ⓒ Witold Marciszewski • Zakład Metodologii Nauk Społecznych
Wyższa Szkoła Administracji Publicznej im. Stanisława Staszica w Białymstoku
Wykład Filozofii Umysłu i Sztucznej Inteligencji • 2006/2007

Szkic uzasadnienia Twierdzenia Gödla o nieusuwalnej niezupełności arytmetyki liczb naturalnych

1. Wyjaśnienie terminów występujących w powyższym tytule

Alan Turing w artykule "Computing machinery and intelligence",[1] w odcinku pt. "(3) The Mathematical Objection", przytacza wynik Gödla (1931), a także jego własny (1936), który wskazuje na ograniczenie mocy obliczeniowej maszyn Turinga (nazwanych "discrete-state machines" – dla odróżnienia od maszyn analogowych, cechujących się stanami ciągłymi). Wynik ten streszcza Turing następująco (we fragmencie kursywą, dodaną przez WM).

> There are a number of results of mathematical logic which can be used to show that there are limitations to the powers of discrete-state machines. The best known of these results is known as Gödel's theorem, and shows that *in any sufficiently powerful logical system statements can be formulated which can neither be proved nor disproved within the system, unless possibly the system itself is inconsistent.*

To znaczy: *w dowolnym dostatecznie mocnym systemie istnieją zdania* [prawdziwe] – *takie, że ani dane zdanie ani jego negacja nie da się w tym systemie dowieść* [za pomocą czysto formalnych reguł logicznych dowodzenia], *o ile system ten jest niesprzeczny.*[2]

Przez dostatecznie mocny rozumie się system z którego aksjomatów da się wyprowadzić arytmetykę. Takim jest arytmetyka liczb naturalnych, logiki wyższych rzędów i in. Nie jest w tym sensie dość mocny np., rachunek zdań, toteż twierdzenie Gódla go nie dotyczy (w systemie tym o każdej formule da się rozstrzygnąć, czy jest czy nie jest jego twierdzeniem, a służy do tego m.in. metoda zerojedynkowa).

Reguły dowodzenia (inaczej, reguły wnioskowania) czysto formalne to takie, które opisują dozwolone w danym systemie przekształcenia napisów przez odwołanie sie wyłącznie do ich formy, czyli kształtu. Przykładem – reguła odrywania: *jeśli są twierdzeniami systemu zdanie w formie implikacji i zdanie równokształtne z jej poprzednikiem, to jest też twierdzeniem zdanie równokształtne z następnikiem.* Taki charakter czysto formalny mają reguły systemu logiki w wersji tabel analitycznych (drzew semantycznych), w wersji Słupeckiego i Borkowskiego itd.

> Żeby przez kontrast lepiej uchwycić istotę reguł formalnych, porównajmy je z następującą regułą wnioskowania: *Z tego, że y następuje po x należy wywnioskować, że y nie jest przyczyną x-a.* Reguła ta odwołuje się nie do formy zdań będących przesłanką i wnioskiem, lecz do naszego rozumienia pojęć przyczyny i następstwa w czasie. Jako inny przykład rozważmy regułę logiki modalnej: z <u>faktu zaistnienia</u> czegoś mamy wniosek o <u>możliwości</u> zaistnienia (*de esse ad posse valet illatio*), lecz nie odwrotnie (*de posse ad esse non valet illatio.* Również i ta reguła nie opisuje, jakie i w jakiej kolejności występują w przesłance i wniosku kształty symboli, odwołuje się natomiast do znaczenia słów „esse" i „posse".

Ilekroć będzie dalej mowa o dowodzie, dowodzeniu czy dowodliwości, zawsze mieć się będzie na uwadze dowód prowadzony za pomocą reguł czysto formalnych. Jest to procedura zwana *dowodem sformalizowanym.* Ma ona cechy *algorytmu*, jest to bowiem ciąg instrukcji mówiących jak sprawdzać krok po kroku poprawność rozumowania, biorąc pod uwagę jedynie fizyczne cechy symboli (ich kształt i położenie), aby po skończonej liczbie kroków uzyskać potwierdzenie poprawności rozumowania, czyli stwierdzenie, że wniosek istotnie wynika z przyjętych przesłanek; tymi zaś zawsze, w ostatecznej instancji, są aksjomaty danego systemu. Jeśli algorytm taki przetłumaczymy z języka logiki predykatów na jakiś język programowania, otrzymamy program komputerowy do sprawdzania poprawności dowodu.

Dla uniknięcia nieporozumień, rezygnujemy w obecnym tekście z używania słowa „dowód" itp. w innych znaczeniach, choć z tymi innymi spotykamy się często i w języku potocznym i w rozważaniach naukowych. Nie użyto więc w tytule obecnego tekstu słowa „dowód", choć niektórzy autorzy (np. Nagel & Newman [1952], stosujący termin „proof") posługują się nim dla określenia rozumowania Gödla. Zamiast niego przyjęto termin „uzasadnienie" oznaczający postępowanie, w którym może wystąpić rozumowanie nieformalne. Takie jest – jak zobaczymy – rozumowanie Gödla, gdyż odwołuje się ono do pojęcia prawdy, którego nie da się wyrazić wewnątrz systemu sformalizowanego. Tak więc, Gödel – podsumujmy – uzasadnia w sposób nieformalny, że *o ile system arytmetyki jest niesprzeczny, nie każda prawda arytmetyczna jest w nim dowodliwa formalnie.*

Powyższy fakt nazwano *niezupełnością* arytmetyki; terminu „arytmetyka" używamy w całym obecnym tekście na prawach skrótu, mając zawsze na uwadze arytmetykę liczb naturalnych, tj. całkowitych dodatnich z włączeniem zera.

[1] *Mind*, vol. 59, no. 2236, Oct. 1950, 433-60.

[2] Wtrącenia w klamrach – WM. W powyższym przekładzie przy słowie "system" opuszczono "logical"; jest to termin wskazujący na to, że Gödel i Turing traktowali arytmetykę jako dającą się wyprowadzić z logiki, wedle standardowego w owym czasie wzorca, jakim było dzieło A. N. Whiteheada i B. Russella *Principia Mathematica* (por. tytuł referowanego tutaj artykułu Gödla [1931]). Jest to podejście poprawne, ale straciło ono na aktualności za sprawą pewnych nowszych trendów w metodologii matematyki.

Jest ona niezupełna, skoro nie wszystkie prawdy arytmetyczne są jej twierdzeniami, to znaczy zdaniami dającymi się wyprowadzić z aksjomatów za pomocą czysto formalnych reguł dowodzenia.

