Ocena poprawności wnioskowań za pomocą badania wynikania logicznego Zestawy ćwiczeń

©Witold Marciszewski

Niniejszy tekst zawiera pięć zestawów ćwiczeń (Z1-Z5). Każde z nich polega na rozstrzygnięciu, czy z pewnego zdania wynika logicznie inne zdanie. Jeśli wynika, to z tego pierwszego wolno wywnioskować drugie; inaczej mówiąc, dane wnioskowanie jest poprawne logicznie.

> UWAGA. Do poprawności logicznej (inaczej, formalnej) wnioskowania nie wystarcza i nie jest konieczne, żeby przesłanki były prawdziwe. Jej warunkiem, wystarczającym i zarazem koniecznym, jest to, żeby wnioskowanie podpadało pod schemat (formułę), który gwarantuje, że zawsze, czyli przy każdym podstawieniu, *jeśli* przesłanki są prawdziwe, to wniosek jest także prawdziwy. Gwarancja ta istnieje zawsze wtedy i tylko wtedy, gdy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Powiedzenie, że zdanie B **wynika logicznie** z A, będącego zdaniem postaci

$$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n, \text{ gdzie } n \geq 1,$$

jest równoznaczne z następującym określeniem: *A jest poprzednikiem zaś B następnikiem bądź w formule implikacyjnej będącej prawem logiki, bądź w zdaniu powstałym z podstawienia wyrażeń stałych za symbole zmienne w takiej formule.*

Jak widać, zwrot „B wynika logicznie z A” jest znacznie dogodniejszy dzięki swej zwięzłości niż równoznaczny z nim zwrot wskazany w ramce kursywą. Zauważmy, że warunek $n \geq 1$ dopuszcza też przypadek, gdy zdanie A jest jednoczłonowe, a nie koniunkcyjne, co zapewnia naszej definicji pożądaną ogólność.

Przykład 1 – na zachodzenie wynikania logicznego

B: Zbiera się na burzę.

wynika logicznie ze zdań

A$_1$ Jeśli niebo jest ciemne, to jest teraz wieczór lub zbiera się na burzę.

A$_2$: Niebo jest ciemne.

A$_3$: Teraz nie jest wieczór.

Zdania (A$_1$), (A$_2$), (A$_3$) łączymy symbolami koniunkcji w jedno zdanie (odpowiednik zdania A z definicji podanej w ramce) i czynimy zeń poprzednik implikacji, której następnikiem jest B. Tak powstaje formuła:

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow r.$$

Jest ona prawem logiki, co można sprawdzić tabelką algorytmu zerojedynkowego albo, krócej, następującym rozumowaniem nie wprost, czyli wyprowadzając sprzeczność z przypuszczenia zwanego **założeniem dowodu nie wprost**. Brzmi ono, jak następuje.

ZDNW: *Istnieje podstawienie, przy którym dana formuła staje się zdaniem fałszywym.*

Rozumujemy następująco.

Jeśli takie podstawienie istnieje, to (1) czyni ono fałszywym następnik oraz (2) czyni prawdziwym poprzednik. Z 1 wynika $r = 0$. Zaś 2 prowadzi do wniosku, że prawdziwe są wszystkie trzy człony koniunkcji, stąd $p = 1$ i $\neg q = 1$; to drugie zaś pociąga, że $q = 0$. Ale skoro p jest prawdą, podczas gdy q i r fałszem, to pierwszy człon koniunkcji stanowiącej poprzednik, mianowicie implikacja $p \Rightarrow (q \vee r)$, jest fałszywy. A zatem fałszywy jest cały poprzednik rozważanej formuły, co jest sprzeczne z konsekwencją nr 2 naszego Założenia Dowodu Nie Wprost. Skoro założenie to pociąga sprzeczność, musi być fałszywe, co znaczy, że **NIE** istnieje podstawienie, przy którym rozważana formuła staje się zdaniem fałszywym. To zaś znaczy, że jest ona prawem logiki czyli tautologią, a więc następnik wynika w niej logicznie z poprzednika.

Przykład 2 – na brak wynikania logicznego

Zmieńmy rozważaną wyżej formułę w jednym miejscu, zamieniając w następniku r na $\neg r$. Mamy więc implikację:

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg r.$$

Próbujemy uzyskać podstawienie, przy którym formuła ta stanie się fałszywa, czyli będzie miała prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Fałszywość następnika $\neg r$ wymaga prawdziwości r. Prawdziwość zaś następnika wymaga prawdziwości p, fałszywości q oraz prawdziwości implikacji $p \Rightarrow (q \vee r)$. Implikacja ta istotnie okaże się prawdziwa przy wartościach wcześniej już ustalonych dla p, q, r, a więc udaje się znaleźć – bez popadania w sprzeczność – takie podstawienia, przy których rozważana formuła staje się zdaniem fałszywym, co świadczy, że nie jest ona prawem logiki. Są to, przypomnijmy, podstawienia: $r = 1, p = 1, q = 0$.

