

Tytuł Projektu:

Nierozstrzygalność i algorytmiczna niedostępność w naukach społecznych

D. OPIS PROJEKTU BADAWCZEGO 2 H01A 030 25:

METODYKA BADAŃ ORAZ CHARAKTERYSTYKA OCZEKIWANYCH WYNIKÓW

1. *Cel naukowy Projektu — (a) jaki problem wnioskodawca podejmuje się rozwiązać, (b) co jest jego istotą, (c) co uzasadnia podjęcie tego problemu w Polsce, (d) jakie przesłanki skłaniają wnioskodawcę do podjęcia tego tematu?*
2. *Istniejący stan wiedzy w zakresie badań — (a) jaki oryginalny wkład wniesie rozwiązanie postawionego problemu do dorobku danej dyscypliny naukowej w świecie i w Polsce, (b) czy w kraju i świecie jest to problem nowy czy kontynuowany i (c) w jakim zakresie weryfikuje utarte poglądy i dotychczasowy stan wiedzy.*
3. *Metodyka badań — (a) co stanowi podstawę naukowego warsztatu wnioskodawcy i (b) jak zamierza rozwiązać postawiony problem, (c) na czym polegać będzie analiza i opracowanie wyników badań, (d) jakie urządzenia (aparatura) zostaną wykorzystane w badaniach, (e) czy wnioskodawca ma do nich bezpośredni dostęp i umiejętność obsługi?*
4. *Co będzie wymiernym, udokumentowanym efektem podjętego problemu — zakładany sposób przekazu wyników (publikacje naukowe oraz referaty na konferencjach w kraju i zagranicą, monografie naukowe, rozprawy doktorskie i habilitacyjne, nowe patenty i „know-how”, nowe metody i urządzenia badawcze).*

1. Cel naukowy projektu.

(a) Problem do rozwiązania: [P1] jakie są ograniczenia algorytmów (nierozstrzygalność, niedostępność algorytmiczna problemu) w symulacji komputerowej procesów społecznych, [P2] jakie to ma konsekwencje dla metodologii nauk społecznych, [P3] jakie założenia filozoficzne mają wpływ na odpowiedzi dotyczące P1 i P2?

(b) Istotę problemu dobrze oddają słowa wybitnego logika Patricka Suppesa: *The limits of knowledge has been in many ways more a topic of philosophy or mathematics. What is a new twist here is to try to consider limits in terms of science more directly.* (cytowane za: John Horgan, "A paradigm is born", www.columbia.edu/cu/21stC/issue-1.3/paradigm.html). W obecnym projekcie filozoficzne pytanie o granice posługiwania się matematyką w teoriach społecznych jest rozważane, jak radzi Suppes, z pomocą nauki.

(c) Wśród powodów podjęcia tego problemu mamy z jednej strony [1] fakt prowadzenia w Polsce wielu badań stosujących modele matematyczne w ekonomii i socjologii, a zarazem [2] brak badań logiczno-informatycznych nad stopniem przydatności tych modeli jako algorytmów do symulacji komputerowej, co uniemożliwia stosowanie narzędzi służących do pokonywania ograniczeń algorytmów. Co się tyczy 2, zachodzi wielka dysproporcja między Polską i krajami rozwijającymi takie badania, jak USA, Anglia, Francja, Niemcy, Holandia. Zarządzenie temu wymaga przede wszystkim przyswojenia dorobku zagranicznego. Jest to o tyle trudne, że tak nowa problematyka przenika się silnie z pytaniami filozoficznymi (np. czy należy liczyć się z zachodzeniem funkcji nieobliczalnych w świecie empirycznym); trzeba więc kompetencji filozoficznej na równi z logiczno-informatyczną,

żeby odróżniać, co bierze się z presupozycji filozoficznych, a co z wyników naukowych oraz krytycznie zanalizować warstwę filozoficzną.

