Materiały pomocnicze do egzaminu z logiki

1. Informacja o treści pytań

Egzamin jest ustny. Obejmuje następujące tematy.

A) Analiza poprawności syntaktycznej na przykładzie podanego zdania.

B) Zapis podanego wnioskowania (z zestawów Z1-Z3) w języku rachunku zdań oraz sprawdzenie, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek wykonane skróconym algorytmem zerojedynkowym.

C) Zapis podanego wnioskowania (z zestawów Z4-Z5) w języku rachunku predykatów.

> Uwaga. Ponieważ zapisy te są trudniejsze niż w poprzednim temacie, odcinek 2 (niżej) obecnych Materiałów podaje poprawne odpowiedzi wraz z odpowiednimi wyjaśnieniami. Zanim się z nich skorzysta, należy próbę zapisu wykonać samodzielnie i dopiero potem zajrzeć do odpowiedzi. Uczenie się na pamięć bez prób samodzielnego rozwiązania nie dałoby należytego wyniku.
>
> Wykazanie, że zachodzi wynikanie logiczne jest podane tylko w zestawie 4 i tylko w sposób intuicyjny (potrzebne do tego reguły nie były, z braku czasu, uwzględnione w wykładzie). Ta część tematu C jest przeznaczona tylko dla tych, którzy z innych odpowiedzi uzyskają ocenę b.dobrą i zgłoszą chęć ubiegania się o celującą (5.5).

D) Zastosowania logiki predykatów do uściślania języka nauk społecznych. W tym punkcie są do wyboru dla zdającego dwa warianty:

D.1) Zastosowanie do zapisu definicji różnych rodzajów relacji pod kątem charakterystyki stosunku preferencji.

D.2) Zastosowanie do formułowania kontrprzykładów. W odpowiedzi mogą być przytoczone egzemplifikacje z odcinka 3 tych Materiałów lub podane własne (jeśli trafne, to punktowane wyżej niż przytoczenie egzemplifikacji z odcinka 3).

2. Odpowiedzi na zadania z zestawów 4 i 5

Jako uniwersum czyli dziedzinę rozważań przyjmujemy zbiór istot rozumnych. Litera „W” jest skrótem predykatu „jest wszechmocny”, zaś indywiduum, którego dotyczy podmiot zdania 4 oznaczymy skrótowo literą „a”.

Z4: $\neg\forall_z W(x)$	**Nie (jest tak, że) każdy jest wszechmocny.**
1. $\exists_x \neg W(x)$	Ktoś nie jest wszechmocny.
2. $\forall_x \neg W(x)$	Nikt (nie) jest wszechmocny.
3. $\exists_x W(x)$	Ktoś jest wszechmocny.
4. $\neg W(a)$	Obecny premier Polski nie jest wszechmocny.

Z Z4 wynika logicznie 1, To twierdzenie o wynikaniu, jako pierwsze z twierdzeń obecnie rozważanych, oznaczymy etykietą T.1. Oto jego zapis.[1]

[1] W T.1 umyślnie zmieniono kształt litery predykatowej i zmiennej indywiduowej, żeby uprzytomnić, że dobór symboli jest obojętny dla wyniku rozumowania. Jeśli bowiem formuła jest prawem logiki (tautologią), to jest spełniona dla wszelkich symboli przy wszelkich ich interpretacjach. W rozumowaniu, które dalej następuje, Q będzie się, przykładowo, interpretować jako predykat „jest Chińczykiem”).

Zdanie do dowiedzenia.

T.1: *Implikacja* $\neg\forall_z Q(z) \Rightarrow \exists_x \neg Q(z)$ *jest prawem logiki predykatów.*

Przypomnijmy: powiedzenie, że jakaś implikacja jest prawem logiki, mówi dokładnie to samo, co powiedzenie, że jej następnik wynika logicznie z poprzednika.

Dowód zdania T.1 przeprowadzimy metodą nie wprost, to znaczy wykazując, że jego zaprzeczenie prowadzi do sprzeczności. To zaprzeczenie, zwane **założeniem dowodu nie wprost**, oznaczymy tutaj jako neg(T.1). Oto jego zapis.