Nie jest to cecha, którą dałoby się usunąć przez uzupełnienie systemu o jakieś nowe elementy, czy to aksjomaty, czy reguły dowodzenia. Wprawdzie można go w ten sposob wzmocnić i wtedy pewne prawdy dotąd w nim niedowodliwe staną się dowodliwe, ale wtedy pojawią się nowe zdania prawdziwe i zarazem niedowodliwe, a po kolejnym wzmocnieniu, kiedy już ich dowiedziemy, znowu znajdą się prawdy niedowodliwe, i tak bez końca. Z tego względu mowa jest w tytule o niezupełności nieusuwalnej. [3]

Jak się dowodzi za pomocą reguł formalnych wie każdy, komu dane było mieć kurs logiki formalnej z jej regułami dowodzenia, czy to w formie drzew semantycznych (zwanych też tabelami analitycznymi), w formie dedukcji naturalnej Słupeckiego i Borkowskiego, czy jeszcze innej. Tym, czego tam się dowodzi środkami logiki są same twierdzenia logiki, co jest pouczające, ale nie aż tak, jak dostrzeżenie płodności logiki w uprawianiu innych nauk, w szczególności matematyki. Korzystne więc będzie dla dalszych rozważań zapoznać się z aksjomatami arytmetyki (żeby ten przywoływany dalej termin nie brzmiał pusto) oraz z przykładowym dowodem jakiegoś twierdzenia arytmetycznego. Poświęcimy temu następny odcinek.

2. Aksjomatyka arytmetyki, przykłady dowodzenia

Ujęcie teorii naukowej w postaci niewielkiego zbioru aksjomatów i definicji, z których logicznie się wyprowadza nieskończoną potencjalnie liczbę twierdzeń, jest genialnym wynalazkiem myśli greckiej. Taką strukturę nauki postulował Arystoteles w swej teorii metododologicznej w *Analitych Wtórych*, około roku 350 p.n.e., a praktycznie zrealizował ją w pół wieku później w odniesieniu do geometrii Euklides działający w szkole naukowej powstałej w Aleksandrii. Była to aksjomatyzacja, jak na obecny standard, daleka od doskonałości, ale stanowiła w dziejach myśli krok godny tytanów. Na ponad dwa tysiąclecia stała się, obok sylogistyki Arystotelesa, wzorcem myślenia racjonalnego. Szczególnie zapłodnił on wielkich racjonalistów 17-go wieku, jak Kartezjusz, Leibniz, Spinoza i Pascal, którzy postulowali stosowanie metody aksjomatycznej we wszelkich dziedzinach wiedzy, ale w owym czasie skończyło się na postulatach.

Dopiero koniec wieku 19-go przyniósł imponujące wyniki, mianowicie aksjomatyzację rachunku logicznego (Gottlob Frege, 1879), geometrii w jej nowym zaawansowanym stanie, oraz arytmetyki. Tego ostatniego dokonał w roku 1889 Giuseppe Peano, stąd przyjęło się określenie *arytmetyka Peano*. Oryginalną wersję poddawano różnym modyfikacjom, zachowując jednak jej zasadniczy sens. Posłużymy się tu wersją uproszczoną do trzech następujących aksjomatów (jest to ta sama, którą posłużył się Gödel [1931)].

A1. $\forall_x \neg(0 = s(x))$, w skrócie $\forall_x(0 \neq s(x))$, tzn. zero nie jest następnikiem żadnej liczby.

A2. $\forall_x \forall_y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$, tzn. liczby mające równe następniki są równe.

A3. $(\Phi(0) \wedge \forall_x(\Phi(x) \Rightarrow \Phi(s(x)))) \Rightarrow \forall_x \Phi(x)$ – aksjomat indukcji, gdzie „Φ” reprezentuje dowolną cechę orzekaną o liczbach.

Aksjomat indukcji można wyrazić również w postaci reguły, co też uczynimy kierując się wygodą. W praktyce bowiem dowodzenia postać reguły, czyli przepisu postępowania, bywa poręczniejsza, bardziej oszczędzająca czas i wysiłek, niż postać twierdzenia.[4] Oto Reguła Indukcji.

$$\frac{\Phi(0),\ \forall_x(\Phi(x) \Rightarrow \Phi(s(x))}{\forall_x \Phi(x)}$$

Zobaczymy na przykładach, jak narzędzia te się sprawiają w akcji dowodzenia. Dowiedziemy dwóch twierdzeń arytmetycznych, którym jak najdalej do bycia rewelacyjnymi, ale za to tak prostych, że dowód nie powinien zmęczyć nawet najbardziej męczliwych. Pierwszy z dowodów ma potwierdzić tę oczywistość, że żadna liczba nie jest swym własnym następnikiem, a drugi tę, że jedność mniejsza jest od dwóch.

Na ewentualne pytanie, dlaczego zajmujemy się dowodzeniem takich oczywistości, jak ta znana już przedszkolakom, że $1 < 2$, odpowiedź znajduje się w strukturze teorii aksjomatycznej. Do wyników niebanalnych, dalekich od subiektywnej oczywistośći, dochodzimy w procesie dowodzenia krok po kroku, wychodząc od najprostszych, na których buduję się następne, coraz trudniejsze i ciekawsze.

Przykładem twierdzenia, którego nie odbieramy już jako oczywiste, a mającego kolosalne zastosowania może być tzw. podstawowe twierdzenie arytmetyki (z niego w sposób istotny korzysta sił w rozumowaniu Gödla). Jest to twierdzenie, że *każda złożona liczba naturalna ma dokładnie jeden rozkład na czynniki pierwsze.* Tutaj pzykłady dowodów czerpiemy nie z zaawansowanych partii arytmetyki, ale z najbardziej elementarnych. To wystarcza, żeby zilustrować algorytmiczny,

[3] Tym się tłumaczy propozycja, żeby zamiast szeroko przyjętego angielskiego terminu „incompleteness” używać, dla większej ścisłości, terminu „incompletability”, co po polsku trzeba by oddać przez „nieuzupełnialność”. Ale praktyczniej jest wprowadzić termin „niezupełność nieusuwalna” i umówić się, że pomijając dla skrócenia wypowiedzi przydawkę, domyślnie będziemy ją mieć na uwadze.

