam tu bowiem różne rzeczy wcześniej w tym eseju na różnych miejscach powiedziane. Usprawiedliwia to, jak sądzę, tego rodzaju sytuacja, że pewne rzeczy powiedziane w dwóch pierwszych odcinkach, przed zdaniem sprawy z argumentacji Gödla, mają szansę być głębiej zrozumiane i przyswojone po zaznajomieniu się z owym sprawozdaniem. Trzeba więc stworzyć możliwość zetknięcia się z nimi raz jeszcze. Podobnie, przy drugim widzeniu się z kimś raz już spotkanym, gdy w międzyczasie zapoznaliśmy się z jego życiorysem, patrzymy na jego postać jakby innymi oczami.

I tak, powracając do końcowego zdania poprzedniego odcinka, postawmy pytanie: dobrze to czy źle dla poznawania świata, że arytmetyka jest niezupełna? Znaczna, może przeważająca, część badaczy i autorów pytania takiego nie stawia, uważając za oczywisty pogląd, że to źle; pisuje się nawet w dramatycznym niekiedy tonie, że jest to dotkliwa porażka nauki, bo przecież powołaniem nauki jest dowodzenie twierdzeń, a tu taka bariera dla dowodzenia! Najgłośniejszy lament pochodzi z kręgu tych filozofów, których ulubionym słówkiem, streszczającym ich główną tendencję jest „tylko". Stamtąd słyszymy takie maksymy, jak „człowiek to tylko jeden z gatunków zwierzęcych", „moralność to tylko zbiór uwarunkowanych historycznie konwencji", i tak dalej, a wśród nich jest i ta sentencja: „umysł to tylko mózg, a mózg to tylko maszyna Turinga".

Tylko ta ostatnia maksyma łączy się bezpośrednio z naszym problemem, inne zaś przytoczyłem po to, by wskazać na humanistyczny aspekt sądów z tej kategorii. Wszystkie one dotyczą pytania „czym jest człowiek?", a więc tego, w którym ogniskuje się humanistyka. Jest ów humanistyczny aspekt obecny także w zagadnieniu niezupełności arytmetyki, ściśle powiązanym z ideą uniwersalnej maszyny Turinga.

Związek ten sygnalizuje słowo „formalny", które w tego rodzaju rozważaniach skrupulatnie trzeba dodawać do słowa „dowód". Dowód *formalny* to taki, którego reguły dotyczą jedynie fizycznej *formy* wyrażeń, a więc ich kształtu i położenia, a nie ich sensu, intencji, czy wyrażanej w nich intuicji. Zdanie niedowodliwe w sensie argumentacji Gödla to zdanie nie dające się dowieść formalnie. Tylko takich może dotyczyć cały jego wywód, bo tylko takie poddają się kodowaniu numerycznemu. Jak to podkreślał Turing, kodować numerycznie można tylko fizyczne symbole. A więc elementy tworzące sekwencje dyskretne, czyli nieciągłe, nie da się natomiast kodować w ten sposób myśli, te bowiem się zlewają w nieprzerwany strumień świadomości, gdzie nie da się wydzielać odrębnych elementów, każdy do oznaczenia osobnym numerem.

5.2. Uprzytomnienie kluczowej różnicy między tym, co ciągłe i tym, co dyskretne, matematycznie oddanej w odróżnieniu liczb rzeczywistych od naturalnych, stanowi podstawę dla humanistycznej interpretacji Gödlowskiego odkrycia niezupełności arytmetyki. W tych bowiem kategoriach trzeba nam zdefiniować umysł ludzki dla odróżnienia go od maszyny Turinga. Maszyna rozwiązuje problemy tylko drogą procedur dyskretnych, umysł zaś ma do dyspozycji także ciągłe. Operującą nimi władzę umysłu określamy, wzorem Turinga, mianem *intuicji*. Wiadomość przeto, iż pewnych prawd nie da się dowieść formalnie, a więc procedurą dyskretną, w sposób maszynowy, kładzie tamę możliwościom maszyny, ale nie potencjałowi ludzkiego umysłu z jego talentem myślenia intuicyjnego.

