Empiryczne aspekty teorii obliczalności

czyli czy Wszechświat liczy lepiej niż (bezmyślny) człowiek?

Jerzy Mycka
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

25 listopada 2003

Streszczenie

Referat dotyczy problemu, w jaki sposób na klasyfikację problemów na obliczalne lub nieobliczalne wpływa kształt fizycznej rzeczywistości. Najpierw przywołana zostanie idea obliczalności według A. Turinga. Na jej podstawie zostanie ukazana możliwość rewizji pojęcia obliczalności. Punktem wyjścia będzie koncepcja systemu fizycznego przetwarzającego informacje pojmowane jako parametry elementów systemu. Wskazane zostaną odpowiednie dla takiego podejścia modele obliczalności niesprowadzalne do maszyny Turinga. Jako główna obiekcja wobec modeli wspomnianego typu rozważona będzie teza Gandy'ego. Metodologicznie referat uzasadnia jako uprawnione badanie problemów wykraczających w sensie obliczalności poza model Turinga.

1 Obliczalność

Idea mechanicznego rozwiązywania problemów sięga dość głęboko w przeszłość nauki. Nie będziemy się tu jednak zajmowali rysem historycznym tego zagadnienia, za to od razu zwrócimy się ku tym pojęciom jakie w związku z badaniami obliczalności sformułował Alan Turing [16].

Opisując językiem nieformalnym model obliczalności nazywany maszyną Turinga można określić go następująco: maszyna składa się z nieskończonej taśmy podzielonej na identyczne komórki służącej do przechowywania danych wejściowych, wyjściowych oraz informacji roboczych. Wszystkie elementy znajdujące się na taśmie są napisami (ciągami znaków), przy czym obowiązuje zasada umieszczania jednego znaku w jednej komórce. Bez utraty ogólności wybiera się zwykle pewien alfabet jako zasób znaków dopuszczalnych przy budowaniu napisów. Praktycznie, często wybór pada na alfabet binarny (zerojedynkowy) pozwalający na względnie wygodną i zwięzłą reprezentację danych. Ponadto konstrukcja maszyny wymaga określenia skończonego zbioru stanów, z którego pochodzi element wskazujący na bieżącą sytuację (stan) maszyny.

Maszyna Turinga pracuje w krokach, które są identyczne co do czasu trwania. W każdym kroku maszyna czyta zawartość bieżącej komórki (wskazywanej przez głowicę), następnie zmienia zawartość tejże komórki stosownie do przeczytanego symbolu i obecnego stanu. Te same informacje służą kolejno do zmiany stanu oraz przesunięcia głowicy nad sąsiednią klatkę z lewej lub prawej strony. Pewne stany są wyróżnione jako stany końcowe; jeśli maszyna znajdzie się w jednym z nich kończy pracę. Klasyczny model maszyny Turinga wymaga, aby w każdej chwili pracy maszyny ilość symboli na taśmie różnych od symbolu pustego była skończona.

Za obliczalny w sensie Turinga uznamy ten problem, którego rozwiązanie może zostać znalezione przez stosownie skonstruowaną maszynę Turinga. Zauważmy, że cały opisany powyżej proces obliczenia daje się łatwo wyobrazić jako praca człowieka, który używając kartki papieru i ołówka według ścisłych reguł (bezmyślnie) realizuje kolejne wymiany symboli. Robert Soare [15] wskazał ten charakter obliczalności Turinga nazywając podmiot dokonujący obliczeń 'komputorem' (computor), aby uwypuklić wykorzystaną tu idealizację działalności ludzkiej. Nie wydaje się, żeby celem Turinga była analiza możliwości maszyn (systemów fizycznych). W zgodzie z poprzednimi uwagami konstrukcja maszyny Turinga ujmuje raczej możliwości działania 'idealnego matematyka'.

Tak zdefiniowana maszyna Turinga pozwala na wszechstronną analizę problemów obliczalności. Najważniejsze z nich to wyróżnienie zagadnień, których nie można rozwiązać używając maszyn Turinga (problemy nierozstrzygalne) oraz wskazanie ograniczeń czasowo-przestrzennych wypływających z natury rozwiązywanego zagadnienia (teoria złożoności).