[4] To rozwiązanie praktyczne stosuję (z pewną modyfikacją) za Andrzeja Grzegorczyka *Zarysem arytmetyki teoretycznej*, PWN 1971.

czyli czysto formalny, charakter dowodzenia jako serii przekształceń, których się dokonuje wedle reguł uwzględniających tylko fizyczne (kształt i położenie) cechy symboli. Oto przykłady.

T1. $\forall_x(x \neq s(x))$, tzn. żadna liczba nie jest swoim następnikiem.

D o w ó d

1. $\forall_x(0 \neq s(x))$ .... A1 (przyjmujemy ten aksjomat za pierwszy wiersz dowodu).

2. $0 \neq s(0)$ .... 1, R.Op.$\forall$, z podstawieniem nazwy „0" za „x", w skrócie: $x/0$.

3. $\forall_x\forall_y(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$ .... A.2.

4. $\forall_x(s(x) = s(s(x)) \Rightarrow x = s(x))$ .... 3, R.Op.$\forall$, $y/s(x)$.

5. $\forall_x(x \neq s(x) \Rightarrow s(x) \neq s(s(x)))$ .... 4, R.Transpozycji, tj. $\frac{\forall_x(Ax \Rightarrow Bx)}{\forall_x(\neg Bx \Rightarrow \neg Ax)}$ (dowodliwa m.in. w Systemie Drzew Semantycznych).

6. $\forall_x(x \neq s(x))$ .... 2, 5, R.Indukcji, gdzie własność Φ polega na tym, że dana liczba nie jest swym następnikiem.

Słownie: Zero nie jest swym następnikiem (wiersz 2). Zarazem: jeśli jakakolwiek liczba nie jest swym następnikiem, to i jej następnik nie jest swym następnikiem (wiersz 5). A więc – w myśl Reguły Indukcji – żadna liczba nie jest swym następnikiem (wiersz 6), c.b.d.d.

T2. $1 \neq 2$, przy rozumieniu nazw „1" i „2" w myśl definicji: Df.I: $1 = s(0)$, Df.II: $2 = s(1)$.

D o w ó d A

1. $\forall_x(x \neq s(x))$ .... T1.

2. $1 \neq s(1)$ .... R.Op.$\forall$, $x/1$.

3. $1 \neq 2$ .... wiersz 2 i Df.II, zastąpienie „$s(1)$" przez „2".

D o w ó d B (bez użycia aksjomatu indukcji)

1. $\forall_x(0 \neq s(x))$ .... A1.

2. $0 \neq s(0)$ .... 1, R.Op.$\forall$, $x/0$.

3. $0 \neq 1$ .... 2, Df.I.

4. $\forall_x\forall_y(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$ .... A.2.

5. $\forall_x\forall_y(x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y))$ .... 4, R.Transpozycji.

6. $0 \neq 1 \Rightarrow s(0) \neq s(1)$ .... 5, R.Op.$\forall$, $x/0$, $y/1$.

7. $s(0) \neq s(1)$ ... 3, 6, R.Odr.

8. $1 \neq 2$ .... 7, Df.I, Df.II.

Pouczające jest porównanie dowodów A i B. Pierwszy jest znacznie krótszy dzięki powołaniu się na T1, do którego uzyskania zastosowano regułę indukcji. Ilustruje to ogólniejszą prawidłowość, że przy zastosowaniu mocniejszych środków dowodowych, jak wzmocnienie aksjomatyki lub zbioru reguł, pewne dowody stają się krótsze. Dodajmy, co wiadomo skądinąd, że pewne twierdzenia, których nie da się w ogóle dowieść przy danym zasobie środków dowodowych, stają się dowodliwe po wzbogaceniu tego zasobu. Ma to kolosalne znaczenie dla tego działu Sztucznej Inteligencji, jakim jest automatyczne dowodzenie twierdzeń programem zwanym *prover* oraz automatyczne sprawdzanie twierdzeń dowiedzionych przez człowieka czynione programem zwanym *checker*. Programy takie są tym efektywniejsze, im mocniejsze się zastosuje środki dowodowe w wykorzystywanej przez nie logice.

Nie zawsze takie wzmacnianie jest bezdyskusyjne. Niektóre środki dowodowe są niechętnie widziane lub wręcz odrzucane ze względu na pewne opory filozoficzne. Np. filozofia nominalistyczna skłania do unikania logik wyższych rzędów, tj. takich, w których dopuszczenie kwantyfikacji zmiennych reprezentujących zbiory angażuje ontologicznie w pogląd o istnieniu zbiorów, uchodzący wśród nominalistów za rodzaj metafizycznego przesądu.

Ta garść wiadomości o arytmetyce posłuży jako jeden z tropów prowadzących do sedna rozumowania Gödla. Skrzyżuje się on z jeszcze innym tropem, nie mniej doniosłym, o którym mowa w następnym odcinku.

3. Zdanie Gödlowskie jako element osobliwej klasy zdań samo-krytycznych

Na którymś z zamierzchłych etapów dziejów języka pojawił się zaimek zwrotny, który polszczyzna wyraża rdzeniem „sam” (był to też może moment narodzin świadomości, gdy w taki samozwrotny sposób umysł ludzki zaczął traktować siebie). Obiektem zwracającym się ku samemu sobie może być umysł ludzki, i wtedy jest miejsce na określenia: samoświadomość, samolubstwo, samouwielbienie, samokształcenie, samopoznanie, samokrytycyzm itp. Tu jednak będą nas interesowały inne obiekty zdolne do samozwrotności, mianowicie wypowiedzi językowe. Istnieje kategoria zdań orzekających coś o sobie, na tyle bogata, że wyróżnimy w niej trzy klasy, żeby skupić się ostatecznie na jednej z nich – tej, w której mieści się zdanie analizowane przez Gödla, słusznie na jego cześć nazwane gödlowskim. Rozróżnimy te klasy pod kątem stosunku do prawdziwości, oznaczając je kolejno literami A, B, C.

Klasa A jest tworzona za pomocą takich predykatów, że zdanie z danym predykatem w pewnych kontekstach jest prawdziwe, w innych fałszywe. Należą tu np. zdania następujące.

„Niniejsze zdanie jest wypowiedziane po polsku.” — prawdziwe.
„Niniejsze zdanie jest wypowiedziane po chińsku.” — fałszywe.
„Niniejsze zdanie składa się ze stu wyrazów.” — fałszywe.
„Niniejsze zdanie składa się z siedmiu wyrazów.” — prawdziwe.

