Mała encyklopedia logiki

Ossolineum

Redaktor naukowy: Witold Marciszewski

Autorzy:

Kazimierz Czarnota – K.Cz.
Witold Marciszewski – W.M.
Wiktor Marek – W.Mk
Zdzisław Pawlak – Z.P.
Jerzy Perzanowski – J.P.
Mikołaj Poletyło – M.P.
Barbara Stanosz – B.S.
Henryk Stonert – H.S.
Marek Tabin – M.T.
Ryszard Wójcicki – R.W.
Zdzisław Ziemba – Z.Z.

Mała encyklopedia logiki

Wyd. 2 zmienione

Wrocław · Warszawa · Kraków · Gdańsk · Łódź
Zakład Narodowy imienia Ossolińskich
Wydawnictwo · 1988

Układ graficzny oraz okładkę i obwolutę projektował
Krzysztof Racinowski

Redaktor Wydawnictwa
Janina Majerowa

Redaktor techniczny
Ryszard Ulanecki

Publikacja dotowana przez Ministerstwo Nauki, Szkół Wyższych i Techniki

© *Copyright by Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław 1986*

Printed in Poland

ISBN 83-04-01327-4

Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo.
Wrocław 1988. Wydanie II.
Nakład: 30 000 egz.
Objętość: ark. wyd. 30,60; ark. druk. 16, ark. A_1 – 21.
Papier offset. kl. III, 80 g, 70×100.
Oddano do składania 1986.06.03.
Podpisano do druku 1986.10 13.
Zakłady Graficzne w Gdańsku.
Zam. 1650. R-14.

Wprowadzenie do drugiego wydania

Słowniki, encyklopedie rozwijają się przez dziesiątki i setki lat, jak o tym świadczą dzieje Larousse'a, Webstera, czy wielkiej encyklopedii brytyjskiej. Wznawiając *Małą encyklopedię logiki* warto w takiej ewolucyjnej perspektywie spojrzeć na wprowadzone do niej zmiany. Intencją drugiego wydania jest zachowanie tych cech pierwszego, których użyteczność potwierdziła się w praktyce, a zarazem przedstawienie nowej tematyki i nowych ujęć, które, o ile się sprawdzą, wyznaczą kierunek rozwoju ewentualnym przyszłym wydaniom.

Co do zawartości pierwszego wydania (konsultowanego przez prof. Tadeusza Kotarbińskiego), to jego orientacja na tematy typowe dla piśmiennictwa polskiego oraz na logikę tradycyjną i pogranicze logiki z filozofią wydaje się być warta kontynuacji, brak jest bowiem nadal innych przeglądowych ujęć tej tematyki, a powinno takie ujęcie znaleźć się w przynajmniej jednej łatwo dostępnej publikacji. Z drugiej jednak strony, owe orientacje deformowały obraz logiki, zostawiając nieproporcjonalnie mało miejsca na związki logiki z matematyką oraz na nowsze rachunki logiczne, ważne także z filozoficznego i językowego punktu widzenia, a stosunkowo mało rozwijane u nas w kraju. Na całkowite usunięcie dysproporcji nie pozwoliły limity czasowe, poprzestano więc na rozwiązaniach cząstkowych, np. odpowiednim rozszerzeniu tematyki w takich hasłach, jak „Dedukcja naturalna", „Definicja normalna" czy „Rachunek kwantyfikatorów" oraz dołączeniu przynajmniej szkicowej informacji o różnych logikach intensywnie uprawianych ostatnimi czasy: logice dialogowej, logice kombinatorycznej, logice implikacji relewantnej itd.

Bardziej zdecydowane przesunięcie w kierunku ujęć formalnych dokonało się w innej pracy typu encyklopedycznego, którą można traktować jako komplementarną w stosunku do *MEL*. Jest to praca zbiorowa pod redakcją niżej podpisanego pt. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, nakład PWN. Zarys ten jest adaptacją książki wydanej wcześniej w języku angielskim pt. *Dictionary of logic as applied in the study of language. Concepts, methods, theories*, Haga 1981, Martinus Nijhoff (*MEL* pozostaje do niej w pewnym stosunku przyczynowym, jako powód oferty skierowanej przez wydawcę zagranicznego do autorów polskich). *Dictionary of logic* zawiera obszerne artykuły encyklopedyczne na pewne tematy potraktowane szkicowo w *MEL*; stąd wzięły się odesłania z *MEL* do owej publikacji angielskiej (oznaczanej skrótowo jako *Dic. of logic*), są to zarazem odsyłacze do odpowiednich artykułów w wersji polskiej (bezpośrednie odsyłanie nie było możliwe, ze względu na to, że wersja polska nie była gotowa w czasie pracy nad wznowieniem *MEL*).

Główne zmiany natury edytorskiej w stosunku do 1 wydania są następujące:

Wprowadzono indeks rzeczowy, który zastępuje hasła czysto odsyłaczowe z 1 wydania, a ponadto umożliwia dotarcie do wielu pojęć i ich kontekstów, nieosiągalne przy poprzedniej technice odnoszenia. Zawiera on także nazwiska. Z haseł biograficznych zostawiono tylko te, które odnoszą się do autorów już nieżyjących. W odniesieniu do innych autorów, indeks dostarcza tego, co w ich charakterystyce jest najważniejsze, mianowicie wskazuje na osiągnięte wyniki (omawiane w odpowiednich hasłach merytorycznych) i na ważniejsze publikacje (w wykazach literatury), w szczególności te, które się wiążą z tematyką *MEL*.

Odstąpiono w niektórych artykułach od jednolitej (w 1 wydaniu) notacji logicznej, a to z tą myślą, żeby dostarczyć przykładu funkcjonowania innej notacji, bardziej ekonomicznej, która oszczędza czas i wysiłek autorów, maszynistek, drukarzy, korektorów; notacja ta, zarzucona w Polsce na rzecz znacznie kosztowniejszej, wymagającej wielu ręcznych wpisów, wciąż utrzymuje się powszechnie w piśmiennictwie zachodnim. Jest to symbolika Peano-Russella, modyfikowana stosownie do wygody w tym lub innym punkcie (z reguły modyfikuje się ją przez zastąpienie kropek nawiasami); znajdzie ją Czytelnik w hasłach pisanych specjalnie do 2 wydania, np. „Dedukcja naturalna", „Rachunek kwantyfikatorów".

Co się tyczy budowy i rodzajów haseł, zachowano na ogół zasady przyjęte dla 1 wydania. Na typowe hasło składają się następujące elementy. 1. Tytuł, który stanowi zarazem termin podlegający wyjaśnieniu; szyk tytułów wielowyrazowych zachowuje zwyczajową kolejność wyrazów, np. „logika matematyczna" (a nie „matematyczna logika"). 2. Równoznaczniki terminu tytułowego, jeśli istnieją, podane są w nawiasie; tutaj podaje się też czasem grecką lub łacińską etymologię, o ile wnosi to coś do wyjaśnienia sensu. 3. W pewnych przypadkach podaje się dalej, w tymże nawiasie, termin, który jest przeciwstawny do tytułowego w tym sensie, że stanowi on dopełniający człon w podziale dychotomicznym; ów stosunek zaznacza się skrótem „vs" od łac. „versus" (przeciw), np.. **Definicja realna** (d. rzeczowa; vs d. nominalna). Natomiast zrezygnowano z podawania odpowiedników obcojęzycznych przy hasłach. Podaje się je

w indeksie terminów, nie będących tytułowymi, ale tylko angielskie, bo dla innych byłoby niezwykle trudno uzyskać kompletność (w języku angielskim powstają wciąż nowe terminy logiczne, dla których nie od razu tworzą się odpowiedniki w innych językach). Takie rozwiązanie powinno ułatwić przekłady tekstów logicznych z polskiego na angielski.

Następnym elementem w typowym haśle jest wyjaśnienie terminologiczne czy to w postaci ścisłej definicji, czy w formie bardziej swobodnej, poparte z reguły przykładami. Potem, ewentualnie, następuje porównanie wariantów znaczeniowych, historia zagadnienia itp. (zob. np. „Deskrypcja"). Gdy nie zagraża to nieporozumieniem rezygnuje się ze ścisłości definicji na rzecz zwięzłości. Tak np. wystąpi czasem krótkie „gdy" zamiast pedantycznego „wtedy i tylko wtedy, gdy"; pomija się też niekiedy formuły relatywizujące do języka itp.

Gdy omawiany termin ma więcej znaczeń, odróżnia się je cyframi w nawiasach okrągłych. Nawiązując w tym samym lub innym artykule do hasła zawierającego takie zróżnicowanie znaczeń, korzysta się z owego wskaźnika cyfrowego w roli odsyłacza. Inne odsyłacze mają postać gwiazdki poprzedzającej termin, do którego się odsyła; tę formę odsyłania stosuje się wewnątrz tekstu, dla zwrócenia uwagi, że „gwiazdkowany" termin posiada własne hasło. Odsyłacze na końcu hasła mają postać „zob." lub „zob. też" – to drugie w przypadku związku bardziej luźnego.

Na końcu artykułu podana jest literatura wykorzystana w opracowaniu lub polecana do dalszego studium. Rozróżnienie tych dwóch rodzajów odniesienia do literatury zaznacza się przejrzyściej w nowszych hasłach, pisanych do 2 wydania, gdzie sposób wykorzystania publikacji przez autora hasła widoczny jest z kontekstu, dzięki użyciu w tekście skrótowych opisów bibliograficznych, kierujących jednoznacznie do pełniejszego opisu zawartego w wykazie literatury na końcu hasła; np. „Rescher 1968" oznacza publikację Reschera z roku 1968, widniejącą w wykazie literatury.