Drugim uzasadnieniem jest żywa w Polsce tradycja socjologii humanistycznej (Znaniński, Ossowska, Ossowski, Chałasiński i in.) z jej koncepcją rozumienia. Powinna ona zyskać na precyzji dzięki zestawieniu z pojęciem intuicji, które w logice i informatyce definiuje się przez opozycję do algorytmu (intuicyjne jest poznanie nie dające się ująć algorytmem). Tego rodzaju wiedza ma szansę z bogacić warsztat badawczy polskich socjologów (por. Streszczenie, punkt 3).

(d) Przesłanki do podjęcia tematu — podane w punkcie c.

2. Stan wiedzy w zakresie badań

(a) Badania limitatywne czyli dotyczące ograniczeń algorytmów, w tym ograniczeń występujących w modelowaniu procesów społecznych, na tyle się już rozprzestrzeniły na Zachodzie, że dorobiły się już własnej nazwy – *limitologia*. Oryginalność obecnego Projektu polega na uprawianiu limitologii od strony jej podstaw filozoficznych („od dołu”) i od strony konsekwencji metodologicznych („od góry”).

(b) A zatem cały problem jest nowy w Polsce, w części głównej (limitologia) uprawiany w świecie i wymagający asymilacji w Polsce, a w częściach „oddolnej” i „odgórnej” – oryginalny w skali światowej.

(c) Jest to pytanie o wyniki Projektu, które trudno znać w momencie składania Wniosku, ale hipoteza robocza jest następująca: w skali światowej ujawni się ukrytą filozoficzność pewnych tez reklamowanych jako ściśle naukowe; w skali zaś polskiej ukaże się sceptykom przydatność algorytmów, z jednoczesnym wskazaniem na ich ograniczenia i na metody częściowego pokonywania tych ograniczeń.

3. Metodyka badań

(a) Charakter warsztatu naukowego Wnioskodawcy oddaje nazwa jednostki prowadzącej badania, z której też pochodzi większość uczestników: **Katedra Logiki, Informatyki i Filozofii Nauki**. Podobnie brzmi nazwa serii konferencji krajowych, organizowanych corocznie (od 1997), dotyczących historii problemu rozstrzygalności: *Warsztaty Logiki, Informatyki i Filozofii Nauki*. Z obecnym Projektem wiąże się bezpośrednio temat konferencji 2002: „Wolny Rynek jako System Przetwarzania Informacji: z problematyki algorytmizacji w badaniach społecznych”.

Podstawę warsztatu naukowego w/w Katedry Logiki jako Wnioskodawcy stanowi połączenie kompetencji z logiki, historii logiki, informatyki i filozofii, w szczególności filozofii nauki. Katedra wydaje roczniki tematyczne po angielsku, w wersji tradycyjnej i internetowej (grupa A w klasyfikacji KBN), których tytuły z ostatnich lat także odzwierciedlają zakres kompetencji wykonawców:

On Leibniz's Philosophical Legacy

Emil Post and the Problem of Mechanical Provability

Topics in Logic, Informatics and Philosophy of Science

Language, Mind and Mathematics

Free Market as a Complex System of Information Processing.

Katedra wydaje także serię książkową *Studies in the Methodology of the Social Science*, w której ukazały się od roku 2000 trzy pozycje, w tym jedna dotycząca problemu rozstrzygalności pt. *Program Verification with Algorithmic Logic* ze wstępem pt. „On How the Notion of Algorithm is Related to the Methodology of Social Sciences”.

Te same zainteresowania i umiejętności przejawiały się w projektach badawczych, których tematy są wymienione w danych osobowych wykonawców obecnego Projektu.

Współpraca międzynarodowa w tym zakresie dokonuje się na łamach wydawanego przez Katedrę periodyku internetowego *Mathesis Universalis* (www.calculumus.org/MathUniversalis); np. nr 10 powiązany jest wzajemnymi linkami ze stroną prowadzoną przez A.Hodgesa, fizyka, bio-grafa Turinga, noszącą tytuł "Uncomputability in the work of Alan Turing and Roger Penrose" (www.turing.org.uk/philosophy/lecture1.html). A z międzynarodowym udziałem specjalistów od automatyzacji rozumowań wydaje od 1990 półrocznik (w wersji drukowanej i internetowej) *Formalized Mathematics: A Computer-Assisted Approach*, abonowany przez ośrodki zagraniczne; adres sieciowy: mizar.org/fm/

Znaczącym elementem współpracy międzynarodowej jest udział uczestników obecnego Projektu w aktualnie prowadzonych projektach badawczych Unii Europejskiej z metodologii nauk: *Mathematical Knowledge Management* (IST-2001-37057) oraz *Calculumus – Systems for Integrated Computation and Deduction* (HPRN-CT-2000-00102). Jeden z uczestników pracuje w 2003 (roczny pobyt) z tytułu "mobility grant" w Uniwersytecie w Nijmegen (Holandia).