Klasę A, choć nie o niej będzie dalej mowa, trzeba wspomnieć dla udokumentowania, że zjawisko samozwrotności samo w sobie nie jest czymś negatywnym. Mamy tu do czynienia z wypowiedziami, które są poprawne gramatycznie, zrozumiałe, sprawdzalne co do wartości logicznej i nie wikłające się w żadne sprzeczności. Trzeba tę poprawność mieć na uwadze, żeby nie przypisać całemu zbiorowi zdań samozwrotnych pewnego rysu patologicznego, który cechuje klasę B. Jej osławionym reprezentantem jest wypowiedź w rodzaju:

Zdanie umieszczone w tej ramce jest fałszywe.

Konstrukcja ta ma liczne wersje, wszystkie sygnalizujące ten sam problem. Można ją też ująć w sformułowaniu: „Niniejsze zdanie jest fałszywe”. Można ją zbogacić o pewną fabułę, jak to czynili starożytni, wśród których kursował stereotyp Kreteńczyka jako notorycznego kłamcy, tak iż uważano, że każdy Kreteńczyk w każdej sytuacji kłamie. Wtedy pojawiał się problem, jak ocenić co do prawdziwości wypowiedź Kretńczyka, który by powiedział „Ja teraz kłamię”. Jeśli mówiąc to kłamie, to prawdą jest że kłamie, a więc prawdą jest to, co mówi o sobie. A jeśli mówi prawdę, gdy powiada, że kłamie, to naprawdę kłamie, czyli czyni to, co sobie w tym zdaniu przypisuje; a skoro istotnie jest tak, jak mówi, to mówi on prawdę.

Nad tą łamigłówką wiele tęgich głów trudzi się od conajmniej dwóch i pół tysięcy lat. Rozmaite rozwiązania zapełniłyby pokaźny regał biblioteczny, co wystarcza, żeby się nimi nie zajmować w ograniczonych objętościowo ramach tych rozważań. Wspomnieć jednak klasę B należało, by zapobiec jej pomyleniu z klasą C, z pozoru podobną, a w gruncie rzeczy bardzo odmienną. Podczas gdy każde zdanie z klasy B okazuje się beznadziejnie fałszywe, skoro jego fakszywość wynika nawet z założenia, że mówi prawdę, to zdanie z klasy C jest, by tak rzec, beznadziejnie prawdziwe. Nie ma bowiem możliwości, żeby było fałszywe, skoro nawet z założenia jego fałszywości wynika, że musi być prawdą (natomiast, inaczej niż w przypadku B, z założenia jego prawdziwości fałszywość nie wynika).

Z czego się bierze tak osobliwa własność? Punktem wyjścia jest fakt, że istnieją pewne kryteria prawdziwości zdań (spostrzeżenie zmysłowe, oczywistość intelektualna etc.). Każde takie kryterium jest warunkiem wystarczającym prawdziwości, nie będąc jednak koniecznym. Niech będzie to kryterium, które oznaczymy umownie symbolem „K”. Pewne zdania je spełniają i to wystarczy, żeby przysługiwała im prawdziwość.

Bywa, że jakieś zdanie orzeka o sobie samym, że spełnia, lub że nie spełnia kryterium K. Może to przybrać formę wypowiedzi „Niniejsze zdanie nie spełnia kryterium K”. Dla dalszych rozważań dogodnie będzie zamiast posługiwać się terminem okazjonalnym „niniejsze” nadać zdaniu jakąś nazwę, powiedzmy α, i posłużyć się nią dla celów samoorzekania. Mamy więc:

$[\alpha]$ Zdanie α nie spełnia kryterium K.

Jaką wartość logiczną ma α, gdy przyjąć, że K jest warunkiem dostatecznym, a więc gwarantem, jego prawdziwości? Musi to być zdanie prawdziwe. Od tej konieczności nie ma ucieczki. Gdyby bowiem uznać, że jest to zdanie fałszywe, to prawdą byłoby jego zaprzeczenie, a więc to, że spełniałoby ono kryterium K. Ale spełnianie kryterium K pociąga z konieczności prawdziwość. A zatem, o ile α jest fałszywe, to jest prawdziwe. Takie wynikanie prawdziwości z założenia o fałszywości zapewnia, prawdziwość; obowiązuje wszak prawo logiki: $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Możemy rozpatrywać różne konkretyzacje powyższego schematu. Jeśliby za kryterium przyjąć Boże objawienie zapisane w księdze świętej, np. w Koranie, to wtedy musi być prawdziwe zdanie:

$[\beta]$ Zdanie β nie jest objawione.

Zastosujmy do tego przypadku podane wyżej rozumowanie. Gdyby β było fałszywe, prawdą byłaby jego negacja, a więc byłoby prawdą, że jest ono objawione. Zaś jako objawione musi być prawdziwe. Znów prawdziwość wynika z jej zaprzeczenia, a więc definitywnie się potwierdza. Możemy brać dowolne inne kryterium, np. oczywistość kartezjańską, nazwawszy zdanie, które ją posiada kartezjańskim. Wtedy musi być prawdą powiedzenie w rodzaju „Niniejsze zdanie nie jest kartezjańskie". Itd.

Żeby zamiast mało mówiącej etykiety „C" mieć do dyspozycji nazwę bardziej sugestywną, wypowiedzi z interesującej nas klasy określimy jako *zdania samo-krytyczne*. Ich przykłady to α, β etc. Otóż do takich zdań samo-krytycznych należy to występujące w rozumowaniu Gódla, które przyjęło się nazywać *zdaniem gödlowskim*. Mamy w nim na uwadze prawdę matematyczną, a dokładniej, prawdę w arytmetyce liczb naturalnych. Warunkiem wystarczającym prawdziwości jest to, żeby dane zdanie było dowodliwe z aksjomatów arytmetyki (omawianych wyżej jako formuły A1, A2 i A3). Cechę tę nazywamy krótko *dowodliwością*. Oczywiście, nasze kryterium funkcjonuje pod warunkiem, że akjomaty są prawdziwe; wszak wywodząc coś logicznie wg reguł logiki ze zdania fałszywego, nie mielibyśmy żadnej pewności, że otrzymamy prawdę (choć czasem można by ją otrzymać przez przypadek).

Warunek prawdziwości aksjomatyki jest równoważny warunkowi jej nieprzeczności. Sprzeczność bowiem implikuje fałszywość któregoś elementu w parze zdań sprzecznych. I odwrotnie, fałszywość implikuje sprzeczność, gdyż ze zdania fałszywego wynikają logicznie, a więc są dowodliwe, dowolne zdania, w tym pary zdań sprzecznych. Np. ze zdania 1=2 da się udowodnić sprzeczność, korzystając z aksjomatu A2 ($1 = 2 \Rightarrow 0 = 1$), co daje wniosek $0 = s(0)$, sprzeczny z aksjomatem A1.

