Witold Marciszewski

„Mathesis Universalis” na nasze czasy

Wkład Fregego, Cantora i Gödla

lokalizacja pliku: calculemus.org/cafe-aleph/raclog-12/ , przyjęty

do druku w „Zagadnienia Naukoznawstwa” 2012

§1. Za autora projektu *Mathesis Universalis* uchodzi dość powszechnie Kartezjusz (Rene Descartes 1596-1950), który użył tej frazy w „Regulae ad directionem ingenii”. Były to zapiski tworzone w okolicach roku 1628, które wydano pośmiertnie dopiero w roku 1701.[1]

Następnym wielkim projektantem był Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). W roku 1670 nabył on w Amsterdamie rękopis „Prawideł” (trudno powiedzieć czy był to oryginał, ale jeśli nawet kopia, to w świetle analiz historyków, okazała się ona wiarogodna). Powstała sytuacja, którą oddałaby parafraza pewnego udatnego zwrotu (Mickiewicza, z „Pana Tadeusza”): „Leibniz projekt pochwalał, lecz by przeinaczył”. Przeinaczył go tak gruntownie, że kiedy dziś pytamy, na ile pomysł był trafny, na ile się sprawdził historycznie, to mamy na uwadze wersję Leibnizjańską.

Na tej wersji skoncentruję się w głównej części rozważań; jest ona na tyle sprecyzowana, że nadaje się do krytycznej oceny z naszego współczesnego punktu widzenia. Przedtem jednak trzeba skorygować pewne uproszczenie dominujące w podręcznikach i encyklopediach. Nową ideę, odkrycie czy wynalazek wiążą one zwykle z jednym lub kilkoma tylko nazwiskami. Wikipedia np. pod hasłem „Mathesis Universalis” wymienia jedynie Kartezjusza i Leibniza oraz niejako ubocznie (lecz nie dość zasadnie) Johna Wilkinsa.

Prawda natomiast jest taka, że z reguły wchodzi w grę długotrwały i rozległy proces z wielką liczbą uczestników, zapomnianych lub od początku anonimowych, i wcale pokaźną tych, których nazwiska nie do końca przepadły w historycznej pamięci, lecz znane są tylko specjalistom od danego zagadnienia. Te właśnie trzeba przywołać, żeby nie umacniać mylnego przekonania, że w dziejach myśli liczą się tylko nazwiska wielkich przywódców intelektualnych, jak gdyby nie miał znaczenia wkład tych wszystkich, którzy tworzyli środowisko intelektualne niezbędne do wzrastania liderów. Słuchałem wykładów z historii logiki, w których wykładowca zwykł powtarzać jak refren dwa pytania dość dziwaczne, ale łącznie niosące swoistą rację. Pierwsze brzmiało „kto jako autor był pierwszy?”, a drugie „kto był jeszcze pierwszy?”.

Ważnym autorem idei Mathesis Universalis wśród tych „jeszcze pierwszych” był znaczący w swoim czasie matematyk z Jeny, nauczyciel Leibniza, Erhard Weigel (1625-1699); świadczy o tym samo zestawienie tytułów jego dzieł.

—„Analysis Aristotelis ex Euclide restituta” (1658); jest to interpretacja teorii metodologicznej Arystotelesa (z roku ok. 350 p.n.e) w świetle praktyki metodologicznej „Elementów” Euklidesa (z roku ok. 300 p.n.e.).

—„Idea Matheseos Universalis” (1669); mogli więc czytelnicy Weigla przyswoić sobie to pojęcie, uhonorowane rolą tytułu rozprawy, nim zyskali dostęp do kartezjańskich „Regulae” wydanych po raz pierwszy drukiem w 1701.

—„Philosophia mathematica: universae artis inveniendi prima stamina complectens” (1693).

W ostatnim z tych tytułów trzeba zwrócić uwagę na charakterystyczny kontekst, który wystąpi w pełnym rozwinięciu u Kartezjusza i Leibniza, ale znajdujemy go już u filozofów Renesansu, mianowicie pojęcie *sztuki znajdowania prawdy* (ars inveniendi); tytuł Weigla obiecuje dać podstawy (prima stamina) tej umiejętności. Był w tej problematyce nurt empirystyczny (Francis Bacon) i nurt matematyczno-dedukcyjny inspirowany przez bujnie w erze Renesansu kwitnącą filozofię pitagorejsko-platońską. Wielką nośność nadał tej drugiej werset biblijny z „Księgi Mądrości” (11, 23), że Stwórca *ustanowił wszystko pod liczbą, miarą i wagą* (omnia in numero, mensura et pondere). Pod tym hasłem rozwijali swe myśli Marsilio Ficino, Mikołaj z Kuzy, Galileusz, Leonardo da Vinci i inni myśliciele tworzący plejadę gwiazd wokół idei Mathesis Universalis. Streścił ją Ficino w powiedzeniu, że doskonały boski ład świata ma odwzorowanie w ludzkim umyśle, przejawiając się w jego intuicjach matematycznych. A zatem sztuka znajdowanie prawdy o świecie polega na umiejętności wykorzystania i rozwijania owych intuicji. W tym kierunku idzie też myśl Kartezjusza. On sam nie rości sobie tytułu do priorytetu, powołuje się bowiem na ów termin jako znany (co umyka uwadze niektórych komentatorów), poczem nadaje mu treść czerpaną z własnych doświadczeń intelektualnych.

[1] Polski przekład Ludwika Chmaja pt. „Prawidła do kierowania umysłem” ukazał się w roku 1937 w serii „Biblioteka Filozoficzna Klasyków” wydawanej przez Polskie Towarzystwo Filozoficzne.

