Witold Marciszewski

Czy w uprawianiu logiki predykatów warto być monadystą?

URL tego artykułu: calculemus.org/CA/index.html, dział A7. Wprowadzające do dyskusji **Zagajenie**, pod tym samym tytułem, znajduje się w blogu „Polemiki i Rozmówki w Cafe Aleph" w kategorii "Dydaktyka logiki i filozofii", URL: blog.marciszewski.eu/?p=4330. Komentujemy i dyskutujemy w ramce pod Zagajeniem.

§1. *Kontrowersyjny minimalizm monadystów w sposobie wykładania logiki predykatów.* Znam dwa podręczniki logiki adresowane do humanistów, w szczególności do prawników, oba mające w tytule „Logika praktyczna", w których wykład rachunku predykatów – dalej, w skrócie **RP** – ograniczono do rachunku monadycznego. Tę metodę wykładu dogodnie będzie nazwać krótko *monadyzmem*, a jej zwolenników – *monadystami*. W jednej z tych książek spotykamy się z taką oto motywacją monadyzmu.

> „Przedmiotem rozdziału 7 jest klasyczny rachunek kwantyfikatorów w wersji celowo przez autora okrojonej tak, aby również czytelnik o humanistycznym wykształceniu mógł odnieść korzyść z lektury tego rozdziału. Rachunek został więc zredukowany do klasy formuł z wyłącznie jednoargumentowymi predykatami."

Uzasadnia się to tym, że chodzi o „dostarczenie praktycznych narzędzi do rozpoznawania i rozumienia podstawowych praw logiki wyrażonych w języku z kwantyfikatorami". Wygląda na to, ze autor uważa za niedostępne dla umysłowości humanisty, takie np. stwierdzenie o pewnej relacji typowo humanistycznej: „Jeśli ktoś jest autorytetem uznawanym przez każdego, to każdy uznaje kogoś za autorytet". I że humanistka czy humanista nie jest w stanie wysilić się nieco umysłowo, by zauważyć (ewentualnie z pomocą nauczyciela), że z tego nie wynika implikacja odwrotna.

Jeśli chodzi o mentalne możliwości humanistów w tym względzie, to polecam do przejrzenia wykłady prof. Jerzego Pogonowskiego z UAM, który już od lat serwuje nie tylko takie lecz i trudniejsze formuły w populacji humanistów, a nie słychać o jakichś z tego powodu kłopotach.

Prof. Pogonowski w wykładach RP dla humanistów stosuje metodę drzew semantycznych, która dobrze sobie radzi ze zdaniami o relacjach. Okazuje się, że nie przekracza to zdolności percepcyjnych jego audytorium. Nie należy więc przesadzać ze współczuciem dla ograniczeń umysłu humanistycznego. A na wszelki wypadek proponuję w następnym odcinku pewien test wytrzymałości humanistów na konstrukcje zdaniowe z predykatem relacyjnym (tj. wieloargumentowym) i kilkoma kwantyfikatorami.

§2. *Czy za trudne są dla humanistów bajki Ezopa?* Bajka „Zając i żaba" kończy się morałem: „Każdy ma swoją żabę, co przed nim ucieka i swojego zająca, którego się boi". Ta refleksja wynika z doświadczeń zająca. Użalał się on nad sobą, że przed każdym zwierzęciem musi uciekać, aż raz zauważył, że lęka się (skr. L) jego widoku uskakująca w przestrachu żaba; to go, oczywiście, podniosło na duchu. A jak to bywa z bajkami, morał tyczy się zbioru szerszego niż ten z dosłownej fabuły, toteż zamiast nazw „zając" i „żaba" trzeba się posłużyć zmiennymi dotyczącymi populacji, do której daną myśl chcemy odnieść, np. ludzi. Tak dostajemy formułę.

[F1] $\forall x \exists y \exists z\ (xLy \wedge zLx)$.

Na tym materiale możemy ćwiczyć zależności o charakterze wynikania logicznego. Niech student opisze formułą relacyjną np. sytuację tyrana, którego wszyscy się boją, on zaś boi się każdego, bo może to być bezwzględny rywal lub nasłany przezeń skrytobójca. Opisuje to formuła:

[F2] $\exists x \forall y (yLx \wedge xLy)$.

Czy któraś z tych formuł wynika z drugiej, a jeśli tak, to która z której? Jest w tym pytaniu typowo humanistyczne ćwiczenie na rozumienie języka polskiego, mianowicie słów „istnieje" i „każdy". A jeśli zadanie okaże się zbyt trudne, będzie to świadczyć, że nauka logiki jest potrzebna dla poprawy kompetencji językowej.

Interesujące może być obserwować, czy intuicja logiczna podpowie humaniście że F2 nie wynika z F1. Jeśli nie podpowie, nie będzie to powód do frustracji, lecz okazja do pokazania, jak efektywna bywa w takich przypadkach metoda kontrprzykładu. Interpretujemy „L" jako relację większości, a zmienne jako liczby całkowite. Wtedy F1* (gwiazdka wskazuje na jedną z interpretacji) staje się zdaniem: „Dla każdej liczby istnieje od niej większa oraz taka, od której ona jest większa". To jest oczywista prawda.