Mamy już wszystkie dane, żeby sformułować zdanie gödlowskie w jego *wersji metalogicznej*. To znaczy takiej, w której zdanie to mówi coś **o** sobie (greckie „meta" znaczy „o"), mianowicie o tej cesze logicznej, jaką jest niedowodliwość. Ostatecznym przedmiotem rozumowania będzie wersja zdania gödlowskiego arytmetyczna, ale dla jej otrzymania konieczna jest w punkcie startu postać metalogiczna. Opatrzymy to zdanie etykietą „γ" i niech to będzie jego imię własne. Mamy więc:

[γ] *Dla zdania γ nie ma dowodu formalnego w arytmetyce liczb naturalnych.*

Najkrócej: γ jest niedowodliwe.

4. Od składni logicznej do arytmetyki przez odwzorowanie i kodowanie

4.1. Odwzorowanie naturalne. Prostym jego przykładem jest odbicie przedmiotów w lustrze. Odbija się w nim fragment świata fizycznego – powierzchnie znajdujących się przed lustrem przedmiotów. Jest to pewien system czyli układ (słów tych używa się zamiennie) fizyczny; nazwijmy go oryginałem. Odbicie oryginału też stanowi układ fizyczny, a między nimi zachodzi taki stosunek, że z opisu każdego z nich można dostać wiarogodny opis drugiego. Opis składa się ze zdań, a każdemu prawdziwemu zdaniu w jednym opisie jest jednoznacznie przyporządkowane zdanie prawdziwe w drugim; np. skradającego się napastnika potencjalna ofiara może dostrzec w lustrze i będzie to informacja tak samo wiarogodna jak spostrzeżenie w naturze. Owa wiarogodność to istotny dla dalszych rozważań rys stosunku odwzorowania. W przypadku lustra i innych układów fizycznych, jak ślad stopy czy fotografia, rys ten jest zagwarantowany przez odpowiednie prawa przyrodnicze.

Odwzorowanie może zachodzić także między systemami, na które składają się nie elementy fizyczne lecz obiekty abstrakcyjne. Sławnym historycznym przykładem jest stosunek między dziedziną geometrii i systemem liczb rzeczywistych. Zachodzi, mianowicie, wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie liczb i punktów w kartezjańskim układzie współrzędnych. Zwiemy go kartezjańskim, gdyż przełomowe dla matematyki odkrycie tego odwzorowania, znane pod nazwą geometrii analitycznej, jest dziełem Kartezjusza.[5] Inny sławny przykład to wzajemne odwzorowanie systemu opisywanego przez rachunek zdań (Z) i systemu opisywanego przez rachunek zbiorów czyli klas (K). Prawdę logiczną (tautologiczność) oraz fałsz logiczny (sprzeczność) systemu Z odwzorowują w systemie K, odpowiednio, klasa uniwersalna i klasa pusta. Negacji zdania odpowiada dopełnienie klasy, koniunkcji zdań iloczyn klas, alternatywie suma klas itd.

Np. twierdzeniu „$p \vee \neg p$ *jest prawdą logiczną*” odpowiada twierdzenie, że klasa wraz ze swym dopełnieniem tworzy klasę uniwersalną: $X \cup -X = \bigvee$.

Twierdzeniu „$p \wedge \neg p$ *jest fałszem logicznym*” odpowiada twierdzenie, że klasa wraz ze swym dopełnieniem tworzy klasę pustą: $X \cup -X = \emptyset$.

Każde ze zdań w takiej parze odpowiedników jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdą jest drugie. Jak ilustrują powyższe przykłady, dotyczy to zarówno systemów fizycznych, jak i systemów tworzonych przez obiekty abstrakcyjne (liczby, klasy itp.). Jedne i drugie należą do natury jako sfery, która nie jest dziełem człowieka, a którą odróżniamy od sfery kultury. Nazwiemy więc odwzorowania z dziedziny natury mianem *naturalnych*, a inne, o których mowa niżej, należące do kultury, mianem konwencjonalnych.

4.2. Odwzorowanie konwencjonalne przez kodowanie. Bywa, że w stosunku odwzorowania jeden człon należy do natury (fizycznej lub abstrakcyjnej), a drugi jest wytworem człowieka, stanowiąc system ustanowionych przezeń konwencjonalnie (umownie) znaków. Wtedy mamy do czynienia z *odwzorowaniem konwencjonalnym.* Taki system znaków jest rodzajem szeroko pojętego kodu.

Z kodem w sensie ścisłym, czyli szyfrem, mamy do czynienia wtedy, gdy występują nie dwa systemy lecz jeden, opisywany za pomocą dwóch języków, z których jeden jest zastany, a drugi umyślnie wytworzony w celu przekładania nań wyrażeń tego pierwszego. Przekład, zwany kodowaniem lub szyfrowaniem, dokonuje się za pomocą umyślnie utworzonego zbioru reguł, tzw. klucza kodowego. Zwykle ma to na celu utajnianie informacji, żeby nie miał do niej dostępu nikt, kto znając język zastany, nie zna szyfrującego go klucza, który służy także do deszyfrowania.

Szersze pojęcie kodu otrzymujemy wtedy, gdy nazwiemy tym terminem konwencjonalny system znaków, jak ten tworzący np. mapę, mający odwzorowywać pewien system naturalny. Na miano kodu zasługuje taki system znakowy z tej racji, że podobnie jak w przypadku szyfru jest on wytworzony umownie do określonego celu. Stanowi on jednak, inaczej niż szyfr, osobną dziedzinę dającą się porównywać z kodowaną przezeń dziedziną naturalną.

Prostego przykładu odwzorowania konwencjonalnego dostarcza kod znaków drogowych. System znaków jest przyporządkowany pewnemu fragmentowi rzeczywistości naturalnej, na który składają się takie obiekty, jak zakręty, przeszkody, miejsca postoju, wielkości mogące cechować prędkość pojazdu itd. Morał, jaki trzeba nam wyciągnąć z tego przykładu jest tylko jeden, ale bardzo dla dalszego rozumowania ważny. Mianowicie, gdy mamy dwa zdania, z których jedno opisuje pewien element naturalny, a drugie przyporządkowany mu element konwencjonalny, pierwsze jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe drugie. Mogą to być np. zdania „tu jest zakręt” i „tu umieszczony jest znak o takim a takim kształcie” (trzeba ów kształt jakoś opisać); oczywiście, przykład ten dotyczy oznakowania bezbłędnego, gdy każdy zakręt opatrzony jest znakiem i nie ma go nigdzie, gdzie nie ma zakrętu.