Tak więc w planie tych rozważań, po wzmiance o prehistorii pora oddać głos Kartezjuszowi w charakterze jakby prologu. Na jego tle zarysuję podejście Leibniza w kontekście tamtej epoki, wreszcie postaram się je zinterpretować w świetle współczesnego stanu wiedzy. Ten w pewnym tylko aspekcie stanowi kontynuację projektu Leibniza, w innym zaś stanowi on przełom wprowadzający zagadnienie na nowe tory (zob. §7). Żeby oddać sprawiedliwość twórcom owego przełomu, trzeba by wymienić cały gwiazdozbiór wielkich umysłów matematycznych i filozoficznych. Prócz tytułowej trójcy, wymienionej w roli skrótowego symbolu, znaleźć się tam powinni na podobnych prawach: Boole, Russell, Hilbert, Peano, Turing, Post, Church, Tarski, Gentzen i jeszcze inni.

W tym orszaku mają poczesne miejsce geniusze fizyki i kosmologii. Im to zawdzięczamy matematyczny obraz świata integrujący w kategoriach ewolucjonizmu podstawowe nauki o rzeczywistości; prócz fizyki wypełnia jego ramy astronomia, chemia, biologia, informatyka. Gdyby atakować podjęte tu zagadnienie na całym froncie, należałoby poświęcić osobny rozdział twórcom teorii względności, teorii kwantów, informatyki oraz ewolucjonistycznej kosmologii. Im to bowiem zawdzięczamy milowe kroki ku uniwersalności poprzez dogłębne stosowanie modeli matematycznych w rozległym obszarze nauk. Dostajemy więc w rzeczy samej istotne przybliżenie ku Mathesis Universalis w jednym z jej zamierzeń. Wspomniawszy ów nurt dla uświadomienia proporcji, pominę go jednak z konieczności w obecnych rozważaniach (jego uwzględnienie wymagałoby osobnych kompetencji).

§2. Termin „Mathesis Universalis”, w polskim przekładzie „matematyka uniwersalna”, oraz jego definicja, pojawia się u Kartezjusza w kontekście wyjaśniającym Prawidło IV, które uczy, co następuje: „Do badania prawdy konieczna jest metoda”. Z samego tego sformułowania, nader zwięzłego, nauka byłaby nie wielka, toteż Kartezjusz obszernie je rozwija, zanurzając tę regułę w kontekście doświadczanych przez niego samego praw twórczości matematycznej. Oto ważny punkt w rozwinięciu tej reguły.

> „Do matematyki odnosi się to wszystko, w czym bada się porządek i miarę, bez względu na to, czy owej miary szukać należy w liczbach czy figurach, czy gwiazdach, dźwiękach, czy w jakimkolwiek innym przedmiocie; musi zatem istnieć jakaś ogólna nauka, która by wyjaśniała to wszystko, co może być przedmiotem badań odnośnie do porządku i miary nie przysługującej żadnej specjalnej materii. Tę właśnie matematykę można nazwać, posługując się [...] wyrazem starym i powszechnie używanym, matematyką uniwersalną, ponieważ ona zawiera to wszystko, dzięki czemu inne nauki nazywa się matematycznymi.” Prawidło IV, w przekładzie Chmaja s. 38n).

Gdy idzie o kontekst historyczny, znamienne jest nawiązanie w tym ustępie do tradycji. A ta istotnie jest wielka. Rozciąga się od Platona po średniowieczny program studiów filozoficznych i dalej, gdzie w bloku czterech (stąd nazwa „quadrivium”) dyscyplin mieściły się te właśnie, których przedmiot badawczy wymienia Kartezjusz jako z natury matematyczny. Są nim liczby (dotyczy ich arytmetyka), figury (geometria), gwiazdy (astronomia) i dźwięki (muzyka). Te cztery dyscypliny wymienił Platon w programie edukacyjnym dla elity władzy w dobrze urządzonym państwie; przejęli też ten program mistrzowie scholastyczni. Zaliczenie muzyki do nauk matematycznych to oczywisty ślad pitagorejski, a co się tyczy astronomii, to Platon sądził, że nie trzeba zmysłami wypatrywać owej „pstrokacizny na niebie”, bo idealny porządek nieba odczytuje umysł w matematycznym świecie idei. I tak oto projekt Kartezjusza, udramatyzowany podręcznikowo jako przełom, okazuje się być epizodem w wielkim pochodzie myśli od Pitagorasa (który z kolei czerpał z matematyki Bliskiego Wschodu) poprzez Platona (który po studia pielgrzymował też do Egiptu), Euklidesa, scholastykę i Renesans, aż po racjonalistów 17-go stulecia.

Innowacją właściwą tamtemu stuleciu był pomysł dalszej uniwersalizacji metody matematycznej. Klasycznym tego przykładem jest inspirowana kartezjanizmem próba zastosowania przez Spinozę matematycznej, to jest, dedukcyjnej metody w etyce. Przypadek mniej znany, ale bardziej pouczający, bo bardziej udany metodologicznie, zawiera się w relacji o pewnej rozmowie Weigla z Leibnizem. Weigel doradził młodemu Leibnizowi, szykującemu się do obrony rozprawy habilitacyjnej z zakresu *logica inventionis* pt. „De arte combinatoria [...]”, żeby pokazał matematyczne oblicze rozwijanej tam logiki, stosując ją w dowodzie na istnienie Boga. Stąd w rozprawie tytuł owego fragmentu: „demonstratio existentiae Dei ad mathematicam certitudinem exacta”. Tą próbą Weigel i Leibniz chcieli przejść z fazy formułowania programu do pierwszych kroków jego realizacji w metafizyce, to jest na obszarze wykraczającym poza tradycyjne quadrivium, a więc w stronę uniwersalności.