Od opisanego wyżej typu haseł, dominującego ilościowo, różnią się hasła przeglądowe, z których jedne poprzestają na wyliczeniu pojęć i tematów danego działu lub teorii i odsyłają do haseł bardziej szczegółowych, drugie omawiają daną problematykę w całości. Pierwsze, np. „Metodologia nauk dedukcyjnych", odnoszą się do działów potraktowanych w *MEL* szerzej i dlatego mających ponadto opracowania szczegółowe; drugie, np. „Metodologia nauk empirycznych", odnoszą się do działów potraktowanych drugoplanowo, w których większość zagadnień została skondensowana w jednym artykule.

Osoby, którym należy się wdzięczność za pomoc w przygotowaniu pierwszej wersji *MEL* zostały wymienione we Wprowadzeniu do 1 wydania, obecnie zaś chciałbym uzupełnić pewien brak w ówczesnych podziękowaniach. Pisząc tamto wprowadzenie, nie mogłem jeszcze w pełni docenić zasług Wydawnictwa, które stały się widoczne po ukazaniu się książki drukiem. Jej kształt zewnętrzny potwierdził wysoki kunszt i oddanie dla spraw książki tego zespołu edytorskiego, któremu przewodziła w owym czasie p. Krystyna Chorzewska, a zadanie przygotowania maszynopisu realizowała z wielką kompetencją i starannością p. Janina Majerowa. Przyczyniły się one w istotny sposób do wypracowania tych rozwiązań edytorskich, o których można już powiedzieć, że zdały próbę czasu; kierująca zaś obecnie Redakcją p. Ludwika Zawadowska swoim zrozumieniem dla potrzeby ulepszeń przyczyniła się do nowych rozwiązań, które przedkłada się w obecnym wydaniu do osądu Czytelnika.

Witold Marciszewski

Wykaz skrótów cytowanej literatury

Ajdukiewicz: *JiP*	K. Ajdukiewicz: Język i poznanie. T. 1 1960. T. 2. 1965.
Ajdukiewicz: *Log. pragm.*	K. Ajdukiewicz: Logika pragmatyczna. 1965.
Ajdukiewicz: *Zarys*	K. Ajdukiewicz: Zarys logiki. 1956.
Beth: *Foundations*	E. W. Beth: The foundations of mathematics. 1959.
Br. phil.	British philosophy in the mid-century. Ed. C. A. Mace. 1957.
Carnap: *MaN*	R. Carnap: Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic. 1947 (wyd. 2 1956).
Carnap: *Symb. log.*	R. Carnap: Introduction to symbolic logic and its applications. 1958.
Carnap: *Syntax*	R. Carnap: Logische Syntax der Sprache. 1934.
Church: *Math. log.*	A. Church: Introduction to mathematical logic. 1956.
Dic. of logic	Dictionary of logic as applied in the study of language. Concepts, methods, theories. Ed. by W. Marciszewski. 1981.
Frege: *SuB*	G. Frege: Sinn und Bedeutung. „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik". 1892.
Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*	A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations of set theory. 1958 (wyd. 2 1973).
Grzegorczyk: *Log. mat.*	A. Grzegorczyk: Zarys logiki matematycznej. 1961 (nast. wyd. 1969, 1973).
Hilbert, Bernays: *Grundlagen*	D. Hilbert, P. Bernays: Grundlagen der Mathematik. T. 1. 1934. T. 2. 1939.
„JSL"	„The Journal of Symbolic Logic"
Kneale: *Development of logic*	W. Kneale, M. Kneale: The development of logic. 1962.
Kotarbiński: *Elementy*	T. Kotarbiński: Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk. 1929 (wyd. 2 1961).
Kotarbiński: *Kurs logiki*	T. Kotarbiński: Kurs logiki dla prawników. 1951 (liczne dalsze wyd.).
Kotarbiński: *Wykłady*	T. Kotarbiński: Wykłady z dziejów logiki. 1957.
Küng: *Ontology*	G. Küng: Ontology and the logistic analysis of language: an inquiry into contemporary views on universals. 1967.
LiJ	Logika i język. Studia z semiotyki logicznej. Wyd. J. Pelc. 1967.
LTN	Logiczna teoria nauki. Wybór artykułów. Wyd. T. Pawłowski. 1966.
Mill: *Syst. log.*	J. St. Mill: System of logic ratiocinative and inductive. 1843. Przekł. polski: System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej. 1962.
„*MMP*"	„Monatshefte für Mathematik und Physik"
Morris: *Foundations*	Ch. Morris: Foundations of the theory of signs. 1938.
Mostowski: *Log. mat.*	A. Mostowski: Logika matematyczna. 1948.
Pap: *Elements*	A. Pap: Elements of analytic philosophy. 1949.
Pawłowski: *Def. w humanist.*	T. Pawłowski: Tworzenie i definiowanie pojęć w naukach humanistycznych. 1978.
Popper: *Log. sc. disc*	K. Popper: The logic of scientific discovery. 1959. Przekł. polski: Logika odkrycia naukowego. 1977.
Principia	A. N. Whitehead, B. Russell: Principia mathematica. 1913. (wyd. 2 1927).
„Przegl. Filoz."	„Przegląd Filozoficzny".
Quine: *LPV*	W. V. O. Quine: From a logical point of view. 1953. Przekł. polski: Z punktu widzenia logiki. 1969.
Quine: *ML*	W. V. O. Quine: Mathematical logic. 1955. Przekł. polski: Logika matematyczna. 1974.
Rasiowa: *Wstęp*	H. Rasiowa: Wstęp do matematyki współczesnej. 1969.
Reichenbach: *Elements*	H. Reichenbach: Elements of symbolic logic. 1948. Duża część przeł. na polski w *LiJ*.
Rozpr. log.	Rozprawy logiczne. Księga pamiątkowa ku czci Kazimierza Ajdukiewicza. 1964.

Sem. pol.	Semiotyka polska. 1894–1969. Wyd. J. Pelc. 1971. Przekł. angielski: Semiotics in Poland. 1894–1969. Ed. by J. Pelc. 1979 (Reidel).
Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*	J. Słupecki, L. Borkowski: Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości. 1963 (wyd. 3 1969).
„St. Filoz."	„Studia Filozoficzne"
„St. Log."	„Studia Logica"
„St. Semiot."	„Studia Semiotyczne"
Suszko: *Wykłady*	R. Suszko: Wykłady z logiki formalnej. Cz. 1. 1965.
Tarski: *Pojęcie prawdy*	A. Tarski: Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. 1933.
Tarski: *Undec. theories*	A. Tarski in collaboration with A. Mostowski and R. M. Robinson: Undecidable theories. 1968.
Tarski: *LSM*	A. Tarski: Logic, semantics, metamathematics. Papers from 1923 to 1938. 1956.
Ziembiński: *Log. prakt.*	Z. Ziembiński: Logika praktyczna. Wyd. 8 1974.
Zinowjew: *Osnowy*	A. A. Zinowjew: Osnowy łogiczeskoj tieorii naucznych znanij. 1967.

Wykaz symboli logicznych

Symbol	Sposób użycia	Nazwa	Sposób odczytania	W haśle	Inne zapisy
		Klasyczny rachunek logiczny			
$p, q, r, \ldots$		zmienne zdaniowe		Rachunek zdań	
$\sim$	$\sim p$	znak negacji	nie p; nieprawda, że p	„	$\neg p$; p'; $\bar{p}$; Np
$\wedge$	$p \wedge q$	znak koniunkcji	p i q	„	$p.q$; $p \& q$; Kpq
$\vee$	$p \vee q$	znak alternatywy	p lub q	„	$p+q$; Apq
$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	znak implikacji	jeżeli p, to q	„	$p \supset q$; $p < q$; $p \Rightarrow q$; Cpq; $p \rightarrow q$
$\equiv$	$p \equiv q$	znak równoważności	p wtedy i tylko wtedy, gdy q	„	$p = q$; $p \leftrightarrow q$; $p \Leftrightarrow q$; Epq
/	p/q	znak dysjunkcji		„	Dpq
$x, y, z, \ldots$		zmienne indywidualne		Rachunek kwantyfikatorów	
$P, Q, R \ldots$	$P(x), Q(x, y)$	symbole reprezentujące predykaty	P od x, Q od x, y	„	
$\wedge$	$\wedge x$	kwantyfikator ogólny	dla każdego x	„	(x); $\forall x$; $\prod_x$
$\vee$	$\vee x$	kwantyfikator szczegółowy	dla pewnego x	„	$(\mathrm{E}x)$; $\exists x$; $\sum_x$
$=$	$x = y$	znak identyczności	x jest identyczny z y	Rachunek kwantyfikatorów; Identyczność	$x\mathrm{I}y$
$\neq$	$x \neq y$	znak różności	x jest różne od y	„	
		Teoria mnogości			
$A, B, C, \ldots$		zbiory		Rachunek zbiorów	
$\in$	$x \in X$		x jest elementem X	Teoria mnogości	
$\notin$	$x \notin X$		x nie jest elementem X	„	$x \bar{\in} X$
$\cap$	$A \cap B$	iloczyn zbiorów	A razy B	Rachunek zbiorów	$A.B$
$\cup$	$A \cup B$	suma zbiorów	A plus B	„	$A+B$
$\times$	$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów		Teoria mnogości	
$\doteq$	$A \doteq B$	zakresowa równość zbiorów		Rachunek zbiorów	$A = B$