Wzmocnijmy jeszcze nasz morał przykładem z mapą. Składa się ona ze zróżnicowanych pól traktowanych jako znaki przyporządkowanych im elementów terenu: większe kółka przyporządkowane większym miastom, mniejsze mniejszym; kreski niebieskie rzekom, czarne drogom; różnym wzniesieniom – znaki zwane poziomicami itd. Mapa jest wiarogodnym narzędziem orientacji w terenie dzięki temu, że każdemu zdaniu prawdziwemu w opisie mapy odpowiada (w idealnym

[5] Towarzyszy temu anegdota opowiedziana przez samego Kartezjusza, że stało się to w wyniku Bożego natchnienia, które go nawiedziło wieczorem przy kominku na kwaterze w Ulm, gdzie miał postój jako żołnierz najemny w wojnie trzydziestoletniej.

przypadku) dokładnie jedno zdanie prawdziwe w opisie terenu. Na przykład, jeśli według klucza kodowego 1cm. oznacza 10km., to zdaniu „kółko oznaczające miasto A dzieli 5cm. od kółka oznaczającego miasto B” odpowiada zdanie „od miasta A do miasta B jest 50 km”. Każde z nich jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdą jest drugie. Tego rodzaju równoważność między zdaniami, które opisują przyporządkowane sobie wzajem elementy obu systemów, odegra decydującą rolę w rozumowaniu gödlowskim.

4.3. Gödel: odwzorowanie naturalne przy pomocy kodowania. Celem rozumowania, do którego szykujemy niezbędne instrumentarium, jest wykazanie, że istnieją w arytmetyce *zdania niezależne* czyli takie, że ani dane zdanie ani jego negacja nie da się formalnie dowieść na podstawie aksjomatów. Jako punkt wyjścia posłuży kończące wyżej odcinek 3 sformułowanie:

[γ] *Dla zdania γ nie ma dowodu formalnego w arytmetyce liczb naturalnych.*

Należy ono do opisu systemu logiki; jest więc wypowiedzią metalogiczną, a rozważany opis nazywamy *składnią logiczną*.[6] Wyobraźmy sobie, że zdanie γ zostało zakodowane w języku arytmetyki. Staje się wtedy formułą arytmetyczną stwierdzającą zachodzenie pewnego stosunku między liczbami; jest ona niewątpliwie prawdziwa, skoro jest równoznaczna (na mocy klucza kodowego) zdaniu γ, którego prawdziwość została wykazana (por. odc. 3). A jeśli zdanie arytmetyczne jest równoznaczne (na zasadzie przekładu kodowego) z prawdziwym zdaniem metalogicznym stwierdzającym własną niedowodliwość, to i zdanie arytmetyczne musi być niedowodliwe.

Konieczny więc będzie klucz kodowy, który umożliwi przekład zdania metalogicznego γ na zdanie arytmetyczne. W tym drugim nie może się pojawić słowo w rodzaju „niniejsze”, obce językowi arytmetyki. Wyjście z tej trudności polega na tym, że dzięki pewnej pomysłowej konstrukcji przyporządkuje się zdaniu arytmetycznemu jako jego numer tę samą liczbę, powiedzmy N, o której to zdanie coś orzeka. Żeby uprzytomnić punkt docelowy naszego rozumowania, przedstawmy sobie schematycznie, jaki będzie kształt formuły arytmetycznej mówiącej o własnej niedowodliwości. Ma ona stwierdzić, co następuje: nie istnieje ciąg formuł, który byłby dowodem zdania mającego numer N.

Ciągom formuł także przyporządkowuje się numery kodowe. To więc, że nie istnieje ciąg będący dowodem zdania N znaczy, że nie istnieje liczba, która byłaby numerem takiego ciągu.

Różne wyrazy z powyższego zdania metalogicznego dadzą się zapisać w języku arytmetyki. Słowom logicznym „nie” ($\neg$) i „istnieje” ($\exists$) oraz zmiennej „x” nasz klucz kodowy przyporządkuje pewne liczby. Także dla zwrotu metalogicznego, „jest dowodem” znajduje się sposób zakodowania liczbowego, przez co otrzymamy symbol pewnej relacji arytmetycznej[7] Oznaczmy ją symbolem „A_D” (Arytmetyczny odpowiednik Dowodliwości), a będziemy w stanie zapisać schematycznie zdanie arytmetyczne o własnej niedowodliwości – gdy już uda się skonstruować je tak zmyślnie, żeby liczba stanowiąca jego numer kodowy N była tą samą liczbą, o której zdanie to mówi jako o numerze formuły niedowodliwej. A tymczasem bierzemy pod uwagę następujący zapis.

[*] $\neg\exists_x(A_D(x, N))$, gdzie N jest numerem formuły oznaczonej gwiazdką.

To znaczy: zdanie, którego numerem jest liczba N mówi coś o liczbie N, a więc o sobie samym. Mówi zaś to, że nie ma liczby, która byłaby numerem jego dowodu; a skoro nie ma takiego numeru, nie ma i dowodu.

Odwzorowanie składni logicznej w arytmetyce jest stosunkiem zachodzącym między dwoma już istniejącymi systemami, jak to ma miejsce w odwzorowaniach naturalnych. Nie powstaje ono, jak w przypadku mapy dopiero w wyniku stworzenia konwencjonalnego systemu znaków kodujących opis właściwości terenu. Mogłoby się więc wydawać, że nie jest potrzebny klucz kodowy, wystarczy tylko odkryć i opisać istniejące obiektywnie odwzorowania, tak jak Kartezjusz odkrył sieć relacji między punktami i liczbami rzeczywistymi. Sytuacja jednak nie jest w tym przypadku ani dokładnie taka, jak przy odwzorowaniach naturalnych, wyżej przytaczanych, ani taka jak przy tworzeniu odwzorowań konwencjonalnych.