§3. Oryginalność Leibniza w projektowaniu matematyzacji wiedzy jest uderzająca na kontrastowym tle Kartezjusza, ale i w tym punkcie nie zaczynał on od nowa. Włączył się bowiem w inną tradycję: nieco wcześniejszego odeń Tomasza Hobbesa (1588-1679) jako zdeklarowanego nominalisty, a także w spuściznę późnego średniowiecza. Późniejszą scholastykę (Wilhelm Ockham i inni) cechował trend nominalistyczny, to jest, zmierzający ku temu, co dziś nazywamy formalizacją czy algorytmizacją rozumowań. Była to inklinacja z gruntu obca Kartezjuszowi, który o formalizmie sylogistyki wyrażał się z przekąsem. Powiadał w „Prawidłach”, iż „taka forma logiczna nie uczy niczego nowego i dlatego pospolita dialektyka [tj. powszechnie wtedy nauczana sylogistyka] jest całkiem nieużyteczna dla tych, którzy chcą odkryć prawdę o rzeczywistości.” W „Rozmowie z Burmanem” wyraził się jeszcze dosadniej o sylogistyce, że „rujnuje zdrowy rozsądek” i że „zapędza nas w truizmy” (więcej na ten temat i odniesienia do źródeł - w pozycji [10] wymienionej w §8).

Gdy już wiemy, że Leibniz podzielał z Kartezjuszem ideę matematyzacji całej wiedzy, a matematyzację pojmował w sposób nominalistyczny, jak Hobbes, skorzystał więc ze skrzyżowania dwóch szlaków, to nasuwa się pytanie: czym wytyczył nowy szlak w rozwoju Mathesis Universalis? Żeby na to odpowiedzieć, trzeba mieć na uwadze, że Leibniz był nie tylko matematykiem i filozofem, lecz także inżynierem, zamiłowanym w konstruowaniu maszyn, również takich, jak np. pompy do odwadniania kopalń, nad którymi pracował w służbie księstwa Hanoweru z jego gospodarką opartą na wydobywaniu kruszców. Gdy swój talent inżynierski skierował Leibniz ku matematyce i logice, zaowocował on konstrukcją pierwszego w dziejach kalkulatora na cztery działania (wcześniejszy arytmometr Pascala obejmował tylko dwa). W wyobrażonej zaś ekstrapolacji przejawiło się to w pomyśle maszyny logicznej do dowodzenia twierdzeń, a więc projekcie mechanizacji rozumowań (zob. pozycja 13 wymieniona w §8).

Podstawą teoretyczną do złączenia tych dwóch wątków w jeden był pogląd, który Leibniz podzielał z Hobbesem, że rozumowanie jest rachowaniem. Ponieważ udała mu się maszyna arytmetyczna (udała się tak bardzo, że ów model stosowany był w handlu po wiek XX), miał prawo wierzyć, że maszyna logiczna, bardziej skomplikowana, jest też osiągalna, tyle że na jakimś kolejnym etapie.

Pod ten inżynierski pomysł była u Leibniza skrojona logika i znaczna część spekulacji metafizycznej. Np. koncepcja monady (żywego indywiduum) - jako automatu zaprogramowanego przez Stwórcę i funkcjonującego w kosmicznej sieci maszyn intelektualnych - dobrze współgrała z jego radykalnym determinizmem w metafizyce. Można też rozważać zależność odwrotną: że jego inwencja inżynierska brała się po części z pewnej filozoficznej wizji świata. Te dwie interpretacje da się pogodzić, gdy uciec się do pojęcia sprzężenia zwrotnego, toteż nie ma potrzeby opowiadania się wyłącznie za jedną.

W takim kontekście technologicznym nominalizm, czyli formalizm, zyskuje nowe i przekonujące uzasadnienie. Niezależnie od tego, czy to on czy inne stanowisko jest słuszne filozoficznie w wiekowym sporze o uniwersalia, dostarcza on jedynej możliwej strategii, gdy chcemy zaprząc maszyny do rozwiązywania problemów obliczeniowych. Maszynie na nic się zdadzą dobre rady Kartezjusza, jak korzystać z naturalnego światła rozumu czyli z intuicji matematycznej, i jak wzmacniać to światło umiejętnym stosowaniem metody. Maszyna jako obiekt fizyczny może przetwarzać tylko obiekty fizyczne, jak zapisane w materialnym tworzywie znaki cyfrowe, a nie jakieś jestestwa abstrakcyjne, jak liczby; ani też psychologiczne, jak stany umysłu, nad którymi nieustannie zastanawia się Kartezjusz. Owszem, dzięki maszynie mamy królewską wręcz drogę do abstrakcyjnego świata liczb, ale tylko za sprawą sprzężenia tego świata ze światem fizycznych symboli na zasadzie jednoznacznego przyporządkowania, np. znaku o kształcie „0” do liczby zero.

Ten etap Mathesis Universalis, na którym znajduje się myśl Leibniza, cechuje się silną wiarą, że każdy dobrze sformułowany problem da się rozwiązać w drodze obliczeń, byleby mieć do tego odpowiednio bogaty i precyzyjny język symboliczny. Mówiąc dialektem współczesnej logiki, jest to przekonanie, że każdy problem dobrze sformułowany jest rozstrzygamy w odpowiednio rozbudowanym języku (por. niżej §6).

Czy to przekonanie jest słuszne i dające się obronić, nie sposób powiedzieć, dopóki nie mamy należycie precyzyjnego języka, o którym dałoby się wykazać, że jest on uniwersalny czyli wystarczający do formułowania wszelkich kwestii matematyki i jej zastosowań. Leibniz podejmował próby zbudowania takiego języka. Dał mu nazwę *Characteristica Universalis* (od łac. „character”, tzn. „symbol”), co można przetłumaczyć jako *symbolika uniwersalna.* Do niej miał być dołączony *Calculus Ratiocinator* czyli *rachunek logiczny:* rachunkowe narzędzie rozumowań operujących na języku charakterystyki uniwersalnej.

Leibniz był przekonany, że gdy powstanie jedno i drugie, to do każdego dobrze postawionego zagadnienia da się zastosować wezwanie „Calculemus!” prowadzące do rachunkowego rozwiązania danego problemu. Żeby móc się przekonać, czy istotnie jest szansa na taką uniwersalną rozstrzygalność, przynajmniej w zakresie nauk matematycznych, trzeba było poczekać, aż powstanie tego rodzaju język; jest to warunek konieczny, choć nie wystarczający, bo trzeba jeszcze mieć sposób na badanie rozstrzygalności problemów zapisanych w takim języku, na co przyszedł czas dopiero po paru wiekach.