Od strony merytorycznej, do istotnych elementów warsztatu należy automatyzacja rozumowań oraz analiza logiczna tekstów, obejmująca formalizację rozumowań. Co do reprezentowanych umiejętności, wchodzi w grę następujące.

- wiedza matematyczna
- wiedza i praktyka informatyczna (praktyka programistyczna, dydaktyczna, w programowaniu internetowym)
- wiedza i praktyka metodologiczna (praktyka dydaktyczna i w organizacji badań)
- współpraca z przedstawicielami nauk społecznych (wspólne konferencje, dydaktyka na wydziałach nauk społecznych)
- znaczący dorobek niektórych wykonawców w zakresie publikacji filozoficznych (zob. dane osobowe).

(b) Rozwiązywanie postawionego problemu będzie obejmować:

- systematyzację problematyki na podstawie literatury;
- rozpoznanie odmienności stanowisk w informatyce (np. różne hipotezy co do problemu „ $P=NP?$ ”) i w filozofii;
- zbadanie wpływu tej odmienności na metody badań w naukach społecznych, w szczególności badań ekonomicznych i socjologicznych;
- kodyfikację środków zwiększających dostępność obliczeniową;
- współpracę z polskimi badaczami stosującymi metody matematyczne w naukach społecznych w celu wypróbowania w/w środków;
- wykrycie założeń filozoficznych wpływających na poglądy i praktykę we wcześniej wymienionych punktach, próba oceny zasadności tych założeń.

(c) W badaniach tego typu przez wyniki rozumie się coś ostatecznego, co już nie wymaga dalszych analiz (gdy przez wyniki rozumie się np. dane eksperymentalne, to istotnie wymagają one analizy czy interpretacji). Co się tyczy wyników w sensie obecnego Projektu, zostały one scharakteryzowane wyżej w podpunkcie b.

(d) Zwykły komputer i sieć internetowa.

(e) Ma dostęp i umiejętność.

4. Wymierne rezultaty podjętych badań

- Publikacja zbiorowa w formie książki pod tytułem podobnym do tytułu Projektu.
- Wersja angielska tej publikacji.
- Szczegółowy program (syllabus) akademickiego kursu metodologii nauk społecznych do realizacji we własnych zajęciach dydaktycznych i do publikacji jako propozycja dla innych uczelni.
- Rozprawa habilitacyjna i rozprawa doktorska.
- Konferencja ogólnopolska w stulecie urodzin Johna von Neumanna na temat jego wkładu w informatykę i w modele matematyczne dla nauk społecznych.
- Konferencja ogólnopolska, z udziałem gości zagranicznych, w 50-lecie śmierci Alana Turinga, na temat ewolucji jego poglądów od 1936 do 1954 i jego wpływu na aktualny stan informatyki i filozofii.

Publikacje będą w części finansowane przez wydawców, a konferencje przez sponsorów.

Komentarz do Zadań

W uzupełnieniu do punktu 3b wyjaśnia się, że rozwiązywanie problemu będzie obejmować następujące zadania.