Oczywiście, maszyna Turinga nie jest jedynym modelem procesów obliczalnych. Wystarczy przykładowo wspomnieć niezależnie zaproponowane algorytmy A. A. Markowa [6], λ-rachunek A. Churcha [1] czy funkcje częściowo rekurencyjne [8]. W toku badań dla wszystkich tych modeli zweryfikowano tezę, iż są one identyczne co do zakresu obliczalności (porównaj [10]). Mówiąc językiem nieformalnym: każde zagadnienie rozwiązywalne w jednym z tych modeli może być rozwiązane w wszystkich pozostałych.

Dodajmy w tym miejscu dygresję. Modele te są równoważne co do mocy, ale różne co do środków wyrazu. Algorytmy Markowa, rachunek Churcha to modele opierajace się na opisie szczególnych operacji na napisach. Jest to przecież podejście bliskie przyjjmowanemu zwykle przez zwolenników formalizmu w zakresie podstaw matematyki. Z kolei określenie obliczenia w sposób wzorowany na czynnościach człowieka - maszyna Turinga - prowadzi nas w okolice niedalekie od intucjonizmu matematycznego. W końcu świat funkcji matematycznych w domenie naturalnej zdaje się być domeną platonizmu. Jak można sugerować na podstawie tego krótkiego wyliczenia preferencja w wykorzystaniu jednego z modeli obliczalności może mieć związek z orientacją filozoficzną przejawianą w zakresie podstaw matematyki.

Wyniki badań dotyczących różnych modeli obliczalności doprowadziły do sformułowania tezy Churcha-Turinga [2]. Przywołamy ją w tym miejscu dla uniknięcia nieporozumień. Teza ta stwierdza, że nasze nieformalne pojęcie efektywnej obliczalności pokrywa się z matematycznie ścisłą definicją maszyny Turinga. Warunki zwykle kojarzone z efektywnością łączy się ze skończoną ilością instrukcji działania wyrażonych przez skończone napisy, z działaniem (w poprawnym przypadku) w skończonej ilości kroków (etapów), z możliwością (w zasadzie) realizacji algorytmu przez człowieka bez użycia intuicji, kreatywności, bezpośredniego wglądu w istotę problemu. Zwróćmy uwagę na to, czego teza Churcha-Turinga nie mówi: nie twierdzi ona, że inne typy obliczeń nie są możliwe. Wskazuje tylko, że te obliczenia, które są efektywne mają związek z powyżej wspomnianymi modelami.

2 Hiperobliczalność

W świetle powyżej przypomnianych faktów narzuca się istotne zarówno teoretycznie jak i praktycznie pytanie: czy istnieje forma obliczalności nieefektywnej, ale praktycznie możliwej do zrealizownia. Zwykle procedury i modele o takiej własności określa się pojęciem hiperobliczalności. Ponieważ efektywność obliczeń wydaje się być odwzorowaniem opisu ludzkiej aktywności językiem teorii obliczalności, rozwiązania nieefektywne są poszukiwane w świecie fizyki.

W zgodzie z tymi uwagami wskażemy możliwości rewizji pojęcia obliczalności. Punktem wyjścia będzie koncepcja systemu fizycznego (sztucznego lub naturalnego) przetwarzającego informacje pojmowane jako parametry elementów systemu. Mechaniczny charakter tego rodzaju podejścia jest zgodny z tradycyjną nazwą 'komputer'.

Zaczniemy od wprowadzania przykładów modeli obliczalności nieefektywnej. Jako pierwszy model podamy prostą modyfikację maszyny Turinga zwaną przyspieszającą maszyną Turinga [3]. Opis jej struktury jest taki sam jak dla zwykłej maszyny Turinga. Zmiana dotyczy czasowego wzorca realizowanych kroków. Każdy kolejny krok jest wykonywany w czasie równym połowie trwania kroku porzedniego. Tak działająca maszyna może zrealizować nieskończoną ilość kroków w ciągu dwóch jednostek początkowych czasu. Ta cecha pozwala na rozwiązanie problemu zatrzymania pewnej maszyny Turinga przez następujące rozszerzenie zbioru jej instrukcji: na początku zaznacz wybraną klatkę maszyny znakiem 0, w razie wykonywania instrukcji finalnej zmień zawartość tej klatki na 1. Po dwóch jednostkach czasu obserwacja tejże wybranej klatki pozwala nam sprawdzić, czy analizowana maszyna Turinga zatrzymała się po skończonej ilości kroków czy też nie. Ponieważ problem zatrzymania (stopu) nie jest efektywnie obliczalny nowy model istotnie poszerza granice pojęcia obliczalności.