Wszak argumentacja Gödla prowadząca do wniosku o niezupełności arytmetyki, uznana przez świat uczonych za bezbłędną i fundamentalną, nie jest bynajmniej dowodem formalnym. Tym nie mniej bez wahania mówi się w literaturze naukowej o dowodzie twierdzenia Gödla, nie deprecjonując go bynajmniej z powodu charakteru nieformalnego. To jedno powinno wystarczyć, żeby uciszyć lament licznych autorów z powodu gödlowskiego odkrycia jako mającego rzekomo ograniczać aspiracje poznawcze umysłu. Dowiódłszy nieformalnie niemożliwości formalnego dowodu pewnych prawd rozpoznawanych jako prawdy w sposób nieformalny, Gödel wyniósł umysł ludzki na wyżyny, z których może spoglądać z góry na plemię robotów.

To jest jeden aspekt humanistyczny odkrycia Gödla. Dotyczy on natury ludzkiego umysłu i potencjału właściwej mu intuicji jako przewodniczki rozumowań. Jest jeszcze inny, odnoszący się do rytmu i dynamiki rozwoju cywilizacyjnego. Zważmy, jak wielką w nim rolę odegrały algorytmy. Pomyślmy, jaki byłby kształt cywilizacji, gdyby nie wynaleziono pozycyjnej notacji arytmetycznej. A przecież to tylko ona umożliwia dokonywanie niezliczonych i czasem zawrotnie złożonych obliczeń, jakich wymaga nowożytna cywilizacja (notacja rzymska z trudnością, wystarczała na potrzeby cywilizacji antycznej i średniowiecznej, ale to był limit jej możliwości). A jedna z notacji pozycyjnych, mianowicie binarna, jest tym, bez czego nie mogłaby nastać era informatyczna. Notacja pozycyjna to nic innego jak algorytm zapisywania w sposób automatyczny (bez potrzeby wymyślania wciąż nowych oznaczeń i reguł zapisu) dowolnie wielkich liczb. Gdyby jakiś wirus odebrał naszym mózgom zdolność jej rozumienia i posługiwania się nią, cywilizacja wstrzymałaby swój pęd i zaczęła gwałtownie się staczać.

Wszechobecność i niezbędność algorytmów objawia się dziś na każdym kroku posiadaczom i użytkownikom urządzeń elektronicznych. Za każdym uderzeniem w klawiaturę, za każdą funkcją pralki, telefonu, bankomatu czy komputera, kryje się jakiś algorytm. Ta wszech-skuteczność algorytmów jest tym, co sprawia, ze coraz więcej czasu i energii możemy poświęcać na twórcze myślenie, wiedzione naszą intuicją intelektualną. Gdybym ten esej pisał na mojej starej poczciwej maszynie marki Remington (rocznik 1930) zużyłbym niepomiernie więcej czasu oraz znużył m.in. poprawianiem literówek (błędy wymazywało się żyletką). Ileż mniej miałbym wtedy czasu i siły na potrzebną do tych wywodów pracę.

Szczególnie brzemiennym w konsekwencje rysem cywilizacji jest to, że dwa potężne strumienie twórczej intuicji są kierowane na wytwarzanie nowych algorytmów. Jest wytwarzanie bezpośrednie, którym zajmują się programiści, jest też pośrednie, a zarazem bardziej podstawowe, będące domeną matematyków. Każda nowa teoria w matematyce czy nowe udowodnione twierdzenie to potencjalne źródło nowych algorytmów, które przyjdą w sukurs wiedzionej intuicją twórczości, ta zaś wyprodukuje następne algorytmy wzmacniające twórczość, która zaowocuje kolejnymi algorytmami.

Tak dokonuje się ów proces wnikania w dynamikę postępu gatunku ludzkiego poprzez refleksję nad twórczą naturą Człowieka – w myśl sentencji Aleksandra Pope'a. Któż może lepiej niż humanista proces ten rozumieć i objaśniać go innym? Warunkiem zaś, by się do tego powołania przysposobić jest zapoznanie się z treścią i przesłankami twierdzenia Gödla. Obecny esej ma być w tej materii zachętą oraz czymś w rodzaju pierwszej pomocy.