- 1. Opis badań metodologicznych nad teorią gier jako standardowym narzędziem do modelowania interakcji i ewolucji społecznej. Klasyfikacja i analiza modeli.**
- 2. Opis badań metodologicznych nad automatami komórkowymi jako narzędziem do modelowania interakcji i ewolucji społecznej. Klasyfikacja i analiza modeli.**
- 3. Klasyfikacja i analiza metod postępowania w przypadku problemów nierozstrzygalnych lub algorytmicznie niedostępnych. Dwie strategie. Rola intuicji. Założenia filozoficzne u podstaw różnych strategii.**

Ad 1. Uwagi metodologiczne dotyczące matematycznej teorii gier i decyzji są rozproszone po literaturze z różnych dziedzin – informatycznej, socjologicznej, ekonomicznej, psychologicznej itd. Zachodzi potrzeba połączenia ich w jedną zwartą całość, w której znajdą się klasyfikacje tego zbioru ze względu na rodzaj ograniczeń modelu (nierozstrzygalność etc.), ze względu na rodzaj samego modelu (np. model preferencji indywidualnych i preferencji w grupie) oraz stopień jego złożoności, a także ze względu na wiarygodność wyniku (pełne dowody, szkice, hipotezy, luźne domniemania). Tak uzyskany materiał nadawał się będzie do monografii z zakresu metodologii nauk społecznych, a w streszczeniu i odpowiednim uproszczeniu – do podręcznika akademickiego.

Ad 2. Mają tu zastosowanie wszystkie uwagi do zadania 1. Ponadto, porównanie modelu gier z modelem automatów komórkowych i badanie przypadków, w których stosowane są one łącznie, dostarczy materiału do wyświetlenia nie dość dotąd jasnego stosunku między *modelem matematycznym*, jakim jest m.in. teoria gier, a *modelem obliczeniowym*, jakim są automaty komórkowe, automaty skończone czy maszyny Turinga. W zadaniu mieszczą się porównania obu modeli wybranych do szczegółowego zbadania z innymi klasycznymi modelami (Valrasa, Pareto etc.)

Ad 3. Wymieniona w treści zadania klasyfikacja ze względu na rodzaj ograniczeń krzyżować się będzie z klasyfikacją ze względu na strategię ich pokonywania. W tej drugiej punktem wyjścia są dwa zbiory, każdy dzielący się dalej na podzbiory. Wyjściowe zbiory strategii to: (A) strategia „minimalistyczna” polegająca na realistycznym ograniczeniu zadania, jak uproszczenie modelu co do złożoności, zadowolenie się wynikiem przybliżonym (np. dla problemu komiwojażera), zadowolenie się wynikiem niepewnym przy oszacowaniu prawdopodobieństwa (np. w problemie spełnialności)

itp; (B) strategia „maksymalistyczna” polegająca na szukaniu bardziej efektywnych środków obliczeniowych niż klasyczny komputer cyfrowy, a więc przetwarzanie równoległe, sieci neuronowe, obliczenia kwantowe itd., aż po tzw. hiperkomputację.

Wybór strategii jest w znacznym stopniu warunkowany przez założenia filozoficzne dotyczące badanej rzeczywistości jak i dotyczące badającego umysłu. Np. sięganie po środki z zakresu hiperkomputacji zakłada istnienie w naturze funkcji nieobliczalnych, a zarazem zdolność podmiotu poznającego do ich odkrywania; negacja tej strategii ma znów swoiste motywacje filozoficzne. To tylko jeden przykład. Spektrum poglądów filozoficznych jest tu szerokie, jest więc pole do śledzenia zależności logicznych między treścią filozofii i treścią danej dyscypliny empirycznej (np. wpływ filozofii ewolucjonizmu), jak też związków między opcją filozoficzną i programem metodologicznym (por. Poppera ideę *metaphysical research programme*).

Realizacja zadań od strony organizacyjnej ma być, w zarysie, następująca. W każdym zadaniu uczestniczy cały zespół wykonawców, a poszczególni członkowie wykonują prace stosowne do ich kompetencji; wszyscy mają w pełni przygotowanie logiczne oraz, różni w różnym stopniu, matematyczno-informatyczne i filozoficzne. Organizacją pracy zajmuje się w każdym zadaniu inny Koordynator, który bezpośrednio współpracuje z Kierownikiem Projektu i przed nim odpowiada za realizację zadania.