Z kolei L. Rubel [11, 12] zaproponował model nazywany Extended Analog Computer (EAC) będący pewnym rozszerzeniem General Purpose Analog Computer (GPAC) wprowadzonego przez C. Shannona [14]. Obliczenia są realizowane w czasie ciągłym, wyjście jest uzyskiwane na podstawie wejść poprzez zależności opisane grafem skierowanym (niekoniecznie acyklicznym) z węzłami, które są jednostkami obliczeniowymi poniższych typów - integrator: dla wejść u, v wyjście jest całką Riemanna-Stieltjesa $\lambda t. \int_{t_0}^{t} u(x) dv(x) + a$, gdzie a, t_0 są stałymi zdefiniowanymi przez początkowe ustawienia integratora; stały mnożnik: dla wejścia u wynikiem jest ku; sumator: dla u i v wynik jest równy $u + v$; mnożnik: wynik równy tym razem uv; stała: bez wejścia, wynikiem jest zawsze 1. Ponadto dopuszczone są węzły rozwiązujące problem skończonego układu równań różniczkowych cząstkowych z warunkami brzegowymi oraz nieskończone granice z indeksami przebiegającymi przez pewien wyznaczony podzbiór liczb rzeczywistych. Dla przykładu mocy obliczeniowej EAC można wskazać, że maszyna typu EAC potrafi obliczać funkcję Γ Eulera.

Modelem wzorowanym na klasycznym pojęciu funkcji częściowo rekurencyjnych jest system rzeczywistych funkcji rekurencyjnych. Podamy tu jego wersję opracowaną w [9], a opartą na propozycji C. Moore'a [7]. Poniższa defnicja bazuje na operacjach wektorowych. Zbiór rzeczywistych rekurencyjnych funkcji jest generowany na podstawie stałych $0, 1, -1$ oraz projekcji $I_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n, n > 0$, przez operatory:

1. złożenie: dla f będącej rzeczywistą funkcją rekurencyjną z n k-arnymi składowymi i g będącej rzeczywistą funkcją rekurencyjną z k m-arnymi składowymi wektor n m-arnych składowych $(1 \leq i \leq n)$

$$\lambda x_1 \ldots x_m . f_i(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m))$$

   jest rzeczywistą funkcją rekurencyjną;

2. rekursja różniczkowa: dla f będącej rzeczywistą funkcją rekurencyjną z n k-arnymi składowymi i g będącej rzeczywistą funkcją rekurencyjną z n $k+n+1$-ary components, wektor h mający n $k+1$-arnych składowych, będący jednoznacznym rozwiązaniem[1] problemu Cauchy'ego dla $1 \leq i \leq n$:

$$h_i(x_1, \ldots, x_k, 0) = f_i(x_1, \ldots, x_k),$$
$$\partial_y h_i(x_1, \ldots, x_k, y) = g_i(x_1, \ldots, x_k, y, h_1(x_1, \ldots, x_k, y), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_k, y))$$

   jest rzeczywistą funkcją rekurencyjną, tam gdzie h i jej pochodna są ciągłe względem y w największym przedziale zawierającym 0;

3. granice nieskończone: dla f będącej rzeczywistą funkcją rekurencyjną z n $k+1$-arnymi składowymi wektory h, h', h'' z n k-arnymi składowymi $(1 \leq i \leq n)$

$$h_i(x_1, \ldots, x_k) = \lim_{y \to \infty} f_i(x_1, \ldots, x_k, y),$$
$$h'_i(x_1, \ldots, x_k) = \liminf_{y \to \infty} f_i(x_1, \ldots, x_k, y),$$
$$h''_i(x_1, \ldots, x_k) = \limsup_{y \to \infty} f_i(x_1, \ldots, x_k, y),$$

   są rzeczywistymi funkcjami rekurencyjnymi, wszędzie gdzie odpowiednie granice są określone dla $1 \leq i \leq n$.