Warunku koniecznego w postaci adekwatnej symboliki uniwersalnej dostarczył Gottlob Frege, tworząc logikę predykatów, którą doskonalili Bertrand Russell, David Hilbert, Gerhard Gentzen. Autorem zaś wyniku, przez który ów warunek konieczny został dopełniony do wystarczającego, jest Kurt Gödel (1906-1978). Wynik ten został rozbudowany, stając się pomostem do informatyki, przez Alana Turinga (1912-1954). Każde z tych osiągnięć zakłada hierarchię zbiorów nieskończonych, o której Georg Cantor (1845-1918) udowodnił, że u jej podstaw są dwie różne nieskończoności: *przeliczalna,* właściwa zbiorowi liczb naturalnych, oraz nieskończoność *kontinuum* cechująca zbiór liczb rzeczywistych. Tak potężne wzmocnienie aparatury pojęciowej wprowadziło ideę Mathesis Uniwersalis na nowe tory, o jakich nigdy dawniej nie śniło się filozofom.

§4. Gottlob Frege (1848-1925), wykładający matematykę, jak niegdyś Weigel, na uniwersytecie w Halle, uczynił pierwszy milowy krok ku nowoczesnej realizacji tego, co Weigel ujął w tytule swej pracy „Idea Matheseos Universalis” (1669). Idea ta dotarła do Fregego przez wspomnianą wyżej rozprawę Leibniza „De arte combinatoria”. Choć Frege nie znał bardziej reprezentatywnych w tej materii prac Leibniza, postąpił w ich duchu, tworząc uniwersalną symbolikę (characteristica universalis) na miarę potrzeb całej matematyki oraz rachunek logiczny (calculus ratiocinator) złożony z rachunku zdań i rachunku predykatów.

Jak dalece dzieło Fregego realizuje projekt Mathesis Universalis widać z analizy tytułu tego studium, w którym po raz pierwszy, w roku 1879, opublikował swój uniwersalny język symboliczny wraz z rachunkiem logicznym. Tytuł ten brzmi (rozczłonkowanie przez numerację pochodzi ode mnie - WM): „1) Begriffsschrift, 2) eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache 3) des reinen Denkens”. Oto, jak poszczególne człony realizują punkty programu Mathesis Universalis.

1) Begriffsschrift - notacja pojęciowa. Odpowiada to wiernie zamiarowi Leibniza (który interesował się też żywo ideografią chińską jako wzorcem metody językotwórczej), żeby symbole graficzne były przyporządkowane wprost pojęciom, bez uciekania się do pomocy języka mówionego - jak to było dotychczas w sylogistyce, gdzie stosujemy notację symboliczną wtórnie, dla skrócenia zapisów potocznych (np. zwrot „każdy ... jest” zamieniamy na symbol „a” w formule „SaP”). To uniezależnienie od języka naturalnego pozwala w pełni się dostosować do określonych potrzeb badawczych, jak w tym przypadku potrzeb matematyki.

2) Jest to jakby definicja pierwszego członu wskazująca na wzorzec zastosowanej przez Fregego metody językotwórczej, jakim jest symbolika arytmetyczna. To porównanie uwydatnia intencję i metodę, wyrażone raczej skrótowo przez człon pierwszy.

3) Ostatni człon tytułu, operujący charakterystycznym dla spekulatywnej filozofii niemieckiej pojęciem „czystej myśli”, jest najtrudniejszy do interpretacji. Pewne konteksty u Fregego wskazują, że chodzi tu o myśl „odczyszczoną” od elementów subiektywnych, a więc pojętą nie psychologicznie, lecz jako realność niezależna od ludzkich przeżyć. Byłby to wtedy wyraz tego, co się określa jako antypsychologizm w logice kierujący się przeciw psychologizowaniu dominującemu w logików niemieckich w XIX wieku. Tylko po uwolnieniu logiki od psychologizmu, a więc od poglądu, że uniwersum jej języka stanowi pewna dziedzina stanów umysłu (jak pojęcia, sądy i rozumowania), może logika mieć ten rozmach, który czyni z niej realizację leibnizjańskiego marzenia o uniwersalnej symbolice i rachunku logicznym.

Jest to realizacja w stosunku do projektu leibnizjańskiego ograniczona. Nie jest tak, że w języku logiki predykatów da się sformalizować każde rozumowanie (jak to miało być w uniwersalnej symbolice Leibniza), jest on bowiem ekstensjonalny. Da się w nim adekwatnie, z maksymalną precyzją i zarazem ekonomią, opisać świat zbiorów, nie można natomiast mówić o cechach.

Jak to drugie jest niezbędne do pewnych celów, widać choćby w próbie formalizacji rozumowań politycznych na tematy dynastyczne, w których Leibniz był w swoim czasie największym w Europie ekspertem. Tak np. w broszurze „De electione regum Polonorum” adresowanej do sejmu elekcyjnego po abdykacji Jana Kazimierza, a mającej pomóc w realizacji rachub pewnych polityków niemieckich, wywodził Leibniz w łańcuchu sylogizmów, że wymieniony przezeń kandydat, pewien książę niemiecki, ma akurat te wszystkie cechy, których potrzebuje król polski (np. znajomość łaciny, dzięki czemu będzie mógł się z Polakami łatwo dogadywać). Tego rozumowania, które zresztą skutku politycznego nie wywarło, nie da się sformalizować w rachunku predykatów, jako że mówi ono o cechach pewnego indywiduum. Podobnie ma się rzecz z innym wywodem dynastycznym Leibniza, tym razem skutecznym, gdy na zamówienie dworu brytyjskiego wykonał ekspertyzę, z której wynikało, że na mocy praw sukcesji, królem Anglii i Szkocji powinien zostać, po wygaśnięciu potomstwa Wilhelma Orańskiego, książę Hanoweru (tak nastała dynastia hanowerska, a potem jej kolejni sukcesorzy, czemu zawdzięcza też swe panowanie obecna Elżbieta II). Takim zadaniom logicznym może podołać tylko język naturalny.