Przykładowa bibliografia prac przewidywanych do wykorzystania w realizacji Projektu

- Ajdukiewicz, Kazimierz, *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa 1965.
- Brzeziński, Jerzy et al (ed). *Creativity and Consciousness. Philosophical and Psychological Dimensions*. Rodopi, Amsterdam etc. 1993.
- [Buss-WWW] Buss, R. Samuel, *On Gödel's Theorem on the Lengths of Proofs II: Lower Bounds for Recognizing k Symbol Provability*, math.ucsd.edu/~sbuss/ResearchWeb/publ.ps
- Carnap, Rudolf, *Meaning and Necessity*, University of Chicago Press, 1958.
- Chaitin, G.J. On the length of programs for computing finite binary sequences. *J. Assoc. Comp. Mach.* 13: 547-569, 1966.
- Chaitin, Gregory J., *The Limits of Mathematics, The Unknowable, Exploring Randomness, Conversations with a Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin etc. 1998, 1999, 2001, 2002.
- Church, Alonzo, "An unsolvable problem of elementary number theory". *Am. J. Math.* 58, 345-363, 1936.
- Church, Alonzo, "A note on the Entscheidungsproblem", *J. of Symbolic Logic* 1, 40-41 and 101-102, 1936.
- Copeland, Jack. The Church-Turing Thesis. plato.stanford.edu/entries/church-turing/
- Copeland, Jack and Proudfoot, Diane, *Introduction to Hypercomputation: Computing the Uncomputable*, Copyright by the authors, July 2000.
- www.alanturing.net/turing_archive/pages/Reference%20Articles/hypercomputation/Intro%20to%20Hypercomputation.html
- Copeland. Jack, *Turing's O-Machines of 1938*, May 2000.
- www.alanturing.net/turing_archive/pages/Reference%20Articles/hypercomputation/Turing's%20O-Machines.html
- Allin Cottrell and W. Paul Cockshott. "Calculation, Complexity and Planning: The socialist calculation debate once again". / www.dcs.gla.ac.uk/wpc/reports/ / Por. tych samych autorów: "Socialist Planning after the Collapse of the Soviet Union", *Revue European des Sciences Sociales*, 167-186. Publisher: Academic Press, 1993.

Davis, M, (ed), *Solvability, Provability, Definability. The Collected Works of Emil L. Post*. Birkhauser, Boston etc. 1993.

Deutsch, D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc.Royal.Soc.London A*, 1985, 400:97-117.

Ernst, Michael D.; Millstein Todd D.; Weld, Daniel S., "Automatic SAT-Compilation of Planning Problems", *Proc. the 15th Intern. Joint Confer. on Art. Intell.*, Nagoya, Japan, August 23-29, 1169-1176, 1997.

pag.lcs.mit.edu/~mernst/pubs/satcompile-ijcai97-abstract.html

Feferman, S. Turing in the land of (O)z. [w:] Herken (ed) 1988.

Feynman, Richard. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics* 21, 1982, s. 469.

Garson, David G. *Neural Networks: An Introductory Guide for Social Scientists*. Sage Publications, London 1998. [Obszerna recenzja w: jasss.soc.surrey.ac.uk/4/3/reviews/garson.html].

Grim, Patrick "The Undecidability of the Spatialized Prisoner's Dilemma," *Theory and Decision* 42, 53-80, 1997.

Zob. też www.sunysb.edu/philosophy/faculty/pgrim/SPATIALP

Gödel, Kurt, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 349-360, 1930

Gödel, Kurt, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme – I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 173-198, 1931.

Gödel, Kurt, "Über die Länge der Beweise", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* Heft 7., Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1936.

Hartmanis J. and Stearns R., "On the computational complexity of algorithms", *Transactions of the AMS* 117, 285-306, 1965.

Hartmanis J., "Gödel, von Neumann and the P=?NP problem", *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science* 38, 101-107, 1989.

Heudin, Jean-Claude (ed). *Virtual Worlds: Synthetic Universes, Digital Life and Complexity*. Perseus Books, Reading, MA, 1999. [Obszerna recenzja w: jasss.soc.surrey.ac.uk/4/3/reviews/heudin.html]

Hilbert, David. *Mathematische Probleme. gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris*. Archiv der Mathematik und Physik, 3rd series, 1, 1901.