Wektorowe rzeczywiste funkcje rekurencyjne mogą być zdefiniowane poprzez ich składowe, a skalarne poprzez zawierające je wektory.

Wszystkie powyższe modele mają pewne cechy wspólne. Mianowicie, przekraczają one możliwości klasycznej obliczalności: potrafią rozwiązywać

[1] Poza przeliczalnym zbiorem izolowanych punktów nieciągłości.

problemy nieobliczalne dla maszyn Turinga (na przykład problem stopu [9]). Rzeczywiste funkcje rekurencyjne zawierają w sobie całą hierarchię arytmetyczną i analityczną [7]. Ponadto zdolność realizacji nieskończonych granic oznacza możliwość przełamywania tradycyjnych barier złożoności problemów.

3 Nieskończoność a obliczalność

O ile maszyna Turinga wydaje się być praktycznie realizowalna w świecie fizycznym, o tyle modele wymienione powyżej nasuwają w tym względzie znaczne wątpliwości. Można je dość precyzyjnie określić przy pomocy tezy Gandy'ego [4]. Jest ona zwykle formułowana w sposób następujący: wszystko co może być obliczone przez dyskretne deterministyczne mechaniczne urządzenie może być wyliczone przez maszynę Turinga. Zauważmy, że używając do tego stwierdzenia prawa kontrapozycji otrzymujemy równoważne sformułowanie: problem, którego nie można rozwiązać przez maszynę Turinga nie będzie obliczalny przez jakiekolwiek dyskretne i deterministyczne urządzenie. Ponieważ wspomniane powyżej modele przekraczają granice obliczalności klasycznej, na mocy powyższej tezy musielibyśmy uznać ich praktyczną nierealizowalność w świecie deterministycznym i dyskretnym.

Przed próbą oceny tezy Gandy'ego zastanówmy się nad fenomenem rozwiązywania przez te modele zagadnień nieobliczalnych w sensie Turinga. Najprostszym do analizy takim przypadkiem jest przyspieszająca maszyna Turinga. Otrzymanie komunikatu o skończonej czy nieskończonej ilości operacji wykonywanych przez maszynę nie wiąże się z żadną wyrafinowaną procedurą badania tej własności. Maszyna po prostu realizuje swoje czynności w skończonej, lub nieskończonej ilości kroków. Fakt pojawienia się wyniku jest konsekwencją umiejętności realizacji nieskończonej ilości kroków w skończonym czasie.

Moc tego modelu tkwi więc w osiąganiu w ograniczonym czasie wyniku będącego efektem przejścia granicznego. Te same możliwości pojawiają się dla rzeczywistych funkcji rekurencyjnych oraz EAC w efekcie wpisania w ich konstrukcję operatorów granic nieskończonych. Warto zwrócić uwagę na fakt, że ten sam powód czyni wymienione modele nieefektywnymi - mianowicie nie spełniają one wymogu skończonej ilości kroków obliczenia.

Jednak uznanie zasad konstrukcji tych modeli oraz tezy Gandy'ego za wzajemnie się wykluczające wydaje się być przedwczesne. Otóż chociaż dyskretność i determinizm obliczenia są w tezie gwarantowane, nie ma tu explicite wyrażonego odrzucenia idei nieskończonej ilości kroków urządzenia. Przyjęcie zaś implicite takiego ograniczenia łączy się z przekonaniem, że nieskończona ilość kroków musi zająć nieskończoną ilość czasu. Jednakże ta ostatnia konstatacja nie jest bynajmniej oczywista i wiąże się raczej z własnościami otaczającego nas świata fizycznego niż z wewnętrzną strukturą proponowanych modeli.