Założenie dowodu nie wprost.

neg(T.1): *Implikacja* $\neg\forall_z Q(z) \Rightarrow \exists_z \neg Q(z)$ *NIE jest prawem logiki predykatów.*

Żeby dobrze uchwycić sens naszego dowodu nie wprost, trzeba pamiętać, co znaczy, że jakaś formuła nie jest prawem logiki. To znaczy, że istnieją takie interpretacje występujących w niej symboli predykatowych i takie dziedziny obiektów reprezentowanych przez zmienne indywiduowe, przy których dana formuła staje się zdaniem fałszywym. I tak, formuła

$\exists_y S(y) \Rightarrow \forall_y S(y)$

nie jest prawem logiki, bo da się wskazać taką dziedzinę, np. zbiór ciał niebieskich, i taki predykat, np. „jest gwiazdą", przy których poprzednik jest zdaniem prawdziwym (istnieją ciała będące gwiazdami). a następnik fałszywym (nie jest prawdą, że wszystkie ciała są gwiazdami). Taka interpretacja formuły jest jej **interpretacją falsyfikującą**. Myśl, że jakaś formuła nie jest prawem logiki możemy teraz wyrazić krótko: formuła ta ma jakąś interpretację falsyfikującą. Jeśli natomiast przypuszczenie o istnieniu takiej interpretacji dla danej formuły prowadzi do sprzeczności, świadczy to, że jest to formuła tautologiczna (prawo logiki).

Ze zdania neg(T.1) płynie następujący wniosek: istnieje interpretacja falsyfikująca T.1, czyli taka, przy której

A: prawdziwy jest poprzednik zdania T.1
oraz
B: prawdziwa jest negacja następnika tego zdania (czyli następnik jest fałszywy).

Po zapisaniu tych zdań symbolicznym łatwo zobaczyć, że mają one jako konsekwencje zdania 1-3.

A. $\neg\forall_z Q(z)$

B. $\neg\exists_z \neg Q(z)$

1. $\neg Q(c)$ – z A.
2. $\neg(\neg Q(c))$ – z B.
3. $Q(c)$ – z 2.

Zachodzi sprzeczność między 1 i 3. A skoro neg(T.1) ma dwie konsekwencje między sobą sprzeczne, musi być zdaniem fałszywym, a więc prawdziwe jest zdanie T.1, co było do okazania.

Przekształcenia od A i B do 3 tłumaczą się następującymi intuicjami, które zawdzięczamy naszej biegłości w polszczyźnie (w części dotyczącej kwantyfikatorów potocznych – „każdy" etc). Przykładowo, interpretujmy „Q" jako predykat „jest Chińczykiem", a jako dziedzinę indywiduów reprezentowanych przez zmienną „z” weźmy zbiór ludzi. Z A otrzymujemy 1, bo skoro nie każdy człowiek jest Chińczykiem (A), to w zbiorze ludzi musi być przynajmniej jedno indywiduum nie będące Chińczykiem; może to być np. obecny cesarz Japonii. Nie musimy jednak znać go nawet z imienia. Wystarczy, mając pewność, że ono jest, nazwać je jakimś umownym symbolem spośród tych, które przeznaczyliśmy do funkcjonowania w roli umownych imion własnych. Niech będzie to litera „c”; tak dochodzimy do wiersza 1.

Wiersz 2 jest konsekwencją tej części naszego założenia, którą oznaczyliśmy jako B. Skoro nie istnieje ktoś nie będący Chińczykiem, czyli nie ma nikogo, kto by nie był Chńczykiem, to znaczy, że wszyscy są Chińczykami. A skoro wszyscy. to także o wybranym przez nas wcześniej indywiduum c nie jest prawdą, że nie jest ono Chińczykiem. To mówi wiersz 2, a jest to równoznaczne (na mocy prawa podwójnej negacji) z twierdzeniem, że c jest Chińczykiem, co twierdzi wiersz 3. To jednak jest sprzeczne z konsekwencją wcześniej uzyskaną z tejże formuły neg(T.1), mianowicie, że c nie jest Chińczykiem (wiersz 1).

Powyższa procedura dowodowa jest dokładnie zdefiniowana za pomocą reguł składających się na jeden z systemów logiki predykatów (w skrypcie opisany w rozdziale V, odcinek 5).