§5. Pomimo takich ograniczeń, język logiki predykatów w imponujący sposób spełnia oczekiwania żywione pod adresem Mathesis Universalis. Da się w nim bowiem wyrazić każde rozumowanie z zakresu matematyki i z każdej innej dziedziny, byleby pozostawać na gruncie wypowiedzi ekstensjonalnych.

Leibniz zamyślał symbolikę uniwersalną w taki sposób, żeby z niewielu pojęć podstawowych, które obecna lingwistyka określa jako „semantic primitives", dało się wyprowadzić definicyjnie wszystkie pozostałe. Byłby więc zachwycony, tym, że cały rozległy słownik pojęć matematycznych da się zdefiniować wychodząc od trzech pierwotnych terminów logicznych. Mamy tu do wyboru kilka wariantów takich zestawów, z tym, że w każdym powtarza się jako nieodzowny symbol identyczności (równości), gdy nie wychodzimy poza logikę pierwszego rzędu. W logice drugiego rzędu (uprawianej z powodzeniem przez Fregego) także on da się wyeliminować z repertuaru pierwotnych, i to dokładnie w myśl recepty Leibniza zawartej w jego prawie identyczności rzeczy nieodróżnialnych (identitas indiscerniblium). Wtedy jako absolutnie niezbędne pozostaną: jeden z dwóch (do wyboru) kwantyfikatorów oraz jeden z dwóch operatorów rachunku zdań, mianowicie dyzjunkcja Sheffera, która tworzy zdanie prawdziwe wtedy i tylko, gdy przynajmniej jeden z członów jest fałszywy; albo też strzałka Quine'a, która tworzy zdanie prawdziwe wtedy i tylko, gdy oba człony są fałszywe (potocznie: ani p, ani q).

Powstaje pytanie o status pojęcia *element zbioru* wyrażanego zwrotem „x należy do zbioru Z", symbolicznie $x \in Z$, które to pojęcie tworzy fundament teorii mnogości, a wraz z nią całej matematyki. Otóż i ono da się zdefiniować za pomocą kwantyfikatora ogólnego i znaku równoważności za pomocą formuły:

$$z \in \{ x : \ \mathrm{Q}(x)\} \Leftrightarrow \mathrm{Q}(z).$$

Formuła ta definiuje „za jednym zamachem" symbol „$\in$" oraz symbol bycia zbiorem utworzony z dwóch klamer i dwukropka; te znaki interpunkcyjne tworzą *operator abstrakcji,* mianowicie „$\{x : Q(x)\}$", co czytamy: *zbiór przedmiotów spełniających warunek Q.*

Sama taka definicja jeszcze nie gwarantuje istnienia opisanego nią zbioru. Nominalista zaprzeczający istnieniu takich jestestw jak zbiory powie, że wyrażenie „$\{x : Q(x)\}$" jest nazwą pozorną (określenie Tadeusza Kotarbińskiego). Chcąc jednak uprawiać matematykę w jej całym istniejącym zakresie, trzeba się zdystansować od nominalizmu, co czyni sławetna formuła określana jako *pewnik abstrakcji* lub komprehensji lub definicyjny.

Pewnego zalążku tego pewnika można się dopatrzeć u samego Leibniza (choć nie czynił on zeń użytku w projektowaniu swej symboliki uniwersalnej). Mianowicie, wśród przesłanek wspomnianego wyżej dowodu na istnienie Boga Leibniz umieszcza postulat, żeby wolno było ilekolwiek jakichkolwiek rzeczy (quotcumque res) objąć [myślą] naraz (simul sumere) i pojąć jako jedną całość (tamąuam unum totum concipere). Czy Leibniz miał tu na uwadze całość jako zbiór w sensie teoriomnogościowym (abstrakcyjnym) czy mereologicznym (kolektywnym), pozostaje do dyskusji; w każdym razie, dla zainspirowania takiej dyskusji warto o tym wspomnieć w obecnym kontekście.

A wracając do historii nam bliższej: *pewnik abstrakcji* w jego pierwotnej historycznie postaci (Frege, Dedekind, Cantor) zapisywano następująco:

$$\exists z \ \forall x \ (x \in Z \Leftrightarrow \ \varphi(x)).$$

Tym sformułowaniem trzeba się posługiwać z dużą ostrożnością, bo przy pewnych postaciach formuły po prawej stronie równoważności prowadzi ono do sprzeczności (co wykazał Bertrand Russell). Nie musimy się jednak zapuszczać w tak niebezpieczne podstawienia, a dla wyjaśnienia samej idei zbioru, jest to sformułowanie dogodne ze względu na swą prostotę. Na zaawansowanym poziomie rozważań zastępuje się je wyrażeniem bardziej złożonym, które dzięki wprowadzeniu pewnych restrykcji nie zagraża już sprzecznością; nazywa się je aksjomatem wyróżniania (zob. pozycja [5] wskazana w §8).

Doniosłość pojęcia zbioru w nowoczesnej *Characteristica Universalis* bierze się stąd, że za jego pomocą da się zdefiniować pojęcie liczby całkowitej dodatniej (np. liczba 2 jest tym, co wspólne wszystkim parom dowolnych obiektów); ono z kolei służy do zdefiniowania wszystkich pozostałych rodzajów liczb, potem przez geometrię analityczną (dzieło Kartezjusza), a więc przyporządkowanie bytów geometrycznych arytmetycznym przechodzimy do różnych działów geometrii, i tak dalej.