4 Nieskończoność a fizyka

W świetle poprzednich rozważań, dla ustalenia granic praktycznie realizowalnych modeli obliczalności, istotna stała się natura świata materialnego. Ważne jest jednak uświadomienie sobie oczywistego faktu, że nie mamy bezpośredniej wiedzy na temat własności Wszechświata. W związku z tym analiza jego cech i ograniczeń zawsze odbywa się za pośrednictwem teorii fizycznych. Te właśnie teorie stają się dla nas jedyną drogą wglądu w ilościowe relacje zachodzące w świecie fizycznym.

Dlatego stajemy wobec kolejnego ograniczenia naszych analiz. Nie możemy mówić o absolutnych granicach obliczalności, lecz o tym jakie ograniczenia dla możliwości obliczeniowych płyną z przyjmowanej za daną teorii fizycznej. Mogło by się jednak wydawać, że tak daleko idące żądanie jak postulat realizowania nieskończoności (energii, czasu) w skończonym wycinku fizycznej rzeczywistości jest nie do zaakceptowania dla każdej teorii fizycznej. Osłabiając nieco ostatnie zdanie, można byłoby się ograniczyć przynajmniej do powszechnie uznawanych (nie szczególnie egzotycznych) teorii fizyki.

Jak się jednak okazuje powyższe przypuszczenia nie są prawdziwe. Podamy poniżej dwa przykłady teorii fizycznych dopuszczających hiperobliczalność.

Pierwszym z przykładów będzie mechanika newtonowska. W XIX wieku P. Painlevé oraz H. Poincaré zaproponowali szczególną analizę związanego z mechaniką ciał niebieskich zagadnienia n ciał. W samym zagadnieniu n ciał poszukiwane jest rozwiązanie układu równań ruchów dla n grawitacyjnie odziałujących ciał. P. Painlevé i H. Poincaré rozpoczęli dyskusję nie tyle nad sposobem znalezienia poszczególnych rozwiązań, ile nad analizą własności tychże rozwiązań. Istotnym zwłaszcza jest pytanie o to czy mogą istnieć takie rozwiązania problemu, które zawierają osobliwość. Osobliwość jako rozwiązanie ma tę własność, że równanie dla niej przybiera nieskończone (nieokreślone) wartości. Jest oczywiste, że taka sytuacja zdarza się przy zderzeniu dwóch spośród opisywanych przez problem ciał. Jednak otwartą pozostała kwestia, czy osobliwość może się zdarzyć bez zderzenia. Odpowiedź na to pytanie podał Z. Xia [17] w 1992 roku. Okazuje się, że dla problemu 5 ciał w przestrzeni trójwymiarowej istnieją rozwiązania niekolizyjne. Rozwiązanie, które znalazł Z. Xia powoduje wyrzucenie jednego z ciał do nieskończoności w skończonym czasie. Jak widać, mechanika newtonowska dopuszcza skończone realizacje nieskończoności i potencjalnie wspiera możliwość obliczeń przekraczających ograniczenia maszyny Turinga.

Oczywistym celem, który pojawia się w tym momencie jest odniesienie podobnych rozważań do teorii fizycznych uznawanych obecnie za obowiązujące. Wykorzystamy w tym celu ogólną teorię względności. Otóż istnieją rozwiązania równań Einsteina [5], w których istnieje krzywa czasowa γ jednostronnie nieskończona oraz punkt p w czasoprzestrzeni, taki że cała γ jest zawarta w przeszłości p. Takie struktury czasoprzestrzenne (dla przykładu czasoprzestrzeń anty de Sitterowska) zostały przebadane w fizyce wraz ze wskazaniem możliwych układów materialnych spełniających pożądane własności (porównaj [5]). Co więcej zaproponowano opisy wykorzystania takich struktur do konstrukcji systemów obliczających [13]. Zatem, kolejna z analizowanych teorii i to mająca dziś charakter teorii obowiązującej dopuszcza przeprowadzenie nieskończonej ilość operacji w czasie skończonym dla odpowiednio dobranego obserwatora.

Powyższe wyniki nie uprawniają nas co prawda do przyjęcia tezy, że hiperobliczalność jest możliwa w naszym świecie. Jednak pokazują, że możliwość przełamania barier maszyn Turinga jest w świetle niektórych teorii fizycznych realna.