Instrukcja korzystania z poniższych zadań

Każdy z pięciu zestawów dostarcza dwa razy tylu ćwiczeń, ile jest w nim numerowanych zdań. Najpierw tworzymy implikacje biorąc za poprzednik zdanie występujące w tytule zestawu (np. „Grzmi i błyska” w Z1), a za następniki kolejne zdania numerowane z tegoż zestawu. W drugiej serii bierzemy zdania numerowane jako kolejne poprzedniki, za następnik przyjmując zawsze zdanie tytułowe. W zestawach 1-3 strukturę otrzymanej implikacji zapisujemy w postaci formuły rachunku zdań, tzn. pomocą zmiennych zdaniowych i funktorów. Tak np. jako pierwszą z formuł do zbadania w Z1 otrzymamy: $p \wedge q \Rightarrow p$.

Liczbę zadań można wydatnie zwiększyć, łącząc funktorem implikacji także pary zdań numerowanych, np. w Z2 wziąć jako poprzednik zdanie 3 a jako następnik zdanie 6. Zaleca się też przed sprawdzeniem oszacować „na oko”, czyli intuicyjnie, czy brana do badania implikacja okaże się prawem logiki, a po zrobieniu wszystkich zadań porównać stosunek takich odpowiedzi intuicyjnych trafnych do ogólnej liczby odpowiedzi intuicyjnych.

Z1: **Grzmi i błyska.**

1. Grzmi.
2. Błyska.
3. Grzmi lub błyska.
4. Grzmi lub dżdży.
5. Jeżeli grzmi, to błyska
6. Jeżeli nie grzmi, to błyska.
7. Jeżeli dżdży, to błyska.
8. Jeżeli błyska, to dżdży.
9. Jeżeli nie dżdży, to nie błyska.
10. Jeżeli nie błyska, to nie dżdży.

W przysłowiu „kto pod kim dołki kopie, sam w nie wpada” uwyraźnijmy jego sens za pomocą „jeśli” i skróćmy do postaci „jeśli kopiesz (dołki pod kimś), to wpadasz (w nie sam).

Z2: **Jeżeli kopiesz, to wpadasz.**

1. Jeżeli wpadasz, to kopiesz.
2. Jeżeli nie kopiesz, to nie wpadasz.
3. Jeżeli nie wpadasz, to nie kopiesz.
4. Wpadasz lub kopiesz.
5. Nie wpadasz lub kopiesz.
6. Wpadasz lub nie kopiesz.
7. Nie jest tak, że kopiesz i nie wpadasz.
8. Nie jest tak, że nie kopiesz i wpadasz.
9. Wpadasz i kopiesz.
10. Nie jest tak, że wpadasz i kopiesz.

Refren „Jak się nie ma, co się lubi, to się lubi, co się ma” (z piosenki w „Operze za trzy grosze” B. Brechta) sparafrazujmy następująco.

Z3: **Jeżeli nie ma się tego, co się lubi, to lubi się to, co się ma.**

1. Nie ma się tego, co się lubi i lubi się to, co się ma.
2. Nie ma się tego, co się lubi lub lubi się to, co się ma.
3. Ma się to, co się lubi lub lubi się to, co się ma.
4. Jeżeli się lubi to, co się ma, to nie ma się tego, co się lubi.
5. Jeżeli się ma to, co się lubi, to nie lubi się tego, co się ma.
6. Lubi się to, co się ma.

Następne dwa zestawy zawierają zadania z rachunku predykatów — teorii logicznej, która w okresie do stycznia nie była jeszcze przerabiana. Można jednak próbować rozwiązywać te zadania w sposób intuicyjny jako trening dobrze przygotowujący do opanowania logiki predykatów.

Strukturę logiczną w tuch zestawach wyznaczają nie spójniki (jak w Z1-Z3), lecz słowa wskazujące, że predykat (orzeczenie) dotyczy wszystkich lub że niektórych elementów rozważanego zbioru (tu jest to zbiór ludzi, stąd „ktoś” znaczy „pewien człowiek”). Słowa takie nazywamy kwantyfikatorami. Wzięcie w nawias „nie” wskazuje, że jest ono zbędne logicznie (negacja jest już w treści „nikt”), ale wymaga tego słówka gramatyka polska (np. w angielskim nie ma tego nadmiaru negacji; zdanie 2 brzmiałoby „nobody is omnipotent”).

B4: **Nie (jest tak, że) każdy jest wszechmocny.**

1. Ktoś nie jest wszechmocny.
2. Nikt (nie) jest wszechmocny.
3. Ktoś jest wszechmocny.
4. Obecny premier Polski nie jest wszechmocny.

Zastanów się nad następującą zagadką: czy Wszechmocny może stworzyć tak ciężki kamień, że sam go nie podniesie?

B5: **Każdego ktoś lubi.**

1. Ktoś lubi każdego.
2. Ktoś lubi kogoś.
3. Każdy lubi każdego.
4. Ktoś lubi Ewę.
5. Ewa lubi każdego.
6. Ewa lubi kogoś.
7. Adam lubi Ewę.
8. Ktoś (nie) lubi nikogo.
9. Nikt (nie) lubi każdego.
10. Nikt (nie) lubi nikogo.

Zastanów się nad następującą zagadką. Pewien filantrop lubi ludzi, ale tylko niesamolubnych, czyli tych, co sami siebie nie lubią. Pytanie: czy nasz filantrop lubi sam siebie?