§6. Nie możemy jednak poprzestać na powyższej konkluzji. Brak w niej odniesienia do najgłębszej różnicy między projektem 17-wiecznych racjonalistów a współczesną edycją Mathesis Universalis. Określając tę różnicę, nie trzeba się wahać przed użyciem słowa „rewolucyjna", rzutuje ona bowiem na całą filozofię nauki, umysłu i poznania. Zawiera się ona w słynnym, wprowadzonym przez Davida Hilberta (1862-1943) pojęciu: *Entscheidungsproblem* - Problem Rozstrzygalności. Klasyczne jego sformułowanie mamy w książce D. Hilberta i W. Ackermanna „Grundzüge der theoretischen Logik" (Springer, Berlin 1928, s.73). *Rozwiązanie problemu rozstrzygalności logiki* - piszą autorzy - *po lega na uzyskaniu procedury, która o każdej formule rachunku predykatów pozwoli rozstrzygnąć, czy jest ona czy nie jest prawem logiki.*

Procedura taka istnieje od samych początków współczesnej logiki, tj. od dzieła Fregego (1879), dla rachunku zdań. Dla rachunku predykatów nie było jej w momencie powstawania „Grundzüge", ale Hilbert wierzył, iż jej wynalezienie jest kwestią czasu. Ludwig Wittgenstein w słynnym Traktacie („Tractatus Logico-Philosophicus") szedł zdecydowanie dalej, pisząc że rozstrzygalność należy do samej natury logiki, co wykluczało możliwość istnienia kwestii nierozstrzygalnych (punkty 5.551, 6.125-6).

Hilbert i Wittgenstein wyrażali precyzyjnie przekonanie, które podzielał, choć nie zawsze z tak wyraźną artykulacją, cały świat nauki aż po rok 1931 (o czym za chwilę), a już ze szczególną mocą klasycy Mathesis Universalis z 17-go wieku. Najzwięźlej wyraził to Leibniz w swym „calculemus" (por. §3). Sens tego zawołania jest następujący: gdy już powstanie ścisła symbolika uniwersalna i rachunek logiczny (wykonalny też dla maszyny), to wtedy każdy problem da się rozwiązać za pomocą obliczeń (nawet kwestie natury Trójcy Świętej, sądził Leibniz, da się rozwiązywać rachunkiem logicznym, o czym świadczy jego polemika z arianami w „Defensio Trinitatis per nowa reperta logica"). Jeszcze dosadniej brzmiało to wtedy, gdy Leibniz zachwalał ów przyszły język i rachunek powiedzeniem, że za ich sprawą nawet najgłupsi będą mogli rozwiązywać najtrudniejsze kwestie, bo poprowadzi ich w sposób mechaniczny algorytm rozumowania - na sposób (to jego ulubione porównanie) nici Ariadny wyprowadzającej Tezeusza z Labiryntu. Jeszcze inne określenie dla algorytmicznej czyli mechanicznej procedury rozstrzygania (w terminologii Hilberta - Entscheidungsverfahren) to „myślenie na ślepo" (caeca cogitatio). To znaczy, że w rozwiązywaniu problemu zbędne będzie widzenie przez umysł jakiejś rzeczywistości (tak silnie postulowane przez Kartezjusza), wystarczy ślepe kierowanie się przepisami przekształcania jednych symboli w inne, aż w końcu pojawi się niejako wydruk formuły zawierającej prawdziwe rozwiązanie (veritas quasi picta, machinae ope impressa).

Marzeniom tym położyli kres: Georg Cantor jako torujący drogę pewnymi pojęciami i metodami, Kurt Gódel (1931) jako odkrywca nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych, Alan Turing (1936) i Alonzo Church (1936) jako autorzy (niezależni) dowodu nierozstrzygalności logiki (miał w tych sprawach istotny wkład również Emil Post; jego jednak wyniki, tamtym równoważne są mniej eksponowane w literaturze).

§7. Georg Cantor nie wiedział o nierozstrzygalności arytmetyki, a także stworzonej przezeń teorii mnogości; wyników Gödla i Turinga nie dożył, ale dostarczył im pojęć, bez których nie mogłyby one zaistnieć. Jest to odróżnienie dwóch nieskończoności takich, że jedna jest „większa" od drugiej. Zawarte są one w nieskończonej hierarchii coraz to „większych" nieskończoności; nas tu interesują dwa dolne szczeble tej drabiny. Najniższy to nieskończoność taka jak zbioru liczb naturalnych, nazwanego przeliczalnym. Góruje nad nim nieskończony zbiór liczb rzeczywistych zwany kontinuum. Góruje w tym sensie, że gdy zechcemy każdemu jego elementowi przyporządkować jakiś element zbioru przeliczalnego, tworząc z nich parę, to w tym drugim zabraknie kandydatów do pewnych par, i takich braków będzie nieskończenie wiele. Cantor udowodnił ten fakt wynalezioną przez siebie metodą, zwaną dowodem przekątniowym, którą później zastosowali do swych problemów Gödel i Turing (por. pozycje 16 i 17 wymienione w §8).

Turing posłużył się tymi pojęciami, żeby porównać zbiór wszystkich możliwych programów do obliczania wartości funkcji ze zbiorem wszystkich możliwych problemów obliczeniowych i tak wykazać, że ten drugi ma moc kontinuum, podczas gdy ten pierwszy jest tylko przeliczalny. Udowodnił to stworzywszy pomysłową metodę kodowania numerycznego programów (przez co stał się potem jednych z czołowych ekspertów w deszyfrowaniu niemieckiej Enigmy). Okazało się w wyniku tych rozumowań, że wśród funkcji liczb rzeczywistych muszą być takie, dla których zabraknie programów do obliczania ich wartości, czyli że istnieją liczby nieobliczalne. Tym samym, istnieją - wbrew oczekiwaniom Hilberta - problemy obliczeniowe nierozstrzygalne.

Zauważmy z kolei, że obliczanie jest to dowodzenie pewnego wyniku na podstawie aksjomatów arytmetyki czynione za pomocą reguł logiki o charakterze formalnym; to jest takim, jaki cechuje algorytmy i programy. Jeśli więc jakiś problem obliczeniowy jest nierozstrzygalny, to znaczy, że nie radzi sobie z nim logika, a zatem i ją dotyka owa przypadłość nierozstrzygalności.