Hilbert D. und Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin 1928.

Hodges, Andrew. Uncomputability in the work of Alan Turing and Roger Penrose. www.turing.org.uk/publications/interface1.html

Hodges, Andrew. The Alan Turing Home Page. www.turing.org.uk/turing/index.html

Hodges, Andrew, *What would Alan Turing have done after 1954? Lecture at the Turing Day*, Lausanne, 2002, www.turing.org.uk/philosophy/lausanne2.html

[Impag-WWW] Impagliazzo, Russell; Paturi, Ramamohan, and Zane, Francis, *Which Problems have Strongly Exponential Complexity?* (Research supported by a NFI grant). cm.bell-labs.com/cm/ms/who/francis/papers/focs98-subexp.pdf

Kahneman, D. and Tversky, A. *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Kautz H. and Selman B, "Planning as satisfiability", *Proc. 10th Eur. Conf. on AI*, 359-363, Wiley, Vienna 1992.

Kerber, Wolfgang and Nicole J. Saam. Competition as a Test of Hypotheses: Simulation of Knowledge-generating Market Processes *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* vol. 4, no. 3. www.soc.surrey.ac.uk/JASSS/4/3/2.html

Kolmogorov, A. N. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems Information Transmission* 1: 1-7, 1966.

Marciszewski, Witold Murawski, Roman, *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Editions Rodopi, Amsterdam 1995.

Marciszewski, Witold, "Leibniz's Two Legacies. Their Implications for Knowledge Engineering", *Knowledge Organization* vol. 23, no. 2, 1996-a.

Marciszewski, Witold, "Hatte Leibniz's von Neumanns logischen Physikalismus geteilt?", *Beiträge zur Geschichte der Sprachwissenschaft*, 6.2, 1996-b.

Neyman, A., "Bounded complexity justifies cooperation in the finitely repeated prisoners' dilemma", *Economic Letters* 19, pp. 227-229, 1985.

Papadimitriou C. and Yannakakis M., "Optimization, approximation and complexity classes", *Journal of Computer and System Sciences*, 43, 425-440, 1991.

Penrose, Roger. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, Oxford Univ. Press, Oxford etc. 1989.

Penrose, Roger, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, New York 1994.

Sieglmann, Hava T., *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit*, 1999.

Sieglman, Hava T., "Computing Beyond Digital Computers by Neural Models" Odczyt na konferencji *Hypecomputation Workshop*, 2000, University College, London.

www.alanturing.net/turing_archive/conference/hyper/abstracts.html

[Sirridney-WWW] <http://www.sirrodney.nu/public/english/Misc>

Tarski, Alfred; Mostowski, Andrzej; Robinson, Raphael M.: *Undecidable Theories*, North Holland, Amsterdam, 1968.

Turing, Alan, "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proc. of the London Math. Society*, Series 2, 42, pp. 230-265, 1936.

Turing, Alan, "Systems of logic based on ordinals", *Proc. of the London Math. Society*, Series 2, 45, pp. 161-228, 1939. Cytowane jako Turing [1938].

Turing, Alan "Intelligent machinery: Raport, National Physics Laboratory". In: B. Meltzer and D. Michie (eds), *Machine Intelligence*, 5, Edinburgh Univ. Press, Edinburgh 1969.

Turing, Alan, "Computing machinery and intelligence", *Mind* 59, 433-460, 1950.

Tyszka, Tadeusz. Two pairs of conflicting motives in decision making. *Organizational Behavior and Human Decision Making* 27, 1998, 1-23.

von Mises, Ludwig, *Human Action. A Treatise on Economics*, Conteporary Books, Chicago, 1966.

Von Neumann, J. and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.

von Neumann, John, *The Computer and the Brain*, Yale Univ. Press, New Haven 1958.

Wolfram, Stephen: "Undecidability and Intractability in Theoretical Physics", *Physical Review Letters* 54, pp. 735-738, 1985. Dostępne też pod adresem:

www.stephenwolfram.com/publications/articles/physics/85-undecidability/index.html

Wolfram, Stephen: *Cellular Automata and Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

Wolfram, Stephen: *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., 2002.