Komentarz 2 do sprawdzianu z logiki (grudzień 2003)

Zadanie 4 (z rozwiązaniami w komentarzu 1) zostało przez wiele osób wykonane poprawnie, według wzorca podanego wcześniej na wykładzie. To powód do gratulacji i punkt wyjścia do następnego kroku w nabywaniu mistrzostwa w logice.

Wykonawcy zadania 4 stosowali niejako odruchowo, przez naśladowanie podanego na wykładzie wzorca, procedurę **ORF**, to jest, algorytm O-dwzorowania schematu R-ozumowania w F-ormule logicznej. a więc formule podatnej na badanie tautologiczności. O formule będącej wynikiem takiego odwzorowania, powiemy, że **reprezentuje** ona dane rozumowanie. Słowa „rozumowanie” i „wnioskowanie” są tu używane zamiennie.

Pora na świadome przyswojenie sobie tego algorytmu, wprowadzającego nas w sam rdzeń logiki. Kto opanuje **ORF**, ten będzie umiał rozpoznawać niezawodnie rozumowania logicznie poprawne, a także demaskować niepoprawne, co jest niemałym atutem w dyskusjach i negocjacjach.

W **ORF** występują terminy „przesłanka” i wniosek”. Bierzemy je w sensie znanym z języka potocznego. Mianowicie, **przesłanki** są to zdania, które uznajemy za prawdziwe (np. na podstawie doświadczenia), a czynimy to w celu uzyskania nowej informacji, którą nazywamy **wnioskiem**. Prawdziwość wniosku uznaje się na podstawie prawdziwości przesłanek poddanych „obróbce” według odpowiedniego prawa logiki. Oto sterujący tym procesem ciąg instrukcji — algorytm **ORF**.

1. Wykryj w danym rozumowaniu jego logiczny schemat wnioskowania, czyniąc, co następuje.

1.1. Zdania proste zastąp literami (np. p, q etc.) w roli zmiennych zdaniowych, te same co do kształtu zdania zastępując takimi samymi co do kształtu literami.

1.2. Z liter utwórz formuły, zastępując terminy logiczne z danego języka (tu – polskiego) odpowiednimi symbolami logicznymi, mianowicie:
„nie jest prawdą, że” (lub wyrażenie równoznaczne, np. „nie”) przez „$\neg$”;
„i” (lub wyrażenie równoznaczne, np. „oraz”) przez „ $\wedge$ ”;
„lub” (lub wyrażenie równoznaczne, np. „bądź”) przez „$\vee$”;
„jeśli ... to” (lub wyrażenie równoznaczne, np. „o ile”) przez „$\Rightarrow$”;
„wtedy i tylko wtedy, gdy” (lub wyrażenie równoznaczne, np. „czyli”) przez „ $\Leftrightarrow$ ”.

1.3. Ustaw tak uzyskane formuły w ciąg **SW**, to jest, S-chemat W-nioskowania, w sposób następujący: formuły odpowiadające przesłankom oddziel przecinkami, odpowiednik zaś wniosku oddziel od nich symbolem wnioskowania „$\vdash$” (odpowiednik słówka „więc”). I tak, jeśli przesłankom odpowiadają formuły φ i ψ, a wnioskowi formuła χ, to uzyskany ciąg **SW** ma postać:

$$\varphi,\ \psi \vdash \chi$$

2. Ciąg **SW** przekształć w formułę rachunku zdań, mianowicie każdy przecinek zastęp symbolem koniunkcji, a znak „$\vdash$” symbolem implikacji.

Tak powstanie np. formuła:

$$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi.$$

To jest właśnie to, co uczynili z każdym z rozumowań w zadaniu 4 uczestnicy sprawdzianu. W ten sposób uzyskali z badanego wnioskowania wyrażenie formułę logiczną reprezentującą pewne wnioskowanie. Np. jedno z wnioskowań w zadaniu 4 po przetworzeniu według algorytmu **ORF** reprezentowane jest przez formułę (którą nazwiemy tu) F.1. Oto ona.

[F.1] $((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p.$

Sprawdzając tę formułę algorytmem zerojedynkowym, dowiadujemy się, że jest ona prawem rachunku zdań, czyli tautologią tego rachunku.

Dlaczego jest nam potrzebna ta wiadomość? Dlatego, że z tautologiczności formuły wnosimy, jak w przypadku F.1, że reprezentowane przez nią rozumowanie jest poprawne. Poprawne, to znaczy takie, że jego schemat gwaramtuje niezawodność. Mówiąc o **niezawodności schematu wnioskowania** mamy na myśli to, że zawsze wtedy, gdy *wnioskowanie jest reprezentowane przez uzyskaną z tego schematu tautologię, a jego przesłanki są prawdziwe, to również wniosek musi być prawdziwy.*

Dlaczego reprezentacja wnioskowania przez tautologię, przy jednoczesnej prawdziwości przesłanek, zapewnia prawdziwość wniosku? Pomyślmy! Tautologia rachunku zdań, czyli prawo tej logiki, jest formułą przechodzącą w zdanie prawdziwe przy dowolnym podstawieniu konkretnych zdań za zmienne zdaniowe. Przechodzi więc w zdanie prawdziwe także przy podstawieniu zdań składających się na dane wnioskowanie.

Myślmy dalej: nasze prawdziwe zdanie, którego prawda jest niepodważalna dzięki wywodzeniu się z tautologii, ma formę implikacji. Co z tego? Zważmy, iż poprzednik tej prawdziwej implikacji jest koniunkcją przesłanek naszego wnioskowania, następnik zaś pokrywa się z wnioskiem. A zatem, gdy wszystkie przesłanki wnioskowania są prawdziwe, to rozważana implikacj ma prawdziwy poprzednik. Nie może zaś być tak (co byłoby wbrew istocie implikacji), żeby prawdziwa implikacja z prawdziwym poprzednikiem miała fałszywy następnik. A zatem jej następnik musi być prawdziwy, a że jest on identyczny z wnioskiem rozumowania, wniosek ten jest niezawodnie prawdziwy.

Pomyślmy jeszcze, co sądzić o sytuacji, gdy formuła reprezentująca tekst uważany przez kogoś za wnioskowanie okazuje się nie być tautologią. Tak jest w przypadku pewnych rozumowań z zadania 4, np. tego reprezentowanego przez formułę:

[F.2] $((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge (q \wedge r)) \Rightarrow p.$

Nie mamy, oczywiście, podstaw uważać, że wniosek nie będzie nigdy prawdziwy; może się zdarzyć przy pewnych podstawieniach w F.2, że będą prawdziwe zarówno przesłanki jak i wniosek. Istotne jest jednak to, iż nie ma powodu, żeby tak było zawsze, czyli przy każdym podstawieniu. Bo skoro nie jest to formuła zawsze prawdziwa, to znajdą się podstawienia, przy których prawdziwy poprzednik (reprezentujący przesłanki) będzie współistniał – jak to jest w fałszywej implikacji – z fałszywym następnikiem (reprezentującym wniosek). A zatem, w schemacie wnioskowania reprezentowanego przez formułę nie-tautologiczną, prawdziwość przesłanek nie gwarantuje prawdziwości wniosku, czyli nie jest to sposób wnioskowania, który by się zalecał niezawodnością.