Te wyniki Gödla i Turinga odbierane są często z pewnym przygnębieniem, jako świadectwo ograniczeń ludzkiego poznania. Nie spodziewano się ich ani w obozie empirystów ani w obozie racjonalistów; choć obozy te wzajem się zwalczają, łączył je podobny optymizm poznawczy. Zastanówmy się jednak, co to jest za rodzaj optymizmu, a wtedy się przekonany, że jego porażka nie daje powodów do zmartwienia. Widać to dobrze właśnie na klasycznej wersji Mathesis Universalis. Rozkwitający wtedy racjonalizm wierzył w potęgę ludzkiego umysłu, nie mając przy tym pojęcia o nieskończonej złożoności świata (wprawdzie przeczuwał ją genialnie Pascal, ale jego intuicja się nie przebiła). Łączy się to z faktem, że do czasów Dedekinda i Cantora pojęcie nieskończoności było w matematyce słabo rozumiane, a u Leibniza budziło nawet zdecydowany opór; to kłopotliwy dla historyków paradoks, że z takim rozmachem uprawiając infinityzm w monadologii, był on zarazem upartym finitystą w matematyce (por. pozycja [15] w §8).

Nikomu do głowy nie przychodziło w owych wiekach, iż rzeczywistość, ta matematyczna i ta empiryczna, może się odznaczać nieskończoną złożonością; a że każda teoria jest ograniczona przez swój skończony aparat pojęciowy, żadna z osobna nie jest w stanie wyczerpać poznawczo swojej dziedziny rzeczywistości. Byłoby to istotnie przygnębiające, gdyby nie istniało coś takiego, jak nie kończąca się ewolucja ludzkiego poznania. Że tak jest w sferze empirycznej, to prawie pewne (choć niektórzy wierzą, że fizyka kiedyś dojdzie do „teorii wszystkiego” - theory of everything”). Co się tyczy sfery matematycznej, wykazał to Gödel, a wraz z tym, niejako jednym tchem wyraził przekonanie, że kolejne szczeble coraz to większej złożoności będziemy zdolni pokonywać dzięki nieograniczonym potencjom ludzkiego umysłu.

W sposób bardziej techniczny, a przez to ograniczony do przypadku, który się daje dokładnie opisać, wyraził to Gödel w komunikacie z roku 1936 „Über die Länge von Beweisen”. Zawarł tam myśl o rosnących stopniach rozstrzygalności problemów arytmetycznych w miarę sięgania po logiki coraz wyższego rzędu. I tak, w logice drugiego rzędu (A) stają się dowodliwe, a więc rozstrzygalne pozytywnie pewne prawdy arytmetycznie niedowodliwe w logice pierwszego rzędu. Zarazem, (B) pewne twierdzenia, które mają w logice pierwszego rzędu dowody kłopotliwie długie, w logice wyższej o rząd dają się dowieść w sposób bardzo krótki. Odpowiednio, trzeci rząd logiki ma tego rodzaju przewagę nad drugim, i tak dalej. Własność B ma istotne znaczenie w komputerowym dowodzeniu twierdzeń.

Jeśli pewnych badaczy ten wynik nie cieszy, to dlatego, że osiąganie coraz to wyższych szczebli efektywności dowodowej wymaga konstruowania w bardzo nieraz pomysłowy sposób nowych pojęć wraz z założeniem o istnieniu ich desygnatów. Wymaga to zaufania do intuicji i pomysłowości ludzkiej, nieosiągalnej dla komputera, oraz filozoficznej odwagi akceptowania bytów coraz to bardziej abstrakcyjnych. Taka odwaga uchodzi w pewnych sferach, jak nominaliści czy empiryści, za lekkomyślność czy nawet nieodpowiedzialność, a przyznanie, że umysł ludzki dalece góruje nad komputerami, nawet coraz to mocniejszymi, jest przykre dla entuzjastów sztucznej inteligencji.

Autor tego eseju zalicza się do tej niepoprawnej może filozoficznie mniejszości, która wierzy w nieograniczony potencjał ludzkiej inteligencji, nie zagrożony przez inteligencję maszynową. Na szczęście dla tej mniejszości, należał do niej sam Gödel. Jego postawę tak oto charakteryzuje Chaitin, jeden z najwybitniejszych dziś matematyków oraz specjalistów od podstaw informatyki (cytuję w oryginale, bo szkoda umniejszać przekładem walor językowy wypowiedzi Chaitina) w wywiadzie pt. „Chaitin interview for Simply Gödel website” (9 lutego 2008).

> „Gödel's own belief was that in spite of his incompleteness theorem there is in fact no limit to what mathematicians can achieve by using their intuition and creatMty instead of depending only on logie and the axiomatic method. He believed that any important mathematical ąuestion could eventually be settled, if necessary by adding new fundamental principles to math, that is, new axioms or postulates. Notę howe-ver that this implies that the concept of mathematical truth becomes something dynamie that evolves, that changes with time, as opposed to the traditional view that mathematical truth is static and eternal.” Zob. http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/charly.html

Ostatnie z cytowanych zdań, które wyraża także pogląd samego Chaitina (rozwijany przezeń w dalszym toku wywiadu), kreśli wyrazistą linię demarkacyjną między klasyczną koncepcją Mathesis Universalis, a tą nowoczesną, która możemy budować na wynikach i analizach Gödla. Kartezjusz, Leibniz i ich współcześni uważali matematykę za system, który po zrealizowaniu projektu Mathesis Universalis będzie pojęciowo domknięty; może się rozwijać przez dowodzenie nowych twierdzeń, ale nie przez odkrywanie nie znanych dotąd obszarów rzeczywistości matematycznej, które byłoby trzeba ujmować w nowych pojęciach. Krótko mówiąc, klasyczna Mathesis jest statyczna, a nowoczesna - dynamiczna. Dotyczy to również innych obszarów wiedzy, ale w obecnym eseju stosowne jest skupienie się na dyscyplinach matematycznych, jako że natura owego dynamizmu jest na tym polu najlepiej określona. Do jego odkrywania przyczynili się liczni koryfeusze nauki, w tym eseju reprezentowani głównie przez Fregego, Cantora i Gödla. Dzieło Gödla jest tego odkrywczego procesu zwieńczeniem.