Jak widać wprowadza to nową sytuację poznawczą. Otóż granice obliczalności stają się obowiązujące tylko względem ustalonej teorii fizyki. Co więcej otrzymują one charakter prowizoryczny i tymczasowy. Przy zmianie teorii fizycznej uznanej jako poprawny opis Wszechświata może nastąpić zmiana granic obliczalności. Teoria obliczalności nabrała dodatkowo relatywnego charakteru, tym razem względem teorii fizycznej przyjętej jako punkt wyjścia w konstrukcji systemów liczących.

5 Podsumowanie

Postaramy się teraz określić wnioski wypływajace z omówionych wyników. Z punktu widzenia matematyki budowa pewnego modelu obliczalności opiera się na określeniu sposobu konstrukcji procedury obliczalnej. Jakkolwiek oparty na skończonym słowniku opis niesie ze sobą ograniczenie ilości takich procedur do zbioru przeliczalnego nie są z nim związane dalsze restrykcje. Podane powyżej przykłady modeli wykraczających poza granice Turinga dowodzą możliwość formalnego opisu modeli istotnie różniących się mocą obliczeniową w stosunku do klasycznych modeli. Elementarna analiza teoriomnogościowa własności zbioru funkcji naturalnych wskazuje możliwość konstrukcji kontinuum modeli o mocy przeliczalnej. Zatem uzasadnienie wyboru jednego z nich musi przyjść spoza terytorium matematyki.

Ponieważ celem teorii obliczalności jest opis własności procedur mechanicznie obliczalnych naturalne jest zwrócenie się ku fizyce. Ona to właśnie pozwala nam rozstrzygać, które z proponowanego kontinuum modeli są fizycznie realizowalne (które urządzenia da się rzeczywiście zbudować). Tak więc kryterium rozróżnienia problemów na obliczalne lub nieobliczalne przesuwa się pole empirii. Za obliczalne w sposób całkowicie zgodny z intuicją możemy uznać te problemy, których sposób rozwiązania da się opisać w realiach świata materialnego. Tak określona klasyfikacja byłaby klasyfikacją absolutną. Znaczyć ma to, że struktura Wszechświata jednoznacznie rozgranicza pole możliwych do obliczenia problemów od zagadnień nieobliczalnych nie dopuszczając żadnego relatywizmu w tym względzie.

Jednakże sytuacja poznawcza jest inna. Mianowicie, nie mamy bezpośredniej wiedzy na temat własności Wszechświata, tak aby dokonać w sposób pewny wspomnianej powyżej klasyfikacji obliczalnościowej. Zawsze nasze poznanie świata materialnego jego ograniczone czynnikiem pośredniczącym - teorią fizyczną. Różne aspekty rzeczywistości mogą być obejmowane różnymi teoriami, czasem nawet w obrębie tego samego wycinka świata (np. mikroświat) dopuszczane są różne teorie pod warunkiem ich zgodności empirycznej. Dodatkowym czynnikiem różnorodności teoretycznej fizyki jest czas przynoszący coraz to nowe paradygmaty badawcze.

W takim kontekście poznanie stopnia obliczalności pewnego zagadnienia musi być postrzegane poprzez pryzmat uznanej za obowiązującą teorii fizycznej. Ta nowa sytuacja zmienia sposób myślenia w ramach teorii obliczalności. Nie ma już mowy o zagadnieniach (bezwzględnie i po prostu) obliczalnych. Teraz należy wskazywać raczej relację pomiędzy problemem a pewną teorią fizyczną. Problem P może być obliczalny względem mechaniki kwantowej, a nieobliczalny względem mechaniki newtonowskiej.