Po tym komentarzu do pierwszego z zadań, krócej już można wskazać na sposób rozwiązywania pozostałych. Na pytanie, z których zdań wewnątrz zestawu Z4 wynika jego zdanie tytułowe, mamy trzy odpowiedzi pozytywne: wynika ono z 1, z 2, z 4. Każdą z tych odpowiedzi można uzasadnić podobnym jak wyżej dowodem nie wprost. Mamy do dyspozycji także inne metody (omawiane w skrypcie w rozdziale V, w odcinkach 1 i 3), ale ta jest najłatwiejsza i dająca najlepsze pojęcie o algorytmach przydatnych w komputeryzacji rozumowań. Nie przeprowadzając już dowodów, podam tylko krótkie do nich wskazówki.

Z tego, że ktoś nie jest wszechmocny (1) wynika logicznie, że nie wszyscy są wszechmocni (Z4). Niech tym kimś pozbawionym wszechmocy będzie indywiduum a. Jeśli zaprzeczyć następnikowi Z4, to wszyscy są wszechmocni, a więc dotyczy to także a. Jest przeto a wszechmocny i zarazem nie jest.

Także z tego, że nikt nie jest wszechmocny (2) wynika logicznie, że nie wszyscy są wszechmocni (Z4). Niech tym kimś, kto nie jest wszechmocny będzie b. Negacją zdania Z4 jest zdanie, że wszyscy są wszechmocni, a więc również b, co jednak jest sprzeczne z wcześniejszym wnioskiem.

Co do wynikania Z4 z 4, to widać odrazu, ze skoro określone indywiduum a nie jest wszechmocne, to trzeba uznać (żeby nie popaść w sprzeczność), że nie każdy jest wszechmocny.

Co się tyczy zdań w zestawie Z5, z których wszystkie dotyczą relacji, intuicyjne stwierdzanie wynikania lub jego braku jest trudniejsze niż w poprzednim zestawie. Poprzestaniemy więc na ćwiczeniach w formalnym zapisie tych relacji. Oto odpowiedzi na to, jakie zapisy w języku logiki predykatów odpowiadają zdaniom 1-10.

Z5. $\forall_x \exists_y L(y,x)$	Każdego ktoś lubi.
1. $\exists_x \forall_y L(x,y)$	Ktoś lubi każdego.
2. $\exists_x \exists_y L(x,y)$	Ktoś lubi kogoś.
3. $\forall_x \forall_y L(x,y)$	Każdy lubi każdego.
4. $\exists_x L(x,e)$	Ktoś lubi Ewę.
5. $\forall_x L(e,x)$	Ewa lubi każdego.
6. $\exists_x L(e,x)$	Ewa lubi kogoś.
7. $L(a,e)$	Adam lubi Ewę.

8. $\exists_x \forall_y \neg L(x, y)$ Ktoś (nie) lubi nikogo.
9. $\neg\exists_x \forall_y L(x, y)$ Nikt (nie) lubi każdego (tzn. nie ma kogoś, kto by lubił każdego).
10. $\forall_x \forall_y \neg L(x, y)$ Nikt (nie) lubi nikogo.

Do szczególnie częstych i użytecznych konstrukcji z kwantyfikatorami, oprócz tych ujętych w zestawach Z4 i Z5 należą następujące.

Zdanie o zawieraniu się dwóch zbiorów, np. zwierząt będących mrówkami (M) i zwierząt będących owadami (O).
[zaw] $\forall_x (M(x) \Rightarrow O(x))$

Zdanie o zawieraniu się obustronnym czyli o równości dwóch zbiorów, np. liczb naturalnych (N) i liczb całkowitych dodatnich (Q).
[rów] $\forall_x (M(x) \Leftrightarrow O(x))$

Zdanie o wykluczaniu się dwóch zbiorów, np. mrówek (M) i pszczół (P).
[wyk] $\forall_x (M(x) \Rightarrow \neg P(x))$

Zdanie o krzyżowaniu się dwóch zbiorów, np. osób melancholijnych (M) i poetów (P).
[krz] $\exists_x (P(x) \wedge M(x)) \wedge \exists_x (P(x) \wedge \neg M(x) \wedge \exists_x (M(x) \wedge \neg P(x))$.
Znaczy to tyle, że istnieją poeci melancholijni, istnieją też poeci niemelancholijni oraz osoby melancholijne nie będące poetami.