§8. Nota bibliograficzna.

Nie dołączam tu listy bibliograficznej w standardowej formie. Klasyka bowiem jest uwzględniona w treści artykułu, a a gdybym prócz klasyki zdawał tu sprawę z komentującej ją literatury, np. ważnych w badaniach nad Leibnizem prac Couturata czy Cassirera, czy pomniejszych przyczynków, jakie napływają na międzynarodowe kongresy leibnizjańskie, comiesięczne posiedzenia Leibniz Gesellschaft w Hanowerze etc, trzeba by napisać pokaźny tom drobnym drukiem. Dlatego ograniczyłem się do własnych przemyśleń z okazji wieloletnich lektur, wykładów i seminariów. Przytaczając odpowiadające im publikacje, i to w dość obfitym wyborze, czynię to z dwóch względów związanych z obowiązującym ten artykuł limitem objętości.

Przy jakimś hojniejszym limicie byłoby wskazane wyjaśnić dokładniej niektóre pojęcia logiczne, mając na uwadze tych czytelników, np. historyków filozofii, którzy nie są może z nimi oswojeni. Pewnym takich wyjaśnień ekwiwalentem niech będzie odesłanie do kilku redagowanych przeze mnie encyklopedii logicznych (pozycje 1-3), gdzie znajdują się odpowiednie definicje w poświęconych danej tematyce artykułach (pozycje 4-9); podobnych wyjaśnień na poziomie elementarnym dostarcza też pozycja 17.

Inne prace (punkty 10-16) nadają się do wykorzystania jako rozszerzenia obecnego eseju, wchodzące głębiej w zagadnienia, które tu zostały tylko napomknięte. Kierunek takiej kontynuacji zaznaczam w komentarzu do danej pozycji. Zarówno teksty encyklopedyczne jak i pozostałe zawierają liczne odniesienia do literatury związanej z tematyką obecnego artykułu, rekompensują więc poniekąd jej brak w poniższym wykazie.

[I] *Dictionary of Logic as Applied to the Study of Language: Concepts, Methods, Theories.* Nijhoff (obecnie Springer), The Hague 1981.

[2] *Logika Formalna: Zarys encyklopedyczny z zastosowaniami do informatyki i lingwistyki.* PWN, Warszawa 1987.

[3] *Mała encyklopedia logiki.* Wyd. 2 zmienione, Ossolineum, Wrocław etc. 1988.

[4] *Abstraction operator.* Art. w [1]. *Operatory logiczne.* Art. w [2].

[5] *Aksjomatyczna teoria mnogości.* Art. w [2]. Omawia min. aksjomaty abstrakcji, wyróżniania, ekstensjonalności.

[6] *Rozstrzygalność.* Art. w [1] i [2].

[7] *Logika predykatów.* Art. w [1] i [2]. Zawiera m.in. rozdział na temat logiki drugiego rzędu.

[8] *Logic modern, history of.* Art. w [1]

[9] *Główne fakty z dziejów logiki współczesnej.* Art. w [2].

[10] *Podstawy logicznej teorii przekonań.* PWN, Warszawa 1972. Daje obszerne omówienie poglądów Kartezjusza na metodę naukową.

[II] *On Leibniz's anticipation of the comprehension axiom* [...]. „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric” nr 2, 1982. Wyd. Filii UW w Białymstoku.

[12] *The Principle of Comprehension as a Present-Day Contribution to Mathesis Universalis.* „Philosophia Naturalis. Archiv fiir Naturphilosophie und die philosophischen Grenzgebiete der exakten Wissenschaften und Wissenschaftsgeschichte”, Band 21 (1984), Heft 2-4. Meisenheim/Glan.

[13] *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam 1995. Książka, współautorstwa Romana Murawskiego, omawia Leibnizjański projekt Mathesis Universalis w szerokim kontekście historycznym. Dostęp elektroniczny: jako Wynik z Google Books i w sprzedaży przez Amazon Kindle Store.

[14] *Leibniz's Two Legacies. Their Implication for Knowledge Engineering.* „Knowledge Organization”, Vol. 23 (1996) No. 2, Frankfurt. Omawia min. opozycję Leibniza w stosunki do kartezjańskiej teorii wiedzy.

[15] *Leibniz and Mathematical Infinity - A Case of Cultural Resistance.* Odczyt na VII Międzynarodowym Kongresie Leibnizjańskim w sekcji „Mathematik und Metaphysik”, Berlin 2001. Wersja rozszerzona: *Leibniz's mathematical and philosophical approaches to actual infinity. A case of cultural resistance.* „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric” vol. 17,2001. Adres sieciowy:

http://logika.uwb.edu.pl/studies/voll7.html. Artykuł zawiera rozważania nad motywacją odrzucenia przez Leibniza nieskończoności aktualnej w matematyce, choć ją przyjmował w metafizyce.

[16] *The Gödelian Speed-up and Other Strategies to Address Decidability and Tracta-bility.* „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric” vol. 22, 2006. Adres sieciowy: http://logika.uwb.edu.pl/studies/vol22.html. Artykuł podejmuje problem skracania (speed-up) dowodów postawiony przez Gödla w tekście „Über die Länge von Beweisen” dyskutowanym wyżej w §7.

[17] *Umysł - komputer - świat. O zagadce umysłu z informatycznego punktu widzenia.* Exit - Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 2011. Książka, współautorstwa Pawła Stacewicza, omawia przystępnie m.in. dowody istnienia w matematyce problemów nierozstrzygalnych podane przez Gödla i przez Turinga.