Należy zauważyć, że takie spojrzenie na teorię obliczalności dotyczy nie tylko samego rozróżnienia problemów na obliczalne lub nieobliczalne. Relatywność względem teorii fizycznej ma wpływ także na zagadnienia złożoności. Warto zwrócić uwagę, że przyjęcie czynnika czasu za parametr ciągły pozwalać może w odpowiednich modelach na rozwiązywanie dowolnej ilości operacji (o odpowiednio krótkim czasie) w stałym czasie. Tak więc złożność praktyczna (czas wykonania, a nie ilość kroków) problemów, które uważane są dziś za nieosiągalne ze względu na ich klasycznie rozumianą złożoność może przy takim podejściu ulec redukcji.

Jaka w takim razie pozostanie rola w teorii obliczalności dla matematyki i logiki? Otóż tradycyjnie pełnić będą one rolę języka wyrażającego zagadnienia badawcze w tym zakresie. Ponadto, strzegąc spójności i kompletności wprowadzanych modeli będą gwarantem ich poprawności. Jednak wybór modelu i określenie granic mocy obliczeniowej będzie się znajdował poza polem matematyki, pełniącej odtąd tylko funkcję narzędzia badawczego.

Zakończenie referatu zostanie podane w formie lapidarnych tez wypływających z całych powyższych rozważań.

Zagadnienie obliczalności jest bardziej problemem ontologii niż epistemologii. To kształt fizycznej rzeczywistości, nie zaś aprioryczne konstrukcje umysłu, decydują o tym, które z problemów są obliczalne.

Badania granic obliczalności są względne wobec pośredniczcących teorii fizycznych. Tak więc, nie mając bezpośredniego wgląd w ontologię Wszechświata musimy opierać badania w zakresie teorii obliczalności na uznanych za obowiązujące teorii fizycznych.

Rozważanie obliczeń ponad granicami modelu Turinga ma prawo bytu jako uzasadniony program badawczy. Podane przykłady teorii fizycznych dopuszczających hiperobliczalność (mechanika Newtona, ogólna teoria względności) wskazują, że przekraczanie granic ustanowionych przez model maszyny Turinga nie jest - przynajmniej potencjalnie - wykluczone.

Literatura

[1] H. P. Barendrengt. *The Lambda Calculus*, North-Holland, 1981.

[2] B. J. Copeland. The Church-Turing Thesis. In J. Perry and E. Zalta, (eds), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 1996.

[3] B. J. Copeland. Even Turing machines can compute uncomputable functions. In C. S. Calude, J. Casti, and M. J. Dinneen, (eds), *Unconventional Models of Computation*, Springer-Verlag, 1998.

[4] R. O. Gandy. Church's Thesis and principles of mechanisms. In J. Barwise, J. Keisler and K. Kunen, (eds), *The Kleene Symposium*, North-Holland, 1980.

[5] G. Etesi and I. Nemeti. Non-Turing computations via Malament-Hogarth space-times. *Int.J.Theor.Phys.* 41:341-370, 2002.

[6] A. A. Markow. Theory of algorithms (in Russian). *Trudy Matiematiczeskogo Instituta Stieklova*, 38: 176:189, 1951.

[7] C. Moore. Recursion theory on the reals and continuous-time computation. *Theoretical Computer Science,* 162:23-44, 1996.

[8] R. Murawski. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 1991.

[9] J. Mycka, J. F. Costa. Real recursive functions and their hierarchy. Submitted to *Journal of Complexity*, 2003.

[10] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*, North-Holland, 1989.

[11] L. A. Rubel. Some mathematical limitations of the general-purpose analog computer. *Advances in Applied Mathematics,* 9:22-34, 1988.

[12] L. A. Rubel. The extended analog computer. *Advances in Applied Mathematics*, 14:39-50, 1993.

[13] O. Shagrir, I. Pitowsky. Physical Hypercomputation and the Church-Turing Thesis. *Minds and Machines*, 13: 87-101, 2003.

[14] C. Shannon. Mathematical theory of the differential analyzer. *J. Math. Phys. MIT*, 20:337-354, 1941.

[15] R. Soare. The history and concept of computability. In E. Griffor, (ed), *Handbook of Computability Theory*, Elsevier, 1999.

[16] A. Turing. On computable numbers, with application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 42: 230-265, 1936.

[17] Z. Xia. The existence of noncollision singularities in Newtonian systems. *The Annals of Mathematics*, 135(3):411-468, 1992.