Aby odwzorować składnię logiczną w arytmetyce, wykorzystuje się tylko część arytmetyki. Mianowicie, przyporządkowujemy symbolom logicznym takie lub inne wybrane liczby naturalne (np. z pewną preferencją, jak zobaczymy, dla liczb pierwszych). Nie są to liczby zupełnie dowolne, lecz tak umiejętnie dobrane, żeby udało się stworzyć arytmetyczny odpowiednik stosunku dowodliwości, oraz skonstruować formułę orzekającą ten stosunek arytmetyczny o liczbie będącej tejże formuły nazwą w postaci numeru. O takim pomysłowym kluczu kodowym mówi następny odcinek.

5. Klucz kodowy do arytmetyzacji składni logicznej

Odcinek ten należy prowizorycznie zastąpić tekstem dostarczonym jako wydruk z książki: E. Nagel i J. K.Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN 1966 (wyd. oryginalne *Gödel's Proof*, 1952). W Tablicy 2 symbol „$\sim$” należy (ze względu na sformułowania podawanych potem przykładów) zastąpić przez „$\neg$”, zaś „$\supset$” przez „$\Rightarrow$”.

[6] Uważny czytelnik może dostrzec, zapoznając się z gödlowskim kluczem kodowym, że są w nim dwa symbole nie należące do takiej logiki, jaką poznał ze współczesnych podręczników, mianowicie symbole zera i następnika. Jak już wspomniano (przypis 2), takie pojmowanie języka logiki, że obejmowało ono symbole teoriomnogościowe i arytmetyczne, było przyjęte w czasach Gödla. Choć dziś dominuje w tej materii inna tendencja, nie będzie szkody, gdy dla uproszczenia opisu będziemy nadal zaliczać symbole „0” i „s” do składni logicznej.

[7] Gödel zdefiniował taką relację arytmetyczną, ale prowadzące do tego postępowanie jest jest zbyt skomplikowana, żeby zdawać zeń sprawę na tym miejscu.

6. Konstruowanie zdania G[ödlowskiego] – poczynając od wpisania numeru pewnej formuły w nią samą

6.1. Jak sprawić, żeby zdanie metalogiczne γ stwierdzające prawdziwie własną niedowodliwość w arytmetyce (przy założeniu jej niesprzeczności) dało się wyrazić w języku arytmetyki? Jeśli się to uda, mieć będziemy zdanie arytmetyczne – nazwiemy je G – które na mocy zakodowania jest równoważne prawdziwemu zdaniu metalogicznemu o własnej niedowodliwości. Skoro równoważne prawdziwemu, to prawdziwe. Tak znajdziemy niedowodliwą formalnie w arytmetyce prawdę arytmetyczną.

Recepta na sukces tego zamierzenia jest następująca. Za punkt wyjścia naszej operacji bierzemy zdanie ND$_{A1}$ (niżej). A_D (jak już wspomniano) jest to relacja będąca arytmetycznym odpowiednikiem relacji bycia dowodem, zachodząca między liczbami, z których jedna jest numerem dowodu, a druga numerem formuły dowodzonej. Oto schemat Arytmetycznego odpowiednika zdania mówiącego o NieDowodliwości jakiegoś zdania (jego szczególnym przypadkiem będzie dalej rozważane zdanie o własnej niedowodliwości).

[ND$_{A1}$] $\neg\exists_x(A_D(x,z))$.

Trzeba teraz znaleźć taką liczbę, która – po podstawieniu za zmienną z i obliczeniu numeru formuły powstałej z tego podstawienia – okaże się być jej numerem.

6.2. Sposób znajdowania numeru pewnej formuły, powstającej w wyniku wpisania w inną formułę jej własnego numeru, niech zilustruje następujący przykład (umowna nazwa formuły jest podana na początku wiersza, a jej numer na końcu). Rozważmy zdanie:

Z1. $\exists_x(x = sy)$ .... nr k.

Za zmienną nr 13 (tj. y) podstawmy w tym zdaniu jego numer k. Zapisu tego dokonamy za pomocą symboli pierwotnych „0" i „s", nie dysponujemy bowiem w naszym kodzie symbolami cyfrowymi dla liczb większych niż 0. Otrzymujemy, co następuje.

Z2. $\exists_x(x = s(sk)$ .... nr n,

gdzie liczbę k oddamy przez „$s...s(0)$", tj. przez k wystąpień symbolu „s" poprzedzających „0". Formuła Z2, przy tej nowej (w stosunku do Z1) strukturze, będzie mieć numer, który oznaczyliśmy jako n.

Oczywiście, $n \neq k$. Liczba n jest jednoznacznie zdeterminowana przez następującą różnicę zachodzącą między Z1 i Z2. Obliczając numer zdania Z2, zamiast pewnej liczby pierwszej w Z1 podniesionej do potęgi 13 wpisujemy iloczyn, którego czynniki stanowi k liczb pierwszych podniesionych do potęgi 7 (numer następnika) oraz kolejna po nich liczba pierwsza do potęgi 6 (numer zera). Różnica ta, jak widać, jest zależna od trzech wielkości: A) numer formuły, w której dokonano podstawienia (Z1 mająca numer k); B) numer zmiennej, za którą coś podstawiono (13); C) liczba, której nazwę podstawiono za zmienną. W naszym przypadku wielkości wymienione w A i C są identyczne. Opis jednak owej operacji wymaga wymienienia ich obu, żeby uwzględnić przypadek ogólny, gdy za zmienną numer 13 podstawia się cyfrę różną od numeru danej formuły. Tak więc, w ogólnym przypadku omawiana operacja opisana jest pewną funkcją, którą oznaczymy jako π (dla skojarzenia z literą „p" w słowie „podstawianie" odnoszącym się do rozważanej operacji).

$$t = \pi(u, 13, w),$$

gdzie t jest numerem formuły otrzymanej po podstawieniu w formule numer u za zmienną numer 13 cyfry oznaczającej liczbę w.[8] Stosując ten schemat do naszego przypadku, mamy:

$$n = \pi(k, 13, k).$$

Tak więc wyrażenie „$\pi(k, 13, k)$" nadaje się, na równi z „n" (jako równoznaczne) na numer rozważanej formuły. Jego struktura jest tym, co niebawem umożliwi nam uzyskanie zdania G. Trzeba w tym celu dokonać jeszcze jednej modyfikacji, mianowicie abstrahować od konkretnej liczby k, uzyskując wyrażenie schematyczne, gdzie zamiast cyfry „k" wystąpi jakaś zmienna, powiedzmy „v". Mamy wówczas:

$$\pi(v, 13, v).$$

Wyrażenie to, podsumujmy, jest określeniem numeru formuły powstałej z *jakiejś* formuły numerowanej liczbą v przez podstawienie za zmienną numer 13 cyfry oznaczającej liczbę v.[9]

[8] Nie jest to jeszcze zapis w pełni ogólny, bo zachowujemy w nim konkretną liczbę 13 jako numer zmiennej. Ostatecznym krokiem w kierunku uogólnienia byłoby zastąpienie cyfry „13" jakimś symbolem zmiennym. Nie czynimy tego, bo nie jest to w obecnym rozumowaniu konieczne, a daje pewne uproszczenie.