Symbol	Sposób użycia	Nazwa	Sposób odczytania	W haśle	Inne zapisy
$-$	$A-B$	różnica zbiorów	A minus B	Rachunek zbiorów	
$-$	$A \div B$	różnica symetryczna zbiorów		„	
$'$	A'	dopełnienie zbioru		„	$-A$
Ø lub 0		zbiór pusty		„	$\wedge$
1		zbiór pełny		„	$\vee$
$\subset$	$A \subset B$	znak inkluzji	A zawiera się w B, A jest podzbiorem B	Teoria mnogości	$A \subseteq B$
$\subsetneq$	$A \subsetneq B$	znak inkluzji właściwej	A jest podzbiorem właściwym B	„	$A \subset B$
$\bigcap$	$\bigcap_{X \in Z} X$	iloczyn zbiorów rodziny Z		„	$\prod_{X \in Z} X$
$\bigcup$	$\bigcup_{X \in Z} X$	suma zbiorów rodziny Z		„	$\sum_{X \in Z} X$
	$Er(X, Y)$		X i Y wzajemnie się wykluczają	Teoria mnogości v. Neumanna...	
	$\overline{\overline{X}}$		moc zbioru X	Teoria mocy zbiorów	Card (X)
$\aleph_0$		alef zero	moc zbioru liczb naturalnych	„	
$\mathfrak{c}$		continuum	moc zbioru liczb rzeczywistych	„	
$\sim$	$X \sim Y$	znak równoliczności	zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y	„	
2^X		zbiór potęgowy	zbiór podzbiorów zbioru X	„	
	$Z(X)$		X jest zbiorem	Teoria mnogości	
	$\langle X, R \rangle$		zbiór X uporządkowany przez relację R	Teoria zbiorów uporządkowanych	
X^0			zbiór uporządkowany	„	
$\simeq$	$X^0 \simeq Y^0$		zbiór uporządkowany X^0 jest podobny do zbioru Y^0	„	
$\dashv$	$x \dashv_{X^0} y$		x poprzedza y w zbiorze X^0	„	

Symbol	Sposób użycia	Nazwa	Sposób odczytania	W haśle	Inne zapisy
	$\overline{X^0}$		typ porządkowy zbioru uporządkowanego X^0	Teoria zbiorów uporządkowanych	
α^*			typ porządkowy odwrotny do α	„	
ω			typ porządkowy zbioru liczb naturalnych	„	
η			typ porządkowy zbioru liczb wymiernych	„	
λ			typ porządkowy zbioru liczb rzeczywistych	„	
	$\{x, y\}$	para	zbiór złożony z x i y	Para nieuporządkowana	
	$\langle x, y\rangle$	para uporządkowana		Para uporządkowana	(x, y)
	$\{x_n\}$	ciąg		Ciąg	
	$\mathrm{R}(X)$	obraz zbioru		Obraz zbioru	
	$\mathrm{D}(R)$	dziedzina relacji		Dziedzina relacji	
	$\breve{\mathrm{D}}(R)$	przeciwdziedzina relacji		Przeciwdziedzina relacji	$\complement(R)$
	$\mathrm{P}(R)$	pole relacji		Pole relacji	
$R:S$	$xR:Sy$	iloczyn względny relacji		Teoria relacji	$R;S$
	R^{-1}	konwers relacji		„	$\breve{R}$
	$[y]_R$	klasa abstrakcji	zbiór takich x, że xRy	Klasy abstrakcji	
η	$(\imath x)f(x)$	deskrypcja	takie jedyne x, które jest f	Deskrypcja	i
	$R'b$	funkcja deskryptywna	taki jedyny przedmiot, który jest w relacji R do b	Funkcja deskryptywna	
	$\{x\|f(x)\}$	znak abstrakcji	zbiór takich x, że $f(x)$	Znak abstrakcji	$(\hat{x})f(x)$; $\{x:f(x)\}$; $\underset{x}{\mathrm{E}}f(x)$
λ	$\lambda(x)(F(x))$	λ – operator	funkcja opisywana przez formułę „$F(x)$"	Lambda-operator	
	$F:x\to y$	formuła funkcyjna	F przekształca x w y	Funkcja; Automat	$y = F(x)$

Symbol	Sposób użycia	Nazwa	Sposób odczytania	W haśle	Inne zapisy
			Inne teorie		
a	SaP	zdanie ogólnotwierdzące	każde S jest P	Sylogistyka zdań asertorycznych	
e	SeP	zdanie ogólnoprzeczące	żadne S nie jest P	„	
i	SiP	zdanie szczegółowotwierdzące	niektóre S jest P	Sylogistyka zdań asertorycznych	
o	SoP	zdanie szczegółowoprzeczące	niektóre S nie jest P	„	
ε	$a\varepsilon A$	epsilon ontologiczne	a jest A	Systemy Leśniewskiego	
	el(A)		element A	„	
$\vdash$	$\vdash \varphi$	znak asercji	φ jest tezą	Asercja	
$\dashv$	$\dashv \varphi$	znak odrzucania		„	
$\vdash$	$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash \varphi_n$	znak wynikania	φ_n jest konsekwencją $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$	Wynikanie inferencyjne	
	P(x)		prawdopodobieństwo zdarzenia x	Prawdopodobieństwo	
	P(x, y)	prawdopodobieństwo względne		„	P(x/y)
	kon(h, e)		stopień konfirmacji hipotezy h ze względu na przesłanki e	Konfirmacja; Logika indukcji	
$\Diamond$	$\Diamond p$	możliwość	możliwe, że p	Logika modalna; Logiki wielowartościowe	
$\Box$	$\Box p$	konieczność	konieczne, że p	„	
$\circ$	$p \circ q$	zgodność	p jest zgodne z q	„	
$\dashv\!\vdash$	$p \dashv\!\vdash q$	ścisła implikacja	jeżeli p, to mocno q	„	$p \Rightarrow q$
$=$	$p = q$	ścisła równoważność		„	
O	**O**(p)		p jest obowiązkowe	Logika deontyczna	
P	**P**(p)		p jest dozwolone	„	
F	**F**(p)		p jest zakazane	„	
$\rightarrow$	$S \rightarrow T$	sekwencja		Rachunek Gentzena	
S	**S**(a)		następnik x-a	Arytmetyka	seq (x); x'

Symbol	Sposób użycia	Nazwa	Sposób odczytania	W haśle	Inne zapisy
Q	Q_α	kwantyfikator uogólniony		Logiki uogólnione	
	•		typ logiczny rzędu 0	Teoria typów, prosta	
	(•)		typ logiczny rzędu 1	„	
	((•))		typ logiczny rzędu 2	„	

a priori (łac., to, co wcześniejsze; vs a posteriori). Zdanie (lub sąd) a priori jest to zdanie przyjęte 'na początku', bez powoływania się na doświadczenie, zdanie wyprzedzające wszelkie doświadczenie. Zdanie (sąd) a posteriori, to tyle, co: przyjęte 'później', tj. na podstawie doświadczenia.

Wedle jednych (Hume, neopozytywizm) zdanie a priori nie wyraża żadnej wiedzy o świecie, będąc jedynie rezultatem konwencji terminologicznych; zdanie a priori utożsamia się wówczas ze *zdaniem analitycznym. Wg innych (Kartezjusz, Leibniz, Kant, fenomenologia) istnieją zdania wyprzedzające wszelkie doświadczenia zmysłowe, a wyrażające przy tym wiedzę o realnym świecie – tzw. zdania syntetyczne a priori. Spór między tymi stanowiskami epistemologicznymi bywa obecnie formułowany w terminach semantyki przy pomocy takich zwrotów, jak „zdanie analityczne", „zdanie logicznie konieczne", „zdanie syntetyczne".

Zob. też o naukach apriorycznych i aposteriorycznych w haśle **klasyfikacja nauk.**

Pap: *Elements*; M. Schlick: *Is there a factual a priori?* [W]: H. Feigl, W. Sellars (eds): *Readings in Philosophical Analysis*. 1949.

W. M.

absurd. Wyrażenie wewnętrznie sprzeczne (tj. podpadające pod schemat „*p* i nie-*p*", „Istnieje takie *x*, że *x* jest *A* oraz *x* nie jest *A*", itp.), ewentualnie dające się na takie przekształcić za pomocą reguł wnioskowania. Tak np. ze zdania „Jan jest synem bezdzietnej matki" wynika zdanie „Pewna kobieta jest matką i nie jest matką". Od tak pojętego absurdu odróżnia się *nonsens jako wyrażenie nieskładne (*Spójność syntaktyczna). Absurd jest wyrażeniem sensownym; w przeciwnym wypadku nie można by stwierdzić zachodzenia sprzeczności. Powyższe odróżnienie jest propozycją terminologiczną, występującą m. in. w *Elementach* T. Kotarbińskiego. W potocznym użyciu terminy te bywają zamienne.