A jak wypada przy tej interpretacji F2? Wypada niedorzecznie. „Istnieje taka liczba, że każda liczba jest od niej większa, zaś ona jest większa od każdej liczby." A zatem implikacja $F1 \Rightarrow F2$ nie jest uniwersalnie prawdziwa, co pociąga brak wynikania logicznego F2 z F1.

Implikacja odwrotna jest uniwersalnie prawdziwa, ale wykazanie tego nie jest już sprawą tak prostą. Tu wykładowca musi się rozeznać, czy możliwości i motywacje audytorium oraz czas, jaki ma się do dyspozycji, wystarczą do przerobienie niezbędnej w takich przypadkach metody. Wspomniane wyżej (§1) doświadczenia dydaktyczne z metodą drzew semantycznych nie są zniechęcające, ale zapewne nie zawsze są one do powtórzenia.

§3. *O tym, dlaczego – wbrew monadystom – należy uprawiać RP relacyjny.* To znaczy, tę część rachunku predykatów, która stanowi dopełnienie rachunku monadycznego, operując predykatami, które określamy jako *wieloargumentowe* czyli *relacyjne*.

Zwrot "relacyjny rachunek predykatów" jeszcze się nie ustalił w polskiej terminologii logicznej. Jest jednak zapotrzebowanie na to pojęcie. Widać to w terminologii angielskiej, gdzie Google odnotowuje ok. 10000 wystąpień zwrotu "relational predicate calculus".

Nieodzowność predykatów relacyjnych jawi się natychmiast, gdy weźmie się pod uwagę choćby taki prosty Pewnik Arytmetyczny:

[PAP] *Dla każdej liczby istnieje liczba od niej większa.*

Spotyka się Przedszkolaków (stąd drugie „P” w nazwie zdania), które samodzielnie do tego zrozumienia dochodzą. Toteż mocno są przesadzone obawy (cytowane w §1), że nie pojmą takich konstrukcji studenci humanistyki.

Choć tak proste, zdanie PAP jest oknem, za którym się rozciąga rajski pejzaż zbiorów nieskończonych. Tak to widział David Hilbert, który sygnalizował doniosłość PAP i chwalił Georga Cantora (twórcę teorii zbiorów nieskończonych) za „otwarcie nam wrót raju, z którego nikt już wypędzić nas nie zdoła”.

Konstrukcja PAP rzuca snop światła na fakt, że aby dotrzeć do pojęcia nieskończoności, trzeba mieć przynajmniej jeden predykat relacyjny dla relacji przechodniej i asymetrycznej; naturalną jej reprezentacją jest relacja większości. Także mniejszości, która za sprawą struktury kwantyfikatorowej, takiej jak w PAP, generowałaby nieskończony zbiór obiektów coraz to mniejszych. A kto by sądził, że jakiego by nie wziąć mędrca, to zawsze znajdzie się ktoś odeń mądrzejszy, ten musiałby też wierzyć, że mędrców jest nieskończenie wielu.

Mnożę tu przykłady, żeby uprzytomnić jak najdobitniej fakt istnienia zbiorów nieskończonych. Wyznacza on bowiem istotną linię demarkacyjną między umysłem cywilizowanym i prymitywnym (ten liczy niekiedy tylko do trzech, czasem tylko do dziesięciu itp). Przypisuje się Platonowi, że fascynując się odkryciem Pitagorasa, wygłosił coś takiego: „kto nie wie o istnieniu liczb niewymiernych, ten nie jest godzien zwać się Grekiem” (tzn. człowiekiem cywilizowanym, w odróżnieniu od barbarzyńców); liczby niewymierne swym nieskończonym rozwinięciem ułamkowym kontaktują umysł ludzki z nieskończonością.

Są więc dobre powody filozoficzne, żeby uprawiać rachunek predykatów relacyjny, kontynuując tym zainicjowaną przez Greków cywilizację. Mamy też inne powody filozoficzne, a ponadto tehchnologiczne – dotyczące uzdolnienia robotów do rozwiązywania szczególnie trudnych kwestii.

§4. *O tym, jak relacyjny RP ujawnia w pewnych problemach niemoc robota (automatu) i moc umysłu.* Zdanie PAP podpada pod następujący schemat, w którym „xRy” czytamy „x jest w relacji R do y” (np. relacji większości).

[S1] $\forall x \exists y\, xRy$, np. $\forall x \exists y\; x > y$.

Czy z S wynika logicznie zdanie o następującej strukturze?

[S2] $\exists y \forall x\, xRy$, np. $\exists y \forall x\; x > y$.