3. Zadania na kontrprzykłady do zdań ogólnych

W codziennym życiu i w badaniach naukowych często mamy do czynienia ze zdaniami, za pomocą których są obalane, czyli falsyfikowane, zdania ogólne w postaci implikacji mające (w najprostszym przypadku) formę [zaw]. Zdanie falsyfikujące, z którego wynika negacja pewnego zdania ogólnego nazywa się **kontrprzykładem** do tego zdania, Kontrprzykład jest koniunkcją dwóch zdań elementarnych (tzn. takich, że jest to zdanie atomowe lub negacja atomowego). W tej koniunkcji pierwszy człon opisuje jakiś konkretny przypadek spełniający poprzednik danej implikacji, drugi zaś człon opisuje przypadek, który nie spełnia następnika. Gdy rozważaną implikacją będzie zdanie

[zaw.1] $\forall_x (H(x) \Rightarrow K(x))$,

np. „Zawsze, jeśli ktoś jest Hrabią, to nosi Krawat”,

to kontrprzykładem będzie, powiedzmy, zdanie (z noworocznegp programu telewizyjnego 2004) o hrabim Tyszkiewiczu (oznaczymy go przez „a”)

[krp] $H(a) \wedge \neg K(a)$.

Stosowanie kontrprzykładów należy do głównych metod badawczych w naukach empirycznych. a w szczególności w naukach społecznych. Punktem wyjścia w badaniach jest często alternatywa kilku hipotez będących zdaniami ogólnymi postaci [zaw].

Na przykład, wysoki stopień rozwoju gospodarczego można tłumaczyć hipotezą Maxa Webera, że jest to wynik dominacji etyki protestanckiej, albo hipotezą, że jest to wynik dominacji liberalizmu ekonomicznego w świadomosci obywateli (co może brać się z kolei z tradycji kupieckich, z treści edukacji etc). Niech hipotezę Webera wyraża zdanie:

[MW] *Dla każdej pary zbiorowości, z których jedna jest protestancka, a druga katolicka, zbiorowośc protestancka jest bardziej zaawansowana gospodarczo niż katolicka.*

Jeśli sięgnąć po testujące hipotezę [MW] przypadki do obecnych landów Niemiec, to wyrazistym kontrprzykładem okaże się para: katolicka Bawaria, najbardziej rozwinięty gospodarczo kraj RFN, oraz protestancka Brandenburgia należąca do najmniej zaawansowanych.

Jako inne zastosowanie metody kontrprzykładu w problematyce nauk społecznych rozważmy pewną przesłankę w argumentacji na temat odniesienia się w konstytucji UE do wartości chrześcijańskich.

[WE] *Każda z wartości, którymi kieruje się UE jest chrześcijańska.*

Jest to zdanie o zawieraniu się zbioru wartości UE w zbiorze wartości chrześcijańskich. Niech zmienna „x" odnosi się do elementów zbioru wszelkich wartości (stanowi on więc w tym przypadku nasze uniwersum czyli dziedzinę rozważań). Zdanie [WE], od „Wartości Europejskie", mówi o zawieraniu się jednego z podzbiorów (wartości UE) z uniwersum wszystkich wartości w innym podzbiorze (wartości chrześcijańskie) tegoż uniwersum. W myśl definicji [zaw] zdanie takie oddaje się w zapisie formalnym jako implikację poprzedzoną kwantyfikatorem ogólnym. W zapisie tym zastosujemy następujące oznaczenia.

K ... [ktoś] kieruje się w swym postępowaniu [jakąś wartością]
C ... jest chrześcijańskie
e ... Unia Europejska [skrótowa jej nazwa na użytek obecnego zapisu]
a ... nazwa świeckości państwa jako pewnego elementu w dziedzinie wartości.

Oto zapis formalny przesłanki [WE].

[WE*] $\forall_x (K(e, x) \Rightarrow C(x))$.

Kontrprzykładem do zdania [WE*] jest koniunkcja:

[K*] $K(e, a) \land \neg C(a)$.

Z [K*] wynika logicznie zaprzeczenie zdania [WE*]. Mianowicie, konsekwencją tego drugiego jest jego konkretyzacja (gdy za x weźmiemy konkretną wartość – a).

[WE$_k$] $K(e, a) \Rightarrow C(a))$.

Teraz widać, że sytuacja opisana w [K*], spełniając poprzednik implikacji [WE$_k$], falsyfikuje zarazem jej następnik, jest to więc implikacja fałszywa. Ponieważ wynika ona logicznie z [WE*], a fałsz nie może wynikać z prawdy, [WE*] okazuje się zdaniem fałszywym.