W. M.

Ajdukiewicz Kazimierz (1890–1963). W l. 1908–1913 studiował w Uniw. Lwowskim filozofię pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego, a także matematykę i fizykę; w 1912 uzyskał tam stopień doktora filozofii; w 1913/14 studiował w Getyndze filozofię u Edmunda Husserla i matematykę u Dawida *Hilberta. W 1920 uczył matematyki, fizyki i propedeutyki filozofii w szkolnictwie średnim. W 1921 habilitował się w Uniw. Warszawskim. Od 1922 docent w Uniw. Lwowskim, od 1925 prof. nadzwyczajny w Uniw. Warszawskim, od 1928 w Uniw. Lwowskim; od 1934 prof. zwyczajny. W czasie okupacji niemieckiej we Lwowie pracował w tajnym szkolnictwie. Od 1944 objął kierownictwo Katedry Fizyki w Lwowskim Instytucie Medycznym oraz wykłady logiki w Uniw. Lwowskim; w 1945–1955 kierownik Katedry Teorii i Metodologii Nauk w Uniw. Poznańskim oraz 1948–1952 rektor tego Uniw.; od 1955 do 1961 kierownik Katedry Logiki II, Wydziału Filozoficznego Uniw. Warszawskiego; organizator i 1955–1963 kierownik Zakładu Logiki w Inst. Filozofii i Socjologii PAN. Członek korespondent PAU, a od 1952 członek rzeczywisty PAN. W 1953 organizator i red. naczelny „Studia Logica"; członek komitetu red. kwartalnika „Logique et Analyse". Przewodniczący Polskiego Tow. Filozoficznego we Lwowie (1938–1939), a po wojnie przewodniczący Poznańskiego, a następnie Warszawskiego (do 1962) oddziału tego Towarzystwa; członek Międzynarodowego Instytutu Filozofii i wiceprzewodniczący Sekcji Logiki, Metodologii i Filoz. Nauki Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauk. Doktor h.c. Uniw. w Clermont-Ferrand.

Do najważniejszych i najpowszechniej znanych osiągnięć Ajdukiewicza należy dyrektywalna koncepcja *znaczenia z lat 30-tych; opierając się na tej koncepcji sformułował tzw. tezę radykalnego konwencjonalizmu, która głosiła, że naukowy obraz świata może zostać zmieniony przez odpowiednią zmianę aparatury pojęciowej. Poglądy jego ewoluowały w kierunku empiryzmu; w ostatnim okresie życia rozpoczął pracę nad semantyczną koncepcją znaczenia (nawiązując do Milla), która miała stanowić grunt dla uzasadnienia skrajnie empirystycznej koncepcji wiedzy. Od Ajdukiewicza pochodzi również pierwsze w Polsce (1920) sformułowanie strukturalnych definicji *dowodu, *wynikania i twierdzenia, które przygotowało grunt do sformułowania przez Tarskiego (1921) *twierdzenia o dedukcji, wszechstronne opracowanie problematyki definicji (w szczególności *definicji nominalnej jako środka przekładu), analiza zdań pytajnych (*Pytanie), *klasyfikacja rozumowań, opracowanie przejrzystego sposobu indeksowania *kategorii semantycznych oraz kryterium poprawności składniowej wyrażeń złożonych (*Spójność syntaktyczna), koncepcja racjonalności wnioskowań i in.; w zakresie logiki formalnej – opracowanie reguł odrzucania niepoprawnych trybów logiki tradycyjnej; w zakresie filozofii – wykorzystanie współczesnej aparatury logicznej dla krytyki różnych postaci idealizmu.

Ajdukiewicz napisał ponad 50 prac naukowych (w tym 7 podręczników) oraz wiele popularnonaukowych; do naj-

bardziej znanych należą: *O znaczeniu wyrażeń* 1930; *Sprache und Sinn* 1934; *Das Weltbild und die Begriffsapparatur* 1934; *Die Wissenschaftliche Weltperspektive* 1935; *Die Syntaktische Konnexität* 1935; *W sprawie pojęcia istnienia* 1951; *Zarys logiki* 1953; *Klasyfikacja rozumowań* 1955; *Okres warunkowy a implikacja materialna* 1956; *Zagadnienie racjonalności zawodnych sposobów wnioskowania* 1958; *Trzy pojęcia definicji* 1958; *Le problème du fondément des propositions analytiques* 1958; *The axiomatic systems from the methodological point of view* 1960; *Logika pragmatyczna* 1965.

Ajdukiewicz przyczynił się do rozwoju logiki polskiej nie tylko własnymi wynikami naukowymi, ale również działalnością pedagogiczną oraz wybitną aktywnością w zakresie inspiracji i organizacji badań naukowych.

aksjomat ekstensjonalności. Występujący w *teorii mnogości aksjomat ekstensjonalności głosi, że dwa zbiory o tych samych elementach są identyczne. Gdyby np. każdy łysy był mądry oraz każdy mądry był łysy, to zbiór łysych byłby tym samym co zbiór mądrych. Stosując oznaczenie $Z(X)$ do zapisania, że X jest zbiorem, aksjomat ten formułuje się następująco:

$$\wedge X \wedge Y\{Z(X) \wedge Z(Y) \rightarrow [\wedge y(y \in X \equiv y \in Y) \rightarrow X = Y]\}.$$

Zob. też **ekstensjonalność.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*

K. Cz.

aksjomat Nicoda-Łukasiewicza.

$$[p/(q/r)]/([s/(s/s)]/\{(s/q)/[(p/s)/(p/s)]\}).$$

Z formuły tej można uzyskać (stosując regułę odrywania dla dysjunkcji oraz regułę podstawiania) każdą tezę dysjunkcyjnego rachunku zdań, czyli ona sama stanowi aksjomatykę tego rachunku. Fakt ten wyraża się zwrotem, że powyższa formuła jest jedynym aksjomatem klasycznego rachunku zdań opartym na dysjunkcji, będącej jedynym terminem pierwotnym. Aksjomat ten jest uproszczeniem aksjomatu Nicoda (*Rachunek zdań – 3).

Używana w rachunku dysjunkcyjnym reguła odrywania dla dysjunkcji formułowana jest następująco: jeśli do systemu należy teza postaci $\alpha/(\beta/\gamma)$ oraz teza α, to można do systemu dołączyć tezę γ.

Zob. też **dysjunkcja.**

J. Łukasiewicz: *Uwagi o aksjomacie Nicoda.* [W:] – *Z zagadnień logiki i filozofii.* 1961.

K. Cz.

aksjomat nieskończoności. Przyjmowany w *teorii mnogości aksjomat, który stwierdza istnienie zbioru o nieskończonej ilości elementów. Formułuje się go np. w ten sposób, iż stwierdza się istnienie rodziny zbiorów X o takiej własności, że dla każdego zbioru do tej rodziny należącego znajduje się w niej zbiór większy. Symbolicznie ($Z(X)$ jest skrótem zwrotu „X jest zbiorem"):

$$\vee X\{Z(X) \wedge \vee x(x \in X) \wedge \wedge x[x \in X \rightarrow Z(x)] \wedge \wedge \wedge x[x \in X \rightarrow \vee y(y \in X \wedge x \subset y \wedge x \neq y)]\}.$$

Zob. też **zbiór nieskończony.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*

K. Cz.

aksjomat pary. Dla dowolnych elementów a, b istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są: a i b. Symbolicznie:

$$\wedge a \wedge b \vee X \vee x\{Z(X) \wedge [x \in X \equiv (x = a \vee x = b)]\}.$$

Innymi słowy, z dowolnych dwu elementów można utworzyć parę.

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości.* 1966.

K. Cz.

aksjomat sumy. Przyjmowany w *teorii mnogości aksjomat, który pozwala z dwóch dowolnych zbiorów utworzyć trzeci, złożony z wszystkich tych elementów, które należą przynajmniej do jednego z tych dwóch zbiorów. Symbolicznie ($Z(X)$ czytamy: X jest zbiorem):

$$\wedge X \wedge Y\{Z(X) \wedge Z(Y) \rightarrow \vee W[Z(W) \wedge \wedge x(x \in W \equiv \equiv x \in X \vee x \in Y)]\}.$$

Aksjomat ten formułuje się także ogólniej: istnieje suma zbiorów należących do dowolnej rodziny, czyli istnieje zbiór złożony z wszystkich elementów należących przynajmniej do jednego ze zbiorów zadanej rodziny. Symbolicznie:

$$Z(R) \wedge \wedge X\{[X \in R \rightarrow Z(X)] \rightarrow \vee W[Z(W) \wedge \wedge x(x \in W \equiv \equiv \vee X(X \in R \wedge x \in X))]\}.$$

Grzegorczyk: *Log. mat.*

K. Cz.

aksjomat ufundowania (a. regularności). Każdy niepusty zbiór A zawiera taki element B, że A i B nie mają wspólnych elementów. Symbolicznie:

$$\wedge A\{\vee x(x \in A) \rightarrow \vee B[(B \in A) \wedge \wedge y \sim (y \in A \wedge y \in B)]\}.$$

Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory.*

K. Cz.

aksjomat wyróżniania (a. podzbiorów). Przyjmowany w *teorii mnogości aksjomat, który stwierdza, że z dowolnego zbioru można wybrać podzbiór złożony z elementów spełniających pewien zadany warunek. Np. spośród emerytowanych pułkowników można wybrać grupę umiejących grać w wista.

$$Z(X) \rightarrow \vee Y[Z(Y) \wedge \wedge x\{x \in Y \equiv [x \in X \wedge \Phi(x)]\}],$$

gdzie $Z(X)$ czytamy: X jest zbiorem, zaś $\Phi(x)$ reprezentuje

dowolne wyrażenie zdaniowe opisujące jakąś własność przy czym $\Phi(x)$ nie może zawierać zmiennej Y, jako zmiennej wolnej. Istotne jest tu następujące ograniczenie tworzenia zbiorów na podstawie wyrażenia zdaniowego $\Phi(x)$: nie tworzy się zbioru wszystkich elementów spełniających jakiś warunek, ale elementy spełniające ten warunek wybiera się z danego zbioru. Ograniczenie to pozwala ominąć trudności w rodzaju antynomii Russella (*Antynomie w logice).

Grzegorczyk: *Log. mat.*

K. Cz.

aksjomat zastępowania. Jeśli dla każdego x istnieje dokładnie jedno y takie, że spełniona jest *funkcja zdaniowa $\Phi(x, y)$, to dla każdego zbioru A istnieje zbiór B, którego elementami są te i tylko te elementy y, dla których, przy pewnym $x \in A$, spełniony jest warunek $\Phi(x, y)$. Symbolicznie:

$$\wedge x \vee z \wedge y[\Phi(x, y) \equiv (y = z)] \rightarrow \wedge A \vee B \wedge y$$
$$Z(A) \wedge Z(B) \rightarrow \{y \in B \equiv \vee x[x \in A \wedge \Phi(x, y)]\}).$$

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966.

K. Cz.

aksjomat zbioru potęgowego (a. zbioru podzbiorów). Przyjmowany w *teorii mnogości aksjomat, który stwierdza, że dla dowolnego zbioru istnieje zbiór wszystkich jego podzbiorów. Np. zbiór trójelementowy złożony z liter a, b, c posiada następujące podzbiory: $0, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$, gdzie 0 oznacza zbiór nie zawierający żadnego elementu, czyli zbiór pusty. Symbolicznie ($Z(X)$ czytamy: X jest zbiorem):

$$Z(X) \rightarrow \vee Y(Z(Y) \wedge \wedge x\{x \in Y \equiv [Z(x) \wedge \wedge u(u \in x \rightarrow u \in X)]\}).$$

Zob. też **zbiór potęgowy.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*

K. Cz.

aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór X taki, że dla żadnego x nie jest: $x \in X$. Symbolicznie ($Z(X)$ czytamy: X jest zbiorem):

$$\vee X \wedge x[Z(X) \wedge \sim (x \in X)].$$

Czyli istnieje zbiór, który nie posiada żadnego elementu. Nazywa się go zbiorem pustym i oznacza symbolem 0, Ø lub $\wedge$.

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966.

K. Cz.

aksjomatyzowalność. Zbiór zdań X jest aksjomatyzowalny, gdy istnieje taki jego podzbiór Y, że zbiór konsekwencji zbioru zdań Y jest równy zbiorowi konsekwencji zbioru zdań X, czyli $\mathrm{Cn}(Y) = \mathrm{Cn}(X)$.

Gdy zbiór aksjomatów Y jest skończony, wtedy zbiór X nazywa się skończenie aksjomatyzowalnym. Każdy skończony zbiór zdań jest skończenie aksjomatyzowalny (można go traktować jako swoją aksjomatykę). Zbiór zdań jest skończenie aksjomatyzowalny, gdy jest równoważny z pewnym skończonym zbiorem zdań, zatem zbiór skończenie aksjomatyzowalny X jest niesprzeczny, gdy jego aksjomatyka jest niesprzeczna.

Istnieją zbiory zdań nieaksjomatyzowalne skończenie. Niektóre z nich aksjomatyzuje się poprzez podanie rekurencyjnego zbioru aksjomatów. Taki zbiór aksjomatów może być skończony lub nie. Zbiór zaksjomatyzowany w ten sposób zwiemy rekurencyjnie aksjomatyzowalnym. Np. w teorii mnogości występuje *aksjomat wyróżniania (czyli podzbiorów), który jest schematem. Wstawiając w nim za wyrażenie $\Phi(x)$ dowolną funkcję zdaniową (np. $x > 3$), otrzymujemy konkretny, pojedynczy aksjomat wyróżniania.

Jeśli teorię aksjomatyzowalną cechuje przy tym *zupełność (1) i *niesprzeczność, to jest ona także rozstrzygalna, w tym sensie, że dla każdego zdania lub dla jego negacji istnieje w niej *dowód.

Grzegorczyk: *Log. mat.*; D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. 1899; R. C. Lyndon: *O logice matematycznej*. 1968.

K. Cz.

alef zero $\aleph_0$. Hebrajską literą $\aleph$ ze znaczkiem zero oznacza się moc zbioru liczb naturalnych.

Zob. **teoria mocy zbiorów**; teoria zbiorów uporządkowanych.

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966.

K. Cz.

algebra Boole'a. Teoria ta wzięła swą nazwę od nazwiska matematyka ang. z XIX w. George Boole'a, który dostrzegł analogie pomiędzy prawami arytmetyki dotyczącymi takich działań, jak dodawanie, mnożenie, odejmowanie, a prawami myślenia rozumianymi jako twierdzenia działów logiki, które dzisiaj nazywamy rachunkiem klas, *rachunkiem zdań i rachunkiem relacji (*Teoria relacji). Boole podjął próbę zbudowania logiki formalnej, posługując się symboliką algebraiczną (ściślej mówiąc arytmetyczną), stąd logika tak uprawiana została nazwana *algebrą logiki, a jej działy stanowiły: algebra klas, algebra relacji i algebra zdań.

Boole zauważył, że symbole matematyczne oraz działania matematyczne mogą być rozważane z pominięciem ich sensu ilościowego, w sposób czysto formalny, i traktował pojęcia systemu dedukcyjnego w sposób abstrakcyjny. Te pomysły stały się punktem wyjścia dla współczesnej teorii abstrakcyjnej zwanej algebrą Boole'a.

Algebrę Boole'a (skrót: AB) można rozważać z punktu widzenia algebraicznego jako pewnego rodzaju strukturę (dziedzinę), bądź jako teorię tej struktury.

AB jako pewna struktura jest to zbiór niepusty, oznaczmy go literą A, dowolnych przedmiotów $x, y, z, \ldots$, o następujących własnościach:
a) w zbiorze A są dwa wyróżnione przedmioty: 0 i 1
b) na przedmiotach zbioru A są określone operacje: $x \cup y$, $x \cap y$, x', spełniające następujący układ aksjomatów:

[A1] $x \cup y = y \cup x$.
[A2] $x \cap y = y \cap x$.
[A3] $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.
[A4] $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.
[A5] $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.
[A6] $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.
[A7] $x \cup 0 = x$.
[A8] $x \cap 1 = x$.
[A9] $x \cup x' = 1$.
[A10] $x \cap x' = 0$.

Podana tu aksjomatyka AB pochodzi w zasadzie od E. V. Huntingtona (1904). Każdy z wyżej wymienionych aksjomatów oznaczonych numerem nieparzystym 1, 3, 5, ..., różni się od bezpośrednio po nim następującego aksjomatu parzystego 2, 4, 6, ... , tylko tym, że tam gdzie w jednym występuje symbol $\cup$, w drugim jest symbol $\cap$, a w miejscu symbolu 1 występuje symbol 0 i na odwrót. Własność ta nazywa się dwoistością lub *dualnością. O aksjomatach 1 i 2, 3 i 4, 5 i 6, itd. mówi się, że są względem siebie dualne (dwoiste).
Możliwe są inne układy aksjomatów algebry Boole'a złożone z większej lub mniejszej liczby aksjomatów.
Z wymienionych wyżej aksjomatów można wyprowadzić wiele twierdzeń AB, na przykład następujące:

[T1] $(x')' = x$.
[T2] $x \cup x = x$.
[T3] $x \cup 1 = 1$.
[T4] $(x \cap y)' = x' \cup y'$.
[T5] $0' = 1$.

Podobnie jak dla każdego aksjomatu algebry Boole'a istnieje dualny z nim inny aksjomat, tak dla każdego twierdzenia tejże teorii (w którym występuje przynajmniej jeden spośród symboli $\cup$, $\cap$, a mogą jeszcze występować symbole 1 i 0) istnieje twierdzenie z nim dualne. Dla twierdzeń [T2]–[T5] dualnymi są następujące twierdzenia:

[T6] $x \cap x = x$
[T7] $x \cap 0 = 0$
[T8] $(x \cup y)' = x' \cap y'$
[T9] $1' = 0$.

Interpretacje algebry Boole'a. Największą wartością teoretyczną AB jest możliwość interpretowania jej (*Interpretacja) w różnych teoriach, np. w rachunku zbiorów, w *rachunku zdań, w rachunku *prawdopodobieństwa, w teorii sieci elektrycznych.

Interpretację AB w rachunku zbiorów otrzymamy, gdy przez symbol 1 będziemy rozumieli niepusty zbiór indywiduów, tj. przedmiotów nie będących zbiorami, zmienne $x, y, z, \ldots$, potraktujemy jako nazwy podzbiorów zbioru 1, litera A będzie oznaczała klasę wszystkich podzbiorów zbioru 1, a symbol 0 będzie oznaczał zbiór pusty. Ponadto działania oznaczone symbolami $\cup$, $\cap$, $'$, będziemy rozumieli jako dodawanie, mnożenie i dopełnianie zbiorów, a uzyskane w wyniku tych operacji nowe zbiory $x \cup y$, $x \cap y$, x', odpowiednio, jako sumę zbiorów x i y, część wspólną zbiorów x i y, i dopełnienie zbioru x. Przy takim rozumieniu symboli AB wszystkie jej aksjomaty i twierdzenia z nich wyprowadzone staną się tezami algebry zbiorów. Interpretacja AB w rachunku zbiorów nazywana jest algebrą Boole'a zbiorów. Obejmuje ona wszystkie i tylko takie twierdzenia algebry zbiorów, które nie zawierają symbolu $\in$, oznaczającego przynależenie elementu do zbioru.
Interpretacja AB w rachunku zdań polega na rozumieniu poszczególnych symboli AB w następujący sposób:
A jako zbiór wszystkich wyrażeń sensownych rachunku zdań,
$x, y, z, \ldots$, jako zmienne zdaniowe, zwykle oznaczone literami $p, q, r, \ldots$,
$\cup, \cap, ', =$ jako alternatywę, koniunkcję, negację i równoważność – funktory rachunku zdań oznaczone często symbolami $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\equiv$,
1 – jako zdanie prawdziwe tautologicznie np. $p \vee \sim p$,
0 – jako zdanie fałszywe tautologicznie np. $p \wedge \sim p$.
Przy takim rozumieniu AB wszystkie tezy tej teorii stają się tezami rachunku zdań.

Przykłady:

[A1] $x \cup y = y \cup x$,	$p \vee q \equiv q \vee p$.
[A7] $x \cup 0 = x$,	$p \vee (p \wedge \sim p) \equiv p$.
[T1] $(x')' = x$,	
[T5] $0' = 1$,	

Tezy zamieszczone w prawej kolumnie są interpretacją w rachunku zdań tez AB występujących w lewej kolumnie, w tym samym wierszu.
AB ma jeszcze szereg innych interpretacji. Niektóre z nich mają doniosłość praktyczną, np. są pomocne przy projektowaniu maszyn matematycznych.

G. Boole: *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probability*. 1854; B. V. Huntington: *Set of independent postulates for the algebra of logic*. „Trans. Amer. Math. Soc." V 1904; Kotarbiński: *Wykłady*; Mostowski: *Log. mat.*, A. W. Mostowski: *Algebry Boole'a i ich zastosowanie*. 1964; R. Sikorski: *Boole'an Algebras*. 1964. Suszko: *Wykłady*.

M. P.

algebra logiki. Termin ten używany jest obecnie wyłącznie w sensie historycznym. W drugiej połowie XIX i na początku XX w. algebrą logiki nazywano logikę formalną uprawianą na wzór algebry liczb, przy użyciu jej symboli:

dodawania, mnożenia i odejmowania, których sens odpowiednio modyfikowano. Inicjatorami takiego podejścia do logiki byli: G. Boole i A. de Morgan. Idee te rozwijali następnie Peirce, Schröder, Jevons, Venn i in. Algebra logiki była jednym z nurtów, z których wyrosła współczesna *logika formalna.

Zob. też **algebra Boole'a.**

T. Czeżowski: *Logika*. 1949. Kotarbiński: *Wykłady*; E. Schröder: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. 1890; Suszko: *Wykłady*.

M. P.

algorytm. Metoda rozwiązywania określonego typu zagadnień, posługująca się językiem symbolicznym, np. matematycznym lub logicznym, podająca zbiór przepisów postępowania, określających dokładnie kolejno następujące po sobie czynności, które należy wykonać, aby rozwiązać zagadnienie pewnego typu. Przykładem algorytmu jest *metoda zero-jedynkowa sprawdzania formuł rachunku zdań.

Zob. też **automat.**

W. Głuszkow: *Wstęp do cybernetyki*. 1967; A. Grzegorczyk: *Zagadnienia rozstrzygalności*. 1957; W. H. Turski: *Propedeutyka informatyki*. 1975.

M. P.

alternatywa (a. niewyłączająca, suma logiczna). Zdanie (lub *funkcja zdaniowa) utworzone z innych zdań za pomocą *funktora ekstensjonalnego „ $\vee$ " z *rachunku zdań. Symbol ten przyjęło się odczytywać słowem „lub", choć nie w każdym kontekście potoczny sens „lub" pokrywa się z sensem symbolu logicznego „ $\vee$ ". Alternatywa jest zdaniem prawdziwym, gdy przynajmniej jedno z jej zdań składowych jest prawdziwe. Wyraża to następująca matryca (tabelka) *klasycznego rachunku zdań, w której symbole 1, 0 oznaczają, odpowiednio, wartości logiczne prawdy i fałszu:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Charakterystykę alternatywy przy większej liczbie wartości logicznych podają *logiki wielowartościowe. Alternatywę zapisuje się też za pomocą notacji: $p+q$, Apq.

W. M.

amfibolia (amfibologia). Wyrażenie wieloznaczne na skutek tego, że dopuszcza co najmniej dwa sposoby rozumienia jego struktury. Np. zwrot „metody wychowania zwycięzców" można rozumieć bądź tak, że „zwycięzców" będzie przydawką dopełniaczową do „metody", bądź tak, że będzie dopełnieniem do słowa „wychowanie". Zdanie „Część programu całkowicie nie została wykonana" może znaczyć, że część została całkowicie nie-wykonana, bądź też, że część została nie-całkowicie wykonana. Przed amfibolią chronią przemyślane rozmieszczenie wyrazów (szyk zdania) i wykorzystywanie znaków interpunkcyjnych, takich jak przecinki, nawiasy, myślniki itp.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

analiza logiczna. Metoda polegająca na zastosowaniu środków logicznych do kontroli sensowności lub prawdziwości twierdzeń, do kontroli poprawności rozumowań lub do *eksplikacji (wyjaśniania) pojęć w terminach zaczerpniętych z logiki (szeroko pojętej). Często stosowana do tradycyjnych twierdzeń lub pojęć filozofii, stąd także nazwa analizy filozoficznej lub filozofii analitycznej. Do najczęściej spotykanych należą następujące formy analizy:

1. Badanie poprawności formalnej rozumowań dedukcyjnych przez znajdowanie formuły będącej schematem logicznym danego rozumowania: na miejscu stałych wyrażeń zdaniowych lub nazwowych pisze się odpowiednie zmienne, a pozostałe wyrażenia („każdy", „jest", spójniki międzyzdaniowe itp.) przekłada się na odpowiednie stałe logiczne. Jeśli otrzymana w ten sposób formuła jest prawem logiki, badane rozumowanie okazuje się poprawne. Zamiast z praw logiki można korzystać z odpowiadających im reguł (*Dedukcja naturalna). Przykłady analiz: J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej* 1929.
2. Badanie *sensowności empirycznej zdań. Procedura ta posiada różne odmiany, w zależności od tego, jaką się przyjmuje teorię sprawdzalności, czyli jak określa się związki logiczne, które winny łączyć zdanie Z ze zdaniami obserwacyjnymi, aby zagwarantować sensowność empiryczną Z. Klasyczny przykład: krytyka metafizyki przez Carnapa (*Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache*, „Erkenntnis" R.2: 1940 z. 4).
3. Precyzowanie sensu (*Eksplikacja) twierdzeń lub problemów drogą przekładu terminów niejasnych lub niewyraźnych na terminy wolne od tych usterek, zaczerpnięte z języka ściślejszego, a w szczególności z języka (szeroko pojętej) logiki. M. in. problemy epistemologiczne przekłada się na sformułowania semantyczne lub metodologiczne, np.: spór aprioryzmu z empiryzmem sformułowany w terminach teorii zdań analitycznych, problem idealizmu w formułowaniu semantycznym (Ajdukiewicz: *JiP* t. 1).

Wokół analizy logicznej toczy się dyskusja, dotycząca m. in. następujących problemów: Co się tyczy 1. — kwestionuje się adekwatność przekładu spójników i operatorów potocznych na stałe logiczne. Do 2. odnoszą się znane

trudności ze sformułowaniem zasady *sprawdzalności empirycznej. Pod adresem 3. wysuwa się trudność znaną jako paradoks analizy (pochodzący od G. E. Moore'a): wyrażenie, którym zastępujemy zwrot niejasny, jest bądź równoznaczne z zastępowanym i wtedy podziela się niejasność, sama zaś analiza staje się niecelowa; bądź też nie jest równoznaczne z zastępowanym, ale wtedy analiza prowadzi do fałszu, orzeka się w niej bowiem identyczność o dwóch pojęciach nieidentycznych. (Zob. P. A. Schilp (ed.): *The philosophy of G. E. Moore*. 1942; Pap; *Elements*).

W. M.

antylogizm. Układ trzech zdań, takich że z każdej pary zdań tej trójki wynika zdanie sprzeczne z pozostałym zdaniem. Antylogizm można otrzymać z sylogizmu zastępując w nim konkluzję zdaniem z nią sprzecznym. W przypadku sylogizmu Barbara będzie to trójka zdań typu: *MaP* (każde *M* jest *P*), *SaM* (każde *S* jest *M*), *SoP* (niektóre *S* nie są *P*). Przykładem rozumowania, w którym występuje antylogizm, jest dowodzenie nie wprost stosowane w tzw. *redukcji trybów sylogistycznych.

M. P.

antynomie w logice. Antynomia (paradoks) jest to para zdań, z których każde w równym stopniu zasługuje na przyjęcie, lecz jednocześnie są między sobą sprzeczne i dlatego nie można przyjąć obu. Najwyraźniejszym przypadkiem antynomii jest para zdań między sobą sprzecznych, w której każde zdanie wynika z drugiego. Do takich należą antynomie rozważane w logice. F. P. Ramsey (1926) rozróżnił w logice dwa rodzaje antynomii: logiczne i semantyczne. Antynomie logiczne można także nazwać teoriomnogościowymi, ponieważ występuje w nich pojęcie zbioru, gdy w antynomiach semantycznych istotną rolę odgrywają pojęcia: *oznaczania, odnoszenia się itp.

Jako przykład antynomii logicznych zostaną przedstawione niektóre paradoksy pochodzące od Russella i od Cantora. Z innych wspomnieć należy często cytowany paradoks największej liczby porządkowej pochodzący od Burali-Fortiego (zob. Mostowski). Jako przykład antynomii semantycznych zostaną omówione tezy: Grellinga, Richarda i tzw. paradoks kłamcy.

1. Russella antynomia klas. O każdy zbiór (klasę) można pytać, czy jest on swoim własnym elementem. W przypadku zbioru ludzi odpowiedź będzie, oczywiście, negatywna. Ale już zbiór wszystkich zbiorów, a więc taki, którego elementami są zbiory, sam będąc zbiorem jest (jak można sądzić) swym własnym elementem. Są więc takie zbiory, które są własnymi elementami, i takie, które nimi nie są. Te drugie tworzą zbiór – nazwijmy go Z – zbiorów nie będących własnymi elementami. Powstaje pytanie: czy Z jest własnym elementem. Symbolicznie: Czy $Z \in Z$? Z odpowiedzi twierdzącej wynika przecząca i odwrotnie. Jeśli bowiem Z jest własnym elementem, to nie należy do Z (do którego należą tylko zbiory nie będące swoimi elementami); a zatem nie należy do siebie, czyli nie jest własnym elementem. Jeśli natomiast Z nie jest elementem Z, a więc nie jest własnym elementem, to spełnia warunek nałożony na zbiory należące do Z; a więc należy do Z, czyli jest swym własnym elementem.

Powstaniu tego paradoksu zapobiegają ograniczenia nałożone na składnię języka (reguły konstruowania wyrażeń) w *teorii typów. W inny sposób zapobiega antynomiom aksjomatyczna *teoria mnogości.

2. Cantora antynomia zbioru podzbiorów. Zbiór podzbiorów dowolnego zbioru X (czyli zbiór potęgowy 2^X) jest liczniejszy niż sam zbiór X. Twierdzenie to, pochodzące od Cantora, nazwijmy twierdzeniem C. Rozważmy teraz zbiór wszystkich zbiorów; niech nazywa się on U. Jest on, z samego założenia, najliczniejszy ze wszystkich zbiorów, ponieważ obejmuje je wszystkie jako elementy. Ale na mocy twierdzenia C zbiór jego podzbiorów jest jeszcze odeń liczniejszy. A więc U jest i nie jest najliczniejszym spośród zbiorów. Zob. też **aksjomat zbioru potęgowego.**

3. Antynomia Grellinga. Odróżnia się *orzeczniki autosemantyczne i *orzeczniki heterosemantyczne. Pierwsze orzekają o sobie samych, jak np. przymiotnik „wielosylabowy" (przymiotnik ten orzeka o sobie, ponieważ jest sam wielosylabowy). Drugie nie orzekają o sobie samych (np. „jednosylabowy"). Powstaje pytanie: czy orzecznik „heterosemantyczny" sam jest heterosemantyczny? Z odpowiedzi twierdzącej wynika, że nie jest, a z odpowiedzi przeczącej wynika, że jest.

Antynomii tej, należącej do semantycznych, jak również następnym zapobiega odróżnienie języka od *metajęzyka.

4. Antynomia Richarda powstaje w sposób następujący. Tworzy się listę definicji określających różne własności arytmetyczne, np.: Własność bycia liczbą pierwszą = niepodzielność przez żadną liczbę z wyjątkiem 1 i siebie samej. Listę tę porządkuje się w pewien sposób, np. w kolejności od najkrótszej (w sensie ilości liter) do najdłuższej definicji. Każdą pozycję z tak uporządkowanej listy opatrujemy kolejnym numerem. W ten sposób każdej definicji przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba naturalna. Może się teraz zdarzyć, że liczba przyporządkowana danej definicji posiada tę akurat własność, którą owa definicja określa; niech np. definicja bycia liczbą pierwszą, podana wyżej, ma numer 17. Jest to liczba posiadająca tę własność, do której się odnosi definicja siedemnasta. Poza tym są, oczywiście, przypadki, gdy liczba przyporządkowana definicji nie ma własności określonej przez definicję; takie liczby nazwijmy Richardowskimi, a o pozostałych (takich jak 17 w powyższym przykła-

dzie) będzie się mówić, że nie są Richardowskie. Określenie liczby Richardowskiej określa pewną własność liczb, znajdzie się więc również na owej liście definicji wraz z jakimś przyporządkowanym mu numerem. Czy ów numer będzie wtedy liczbą Richardowską? – Oto pytanie prowadzące do antynomii. Jeśli jest to liczba Richardowska, to nie ma własności określonej przez daną definicję, a więc nie jest Richardowska. Ale jeśli nie jest Richardowska, to ma własność określoną przez definicję, jest zatem Richardowska.

5. Antynomia kłamcy ma wiele wersji. W najprostszej, sięgającej czasów starożytnych, da się przedstawić tak. Ktoś wygłasza zdanie: „To, co w tej chwili mówię, jest kłamstwem". Jeśli istotnie jest to kłamstwo, to mówiący powiedział prawdę, a więc nie jest kłamstwem. Ale jeśli nie jest kłamstwem, a mówiący twierdzi, że jest, to w takim razie to co twierdzi, jest kłamstwem. Szczegółową analizę antynomii kłamcy i środków zaradczych podaje Tarski.

Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Mostowski: *Log. mat.*; E. Nagel, J. R. Newman: *Twierdzenie Gödla*. 1966 (seria Omega); Tarski: *Pojęcie prawdy*.

W. M.

ars combinatoria (łac. sztuka kombinatoryjna). Sztuka tworzenia pojęć złożonych w wyniku kombinacji prostych pojęć pierwotnych. Program takiej umiejętności został przedstawiony przez Leibniza w dziele *De arte combinatoria* (1666), nie został jednak przez autora zrealizowany. Umiejętność ta miała się przyczynić do budowy uniwersalnego języka nazwanego przez Leibniza *Characteristica universalis.

W. M.

ars magna (łac. sztuka wielka). Projektowana przez Rajmunda Lullusa (1235–1315) nauka o najwyższym stopniu ogólności, z której miały dać się wywieść podstawowe twierdzenia wszelkich nauk, nie wyłączając metafizyki i logiki. Idee te zostały przedstawione w dziele *Ars magna et ultima*. Terminem „ars magna" określa się także urządzenie złożone z obracających się niezależnie współśrodkowych kół, skonstruowane przez Lullusa w celu mechanicznego rozwiązywania problemów poprzez łączenie w odpowiedni sposób pojedynczych wyrazów rozmieszczonych na kołach. Pomysły te znane były Leibnizowi, który rozwinął je w swym projekcie uniwersalnego języka i uniwersalnego rachunku.

Zob. też **characteristica universalis.**

Kotarbiński: *Wykłady*.

W. M.

Arystoteles ze Stagiry (384–322 p.n.e.; Grecja). Filozof i przyrodnik. Studiował w Akademii w Atenach od 367 jako uczeń Platona. W tejże Akademii przebywał później jako badacz i nauczyciel przez 20 lat. W 343 został wychowawcą Aleksandra Wielkiego. Po opuszczeniu dworu macedońskiego założył w 335 własną szkołę filozoficzną w Atenach (nazywaną później szkołą perypatetycką albo Likeionem); kierował nią do 323.

Arystoteles skonstruował pierwszy w dziejach system logiki formalnej, mianowicie *sylogistykę zdań asertorycznych łącznie z pewnymi prawami *wnioskowania bezpośredniego; wniósł także pewne idee do *logiki modalnej (*Analityki pierwsze*). Wprowadził pojęcie indukcji (*Logika indukcji), zaproponował *klasyfikację rozumowań, zapoczątkował teorię definicji, zwanej później *definicją klasyczną (*Analityki wtóre*).

W. M.

arytmetyka.

1. Część matematyki zajmująca się badaniem systemów liczbowych, w szczególności liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych etc. Posiada szereg własnych typowych metod oraz wielką ilość wyników specyficznych. Jest jedną z najstarszych gałęzi matematyki.

2. Teoria badana i stosowana w podstawach matematyki.

(a) Aksjomatyka Peano; oparta jest na jednym symbolu funkcyjnym $S(x)$ oraz stałej 0.

Lista aksjomatów:

[1] $\wedge x \vee y[y = S(x)]$.

[2] $\wedge x[0 \neq S(x)]$.

[3] $\wedge x \wedge y[S(x) = S(y) \rightarrow x = y]$.

[4]$_{\Phi}$ $\Phi(0) \wedge \wedge x[\Phi(x) \rightarrow \Phi(S(x))] \rightarrow \wedge x\Phi(x)$.

Wyrażenie [4]$_{\Phi}$ jest schematem aksjomatu, dla każdej formuły Φ mamy oddzielny aksjomat (a więc aksjomatyka Peano jest nieskończona). Schemat [4]$_{\Phi}$ można zastąpić następującym jednym aksjomatem drugiego rzędu, rezygnując ze sformułowania teorii w języku elementarnym.

[4′] $\wedge P\{P(0) \wedge \wedge x[P(x) \rightarrow P(S(x))] \rightarrow \wedge xP(x)\}$.

Aksjomat [4′] nazywany jest aksjomatem indukcji, zaś schemat [4]$_{\Phi}$- schematem indukcji.

(b) System arytmetyki naturalnej **Ar**; różni się od aksjomatyki Peano tym, że dodajemy do niej nowe aksjomaty zawierające *definicje indukcyjne dla dodawania i mnożenia oraz rozszerzamy schemat [4] na formuły zawierające (prócz symboli S oraz 0) „+" i „·".

[5] $\wedge x(x+0 = x)$.

[6] $\wedge x \wedge y[x+S(y) = S(x+y)]$.

[7] $\wedge x(x \cdot 0 = 0)$.