Odpowiedź na tego rodzaju pytania potrafi dawać system RP/DS tj. taki którym rozstrzyga się o tautologiczności formuł RP metodą Drzew Semantycznych. Omawiają go artykuły wskazane w punktach 1-3 działu A7 w *Katalogu Serwisu Cafe Aleph* pod adresem: calculemus.org/CA/index.html. Każdy z tych trzech artykułów podaje (każdy w innym kontekście) próbę odpowiedzi na powyższe pytanie.

Ale w rozważanym przypadku system RP/DS, gdy pracuje w nim robot, nie spełnia naszych oczekiwań. Próbując w kolejnych krokach uzyskać odpowiedź, zamiast niej dostaje on odesłanie do punktu wyjścia, poczem sytuacja się powtarza i przybywają wciąż nowe tego rodzaju pętle.

W takim doświadczeniu zbywamy poglądową wiedzę na temat fundamentalnej różnicy między zachowaniami człowieka i robota. Robot doskonale się czuje w środowisku RP/DS. Dla wielce złożonych formuł w mig buduje odpowiednio rozgałęzione kolosalne drzewa, w których gubi się oko i uwaga człowieka. Ale z kwestią wynikania S2 z S1 sobie nie radzi. Niezmordowanie tworzy on niezliczone pętle i nie zna sposobu, żeby przewidzieć, czy zapętlanie kiedyś się skończy i warto dla tego celu dalej pracować, czy też nie ma szans na zakończenie, i wtedy można sobie dać spokój. Nie dochodzi więc ani do rozstrzygnięcia, ani do wyjaśnienia, czy rozstzygnięcie istnieje.

Człowiek natomiast szybko dochodzi do obu odpowiedzi. Po pierwsze, już po paru pętlach rozpoznaje regularny schemat ich powstawiania oraz to, że musi się on powtarzać bez końca. Zaprzestaje więc prób, przekonany o ich daremności. I tak rozwiązuje , jak mówi się technicznie, *problem stopu*, który postawił Turing i wykazał, że jest on nierozwiązywalny dla robota.

Po drugie, na pytanie, czy zachodzi w rozważanym przypadku wynikanie logiczne, człowiek (inaczej niż ma się rzecz z robotem) znajduje odpowiedź. Jest ona przecząca, ponieważ w dowodzie założeniowym nie wprost (a takie są wszystkie wykonywane w RP/DS) wynikanie logiczne zachodzi tylko wtedy, gdy na każdej gałęzi drzewa pojawi się para zdań sprzecznych. Świadczy to bowiem, że założenie (dowodu nie wprost) o braku wynikania prowadzi w każdym badanym przypadku do sprzeczności, musi więc być fałszywe, i tym samym prawdziwa jest jego negacja czyli stwierdzenie wynikania. Gdy więc jakaś gałąź nie ma końca, znaczy to, że nie występuje w niej sprzeczność, a gdy w jakimś przypadku negowanie wynikania nie rodzi sprzeczności, świadczy to o braku wynikania.

Skąd się bierze w takiej sytuacji przewaga umysłu ludzkiego nad robotem? Stąd, że umysł intuicyjnie przechodzi do metasystemu (podczas gdy algorytm czyli program więzi robota wewnątrz systemu), a ten ma odpowiednio mocniejsze założenia umożliwiające rozstrzygnięcie.

Na tak skrajnie prostym przykładzie dochodzimy do morału, że pewne problemy nierozstrzygalne algorytmicznie są rozstrzygalne intuicyjnie za pomocą procedury, która pod względem intersubiektywności i niezawodności nie ustępuje (lub ustępuje niewiele) algorytmowi. Tak rzeczy się mają z relacyjnym rachunkiem predykatów. Nie ma on waloru rozstrzygalności algorytmicznej, i ten wniosek można uznać za pesymistyczny dla robotów, ale optymistyczny dla ludzi, którzy mają szanse rozwijać wiedzę przez twórcze akty intuicji.

W dalszej zaś perspektywie zwiększają też one możliwości robotów, gdyż umysł ludzki potrafi przetwarzać swe intuicje na algorytmy i wyposażać w nie roboty, poszerzając tym strefę problemów rozwiązywalnych algorytmicznie. Jest to fakt doniosły filozoficznie, gdy dotyczy filozofii umysłu, a doniosły technologicznie, gdy wskazuje ważną ścieżkę rozwoju informatyki.

Daje wyraz temu zrozumieniu książka Kneale'ów „The Development of Logic", Oxford 1962, w której czytamy.

> „The distinction between theories which admit decision procedure and those which do not is very interesting philosophically, and it may have great practical importance in an age of computers." (s. 741).

Nie zbierzemy jednak takich owoców z ogrodu drzew semantycznych, jeśli poprzestając na rachunku monadycznym, zignorujemy problematykę predykatów relacyjnych. Tylko ona bowiem prowadzi do tak egzotycznego drzewa, jak to, które pozwala nam odróżnić algorytmiczną rozwiązywalność problemów od rozwiązywalności intuicyjnej. A jest to wielkiej wagi problem filozoficzny. Nie wydaje się więc, żeby warto było być monadystą. •