[9] Słowo „jakiejś" ma przypominać, że nie jest to konkretny numer znanej nam formuły, ale dowolna liczba numerująca formułę, z której uzyskałoby się inną formułe, a więc i inny numer, przez tego typu podstawienie. Oddajemy to symbolicznie przez użycie zmiennej, tutaj „v", zamiast nazwy konkretnej liczby.

6.3 Docieramy do szczytu tej może żmudnej wspinaczki na wyżyny odkrycia Gödla. Trzeba nam teraz uszczegółowić zdanie ND_{A1} (z punktu 6.1) przez wstawienie za zmienną „z" nazwy formuły – dowolnej, z tym jednak ograniczeniem, że chodzi o formułę powstałą z jakiejś innej przez podstawienie w tej innej jej wlasnego numeru za zmienną numer 13. W ten sposób otrzymujemy zdanie posiadające odpowiedni numer; nie musimy się trudzić jego obliczaniem, wystarczy że tę konkretną liczbę umownie oznaczymy literą δ.

$[ND_{A2}]$ $\neg\exists_x(A_D(x, \pi(v, 13, v)))$ .... nr δ.

Ostatnie posunięcie polega na zastosowaniu raz jeszcze operacji π, tym razem do drugiego argumentu predykatu „A_D". Ponieważ zdanie opatrzone etykietą ND_{A2} ma numer δ, należy w nim za zmienną numer 13 podstawić liczbę δ. W ten sposób mamy obliczony (choć tylko w taki sposób schematyczny) numer zdania, które będzie rezultatem owego przekształcenia. Będzie to, oczywiście (por. punkt 6.2) numer $\pi(\delta, 13, \delta)$. Zdanie zaś uzyskane z ND_{A2} po dokonanym podstawieniu ma następującą postać i numer:

[G] $\neg\exists_x(A_D(x, \pi(\delta, 13, \delta)))$ .... nr $\pi(\delta, 13, \delta)$.

Porównajmy numer zdania G z jego treścią. Zdanie numer $\pi(\delta, 13, \delta)$ powiada, że nie istnieje taka liczba, która byłaby numerem dowodu zdania numer $\pi(\delta, 13, \delta)$. Czyli, zdanie arytmetyczne, którego struktura sprawia, że ma ono ów numer, nie jest zdaniem posiadającym dowód (pełniej: dowód formalny z aksjomatów arytmetyki, przy założeniu ich niesprzeczności).

Opisana procedura stanowi przepis na obliczenie owego numeru. To znaczy (powtórzmy, nieco szerzej) takiej liczby, żeby była ona numerem zdania przypisującego tejże liczbie własność arytmetyczną będącą (na mocy klucza kodowego) odpowiednikiem metalogicznej cechy niedowodliwości. Tę zaś rozumie się jako niepokonalny brak formalnego (można też rzec – algorytmicznego) dowodu z aksjomatów arytmetyki liczb naturalnych, przy założeniu niesprzeczności tej arytmetyki.

Niepokonalność owa na tym polega, że jeśliby uzupełnić aksjomatyką tak, żeby zdanie dotąd niedowodliwe dało się teraz dowieść, to w nowej utworzonej w ten sposób teorii aksjomatycznej pojawią się nowe zdania niedowodliwe, i tak bez końca. Całe bowiem podane wyżej rozumowanie da się powtórzyć w odniesieniu do każdej, zbogacanej w kolejnych krokach, aksjomatyki.

Pozostaje na koniec – pod kątem problematyki sztucznej inteligencji – zinterpretować komentarz Turinga, który występuje w bliskim kontekście jego wypowiedzi zacytowanej na samym początku tego wykładu. Turing, krytykując argumenty przeciwne jego poglądowi o możliwości zbudowania inteligentnej maszyny, gdy dochodzi do argumentu matematycznego – jak nazywa wynik Gödla i swój własny z roku 1936 – zmienia taktykę. Nie próbuje tego argumentu obalić, a jedynie bagatelizuje. Powiada, że choć mamy podstawy do stwierdzenia wyższości ludzkiego umysłu nad maszyną, tej właśnie, że umysł potrafi wykazać niemożność dowiedzenia czegoś przez maszynę (czego maszyna o sobie nie wykaże), to nie należy do tego faktu przywiązywać dużej wagi.[10]

Co Turing miał na myśli? Czy może to, że dystans, o którym mowa zostanie kiedyś pokonany przez postęp w konstrukcji maszyn? Jeśli tak, to trzeba by określić, na czym ten dystans polega i na ile jest usuwalny. Jeśli istotne jest dlań to, powiedzmy, że system nerwowy ma możliwości obliczeniowe nieosiągalne dla urządzenia elektronicznego (tak przypuszczał, wbrew Turingowi, John von Neumann), to do dyskusji trzeba będzie wciągnąć m.in. neurobiologię. Są jeszcze inne wysoce interesujące warianty rozważań, na tyle jednak rozległe, że wymagałyby osobnego wykładu.

Nota bibliograficzna

Najniezbędniejsze odniesienia do literatury zawarte są w przypisach do niniejszego tekstu. Osobno, dla zwrócenia uwagi na szczególną ważność, wymieniam niżej: (1) publikację Gödla zawierającą omawiane tu twierdzenie i jego uzasadnienie; (2) artykuł Turinga, w którym zdefiniował on uniwersalną maszynę do obliczeń, nazwaną potem jego imieniem, stanowiącą abstrakcyjny model komputera cyfrowego, oraz udowodnił istnienie problemów obliczeniowych nierozwiązywalnych dla tej maszyny.

1. Gödel, Kurt, „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme – I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, ss. 173-198, 1931.

2. Turing, Alan, „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proc. of the London Math. Society,* Series 2, 42, ss. 230-265, 1936.

[10] „This feeling of superiority is not illusory. [W tym zdaniu zmieniono szyk, czerpiąc uzupełnienie z kontekstu.] It is no doubt genuine, but I do not think too much importance should be attached to it."