[8] $\wedge x \wedge y[x \cdot S(y) = x \cdot y + x]$.

Tak zdefiniowany system arytmetyki jest nierozstrzygalny i niezupełny – jest to treść zasadniczych twierdzeń udowodnionych przez K. Gödla (*Rozstrzygalność, *Zupełność). Jest on nawet istotnie nierozstrzygalny, tj. każde niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki jest nierozstrzygalne. W arytmetyce można sformułować zdanie o jej

własnej niesprzeczności, jednakże zdanie to jest na gruncie systemu **ar** nierozstrzygalne.

Spośród modeli arytmetyki wyróżniamy dziedzinę:

$$\mathfrak{y} = \langle \mathrm{N}, \mathrm{S}, 0, +, \cdot \rangle,$$

gdzie N jest zbiorem naturalnym, zaś S, 0. +, · przyjmują swe zwykłe znaczenie. Nazywamy ją standardowym modelem dla arytmetyki. Zgodnie z twierdzeniem Skolema-Löwenheima arytmetyka posiada modele dowolnej mocy, a więc oczywiście modele niestandardowe. Teoria **Ar** nie jest kategoryczna (*Kategoryczność teorii) w mocy przeliczalnej. Co więcej, istnieją niestandardowe przeliczalne modele arytmetyki, będące elementarnymi rozszerzeniami modelu n. Naturalny porządek w standardowym modelu dla arytmetyki ma typ porządkowy ω, w przeliczalnym modelu niestandardowym porządek ten jest typu $\omega+(\omega^*+\omega)\eta$. W badaniach teorii **Ar** poważną rolę odgrywa teoria funkcji obliczalnych (*Funkcje rekurencyjne). Aksjomatyka Peano sformułowana w języku drugiego rzędu (tj. oparta na aksjomatach [1], [2], [3], [4']) jest kategoryczna.

K. J. Barwise et al. (ed.): *Handbook of mathematical logic*. 1977; Grzegorczyk: *Log. mat.*; S. C. Kleene: *Introduction into matemathematics*. 1952; W. Sierpiński: *Teoria liczb*, T. 1 i 2. 1960.

W. Mk

arytmetyzacja składni. Zabieg polegający na tym, że każdemu wyrażeniu systemu formalnego przyporządkowuje się pewien numer (*Numery Gödla). Dzięki temu, badając własności liczb i stosunki zachodzące między liczbami, można dochodzić do twierdzeń o własnościach wyrażeń i stosunkach między nimi zachodzących.

Zob. też **twierdzenie Gödla.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*

W. M.

asercja. Własność sądów przeżywanych z przekonaniem, różniąca je od sądów tylko pomyślanych (zwanych też sądami przedstawionymi lub supozycjami). Wyraźnym przypadkiem sądu bez asercji jest każdy taki sąd, który odrzucamy jako fałszywy lub taki, wobec którego zawieszamy rozstrzygnięcie. Wyraźnym przypadkiem sądu z asercją jest przekonanie podtrzymywane z całą pewnością. Pomiędzy tymi granicami rozciąga się skala różnych stopni przypuszczania, wątpienia etc., o których trudno niekiedy stwierdzić, czy należą do sądów przedstawionych, czy wydanych. Analiza tego rodzaju stanów ważna jest dla pewnych działów psychologii, estetyki (odbiór dzieła literackiego) itp. Badania nad asercją, związane z odróżnieniem sądów wydanych i sądów tylko pomyślanych, znajdują się m. in. w pracach A. Meinonga, K. Twardowskiego, W. Witwickiego, R. Ingardena.

W logice formalnej pojęcie asercji pojawia się w związku z tzw. znakiem asercji (ang. assertion sign), którym pewni autorzy poprzedzają tezy uznane w danym systemie za prawdziwe. Znak ten, w kształcie „$\vdash$" wprowadził G. Frege (1879), pisząc „$\vdash A$" dla zaznaczenia, że „A" jest uznawane. Frege używał ponadto poziomej kreski „$-$" dla zaznaczenia braku asercji; wyrażenie zdaniowe „A" poprzedzone taką kreską przybiera charakter nazwy, którą można czytać „że A" lub „to, że A". Pozbawione asercji są m. in. zdania zależne, jak np. następująca po kresce część zdania „Cezar powiedział – że kości są rzucone" (w późniejszych pismach Frege zmodyfikował sens owej kreski).

Znak asercji został też zastosowany w *Principia*, gdzie jest charakteryzowany w taki sposób: „Jest on potrzebny dla odróżnienia samodzielnych zdań (complete propositions), które są w tamtych zawarte, lecz nie podlegają uznawaniu... Zdanie nie poprzedzone tym znakiem jest formułowane tylko dla rozważenia lub jako część zależna jakiegoś zdania uznawanego". Przykład tezy ze znakiem asercji: $\vdash \wedge x(x = x)$. Taki sam znak „$\vdash$" używany jest w *Principia* w jeszcze innym znaczeniu, gdy poprzedza on formułę ze zmiennymi wolnymi; wskazuje on wówczas, że następująca po nim formuła jest spełniona przy wszelkich podstawieniach.

Nie jest ona zdaniem (choć można otrzymać z niej zdanie przez dołączenie dużego kwantyfikatora), a więc funkcja znaku asercji jest w tym przypadku inna. Przykład takiej formuły: $\vdash x = x$.

J. Łukasiewicz w pracy *System logiki modalnej* wprowadził także znak odrzucania, pisany „$\dashv$" (znak asercji obrócony o 180°).

Możliwe są co najmniej dwie interpretacje znaku asercji: pragmatyczna, wedle której znak asercji wyraża przekonanie, nie pełniąc przy tym funkcji semantycznej (is expressive but not denotative), oraz interpretacja, wedle której znak asercji odczytuje się jako predykat metajęzykowy „jest tezą" lub „jest tautologią"; argumentem owego predykatu jest nazwa wyrażenia poprzedzanego przez znak asercji. Interpretacja pragmatyczna reprezentowana jest przez Reichenbacha.

Znak asercji lub inny wskaźnik uznawania jest zbędny tam, gdzie przyjmuje się wyraźną lub milczącą umowę, że nie będzie się w danych okolicznościach wygłaszać zdań, których nie uznaje się za prawdziwe; przy takiej umowie wygłaszając zdanie, którego się nie uznaje, trzeba je zaopatrzyć w jakiś wskaźnik braku asercji. Tak postępuje się często w mowie potocznej, nie troszcząc się o to, by każdy nasz pogląd wygłaszać np. z intonacją świadczącą o przekonaniu: specjalna intonacja lub inne podobne znaki bywają potrzebne dopiero wtedy, gdy odmawia się uznawania wygłaszanym przez siebie zdaniom. Podobnie w tekstach logicznych poprzestaje się często na napisaniu uznawanej tezy z jej kolejnym numerem; działa tu umowa, że

nie pisze się numerowanych tez, które nie byłyby w danym systemie uznawane.

Ajdukiewicz: *Log. pragm*; I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956 odc. 41.11; G. Frege: *Begriffsschrift*. 1879; W. Marciszewski: *Podstawy logicznej teorii przekonań*. 1972; A. Meinong: *Über Annahmen*. 1902; Mostowski: *Log. mat.* rozdz. II; J. Pelc: *O wartości logicznej i charakterze asertywnym zdań w dziele literackim*. „Estetyka". I: 1960; Reichenbach: *Elements; Principia*, (rozdz. 1) oraz *1.

W. M.

automat.

1. Informacje ogólne. Przez automat rozumiemy albo urządzenie techniczne wykonujące samoczynnie, w sposób z góry zaplanowany przez konstruktora, określone czynności (bądź urządzenie techniczne reagujące w z góry ustalony sposób na różne sytuacje, w których może się ono znaleźć), albo też pojęcie abstrakcyjne stosowane w logice, matematyce, lingwistyce, biologii, psychologii i teorii maszyn matematycznych.

W dalszym ciągu będziemy rozumieli przez automat pojęcie abstrakcyjne, natomiast urządzenia techniczne działające w sposób automatyczny będziemy nazywali urządzeniami automatycznymi.

Pierwsze urządzenia automatyczne znane były w starożytności. Jako punkt zwrotny w rozwoju urządzeń automatycznych przyjmuje się zazwyczaj wynalezienie przez Watta (1736–1819) samoczynnie działającego regulatora obrotów maszyny parowej. Obecnie najbardziej złożonymi urządzeniami automatycznymi są elektroniczne maszyny liczące.

Warto zwrócić uwagę na dwa aspekty zastosowań urządzeń automatycznych: energetyczny oraz informacyjny. Pierwsze urządzenia automatyczne służyły do samoczynnego regulowania liczby obrotów maszyny, ciśnienia pary itp.; natomiast współczesne urządzenia automatyczne służą przede wszystkim do przechowywania i przetwarzania różnego rodzaju informacji — a więc do wykonywania samoczynnie różnych operacji na symbolach, jak np. wykonywania obliczeń, wykonywania prostych rozumowań, tłumaczeń z języka na język itp. Urządzenia automatyczne odgrywają dzisiaj bardzo dużą rolę w przemyśle, technice i nauce. Służą one m. in. do samoczynnego sterowania procesami produkcyjnymi, do projektowania wyrobów przemysłowych, stosowane są również w zarządzaniu przemysłem i gospodarką narodową. Współczesne maszyny matematyczne odgrywają bardzo dużą rolę w wielu działach nauki, np. fizyce, astronomii, ekonomii. Czynione są również próby zastosowania maszyn matematycznych w matematyce do dowodzenia twierