Zadania: zbadać poprawność wnioskowania stosując prawa rachunku zdań

©Witold Marciszewski

Mamy tu trzy zestawów zadań polegających na badaniu, czy pewne zdanie wynika logicznie z innych. Jeśli wynika, to jest wnioskiem z tych innych (zwanych wtedy przesłankami). Każde z zadań można wykonać stosując algorytm zerojedynkowy lub algorytm tabel analitycznych.

PRZYPOMNIENIE. Do poprawności logicznej (inaczej, formalnej) wnioskowania ani wystarcza ani jest konieczna prawdziwość przesłanek. Warunkiem tej poprawności. wystarczającym i zarazem koniecznym, jest, żeby przesłanki miały taką formę logiczną jak poprzednik, a wniosek taką jak następnik w implikacji będącej tautologią; wtedy wniosek wynika logicznie w przesłanek. Dokładniej wyraża to poniższe (w ramce) określenie.

> Powiedzenie, że zdanie B **wynika logicznie** z A, będącego zdaniem postaci
> $$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n, \text{ gdzie } n \geq 1,$$
> jest równoznaczne z następującym określeniem: *A jest poprzednikiem zaś B następnikiem bądź w formule implikacyjnej będącej prawem logiki, bądź w zdaniu powstałym z podstawienia wyrażeń stałych za symbole zmienne w takiej formule.*

Warunek $n \geq 1$ dopuszcza przypadek, gdy zdanie A jest jednoczłonowe.

Przykład 1 – na zachodzenie wynikania logicznego

B: Zbiera się na burzę.

wynika logicznie ze zdań

A_1 Jeśli niebo jest ciemne, to jest teraz wieczór lub zbiera się na burzę.

A_2: Niebo jest ciemne.

A_3: Teraz nie jest wieczór.

Zdania (A_1), (A_2), (A_3) łączymy symbolami koniunkcji w jedno zdanie (odpowiednik zdania A z definicji podanej w ramce) i czynimy zeń poprzednik implikacji, której następnikiem jest B. Tak powstaje formuła:

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow r.$$

Jest ona prawem logiki, co można sprawdzić tabelką algorytmu zerojedynkowego albo, krócej, następującym rozumowaniem nie wprost, czyli wyprowadzając sprzeczność z przypuszczenia zwanego **założeniem dowodu nie wprost**. Brzmi ono, jak następuje.

ZDNW: *Istnieje podstawienie, przy którym dana formuła staje się zdaniem fałszywym.*

Rozumujemy następująco.

Jeśli takie podstawienie istnieje, to (1) czyni ono fałszywym następnik oraz (2) czyni prawdziwym poprzednik. Z 1 wynika $r = 0$. Zaś 2 prowadzi do wniosku, że prawdziwe są wszystkie trzy człony koniunkcji, stąd $p = 1$ i $\neg q = 1$; to drugie zaś pociąga, że $q = 0$. Ale skoro p jest prawdą, podczas gdy q i r fałszem, to pierwszy człon koniunkcji stanowiącej poprzednik, mianowicie implikacja $p \Rightarrow (q \vee r)$, jest fałszywy. A zatem fałszywy jest cały poprzednik rozważanej formuły, co jest sprzeczne z konsekwencją nr 2 naszego Założenia Dowodu Nie Wprost. Skoro założenie to pociąga sprzeczność, musi być fałszywe, co znaczy, że **NIE** istnieje podstawienie, przy którym rozważana formuła staje się zdaniem fałszywym. To zaś znaczy, że jest ona prawem logiki czyli tautologią, a więc następnik wynika w niej logicznie z poprzednika.

Przykład 2 – na brak wynikania logicznego

Zmieńmy rozważaną wyżej formułę w jednym miejscu, zamieniając w następniku r na $\neg r$. Mamy więc implikację:

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg r.$$

Próbujemy uzyskać podstawienie, przy którym formuła ta stanie się fałszywa, czyli będzie miała prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Fałszywość następnika $\neg r$ wymaga prawdziwości r. Prawdziwość zaś następnika wymaga prawdziwości p, fałszywości q oraz prawdziwości implikacji $p \Rightarrow (q \vee r)$. Implikacja ta istotnie okaże się prawdziwa przy wartościach wcześniej już ustalonych dla p, q, r, a więc udaje się znaleźć – bez popadania w sprzeczność – takie podstawienia, przy których rozważana formuła staje się zdaniem fałszywym, co świadczy, że nie jest ona prawem logiki. Są to, przypomnijmy, podstawienia: $r = 1, p = 1, q = 0$.

Instrukcja korzystania z poniższych zadań

Każdy z zestawów dostarcza dwa razy tylu ćwiczeń, ile jest w nim numerowanych zdań. Raz tworzymy implikacje biorąc za poprzednik zdanie występujące w tytule zestawu, a za następniki kolejne zdania numerowane z tegoż zestawu. Drugim razem bierzemy zdania numerowane jako kolejne poprzedniki, za następnik przyjmując zdanie tytułowe.

Z1: **Grzmi i błyska.**

1. Grzmi.
2. Błyska.
3. Grzmi lub błyska.
4. Grzmi lub dżdży.
5. Jeżeli grzmi, to błyska
6. Jeżeli nie grzmi, to błyska.
7. Jeżeli dżdży, to błyska.
8. Jeżeli błyska, to dżdży.
9. Jeżeli nie dżdży, to nie błyska.
10. Jeżeli nie błyska, to nie dżdży.

W przysłowiu „kto pod kim dołki kopie, sam w nie wpada” uwyraźnijmy jego sens za pomocą „jeśli” i skróćmy do postaci „jeśli kopiesz (dołki pod kimś), to wpadasz (w nie sam).

Z2: **Jeżeli kopiesz, to wpadasz.**

1. Jeżeli wpadasz, to kopiesz.
2. Jeżeli nie kopiesz, to nie wpadasz.
3. Jeżeli nie wpadasz, to nie kopiesz.
4. Wpadasz lub kopiesz.
5. Nie wpadasz lub kopiesz.
6. Wpadasz lub nie kopiesz.
7. Nie jest tak, że kopiesz i nie wpadasz.
8. Nie jest tak, że nie kopiesz i wpadasz.
9. Wpadasz i kopiesz.
10. Nie jest tak, że wpadasz i kopiesz.

Refren „Jak się nie ma, co się lubi, to się lubi, co się ma” (z piosenki w „Operze za trzy grosze” B. Brechta) sparafrazujmy następująco.

Z3: **Jeżeli nie ma się tego, co się lubi, to lubi się to, co się ma.**

1. Nie ma się tego, co się lubi i lubi się to, co się ma.
2. Nie ma się tego, co się lubi lub lubi się to, co się ma.
3. Ma się to, co się lubi lub lubi się to, co się ma.
4. Jeżeli się lubi to, co się ma, to nie ma się tego, co się lubi.
5. Jeżeli się ma to, co się lubi, to nie lubi się tego, co się ma.
6. Lubi się to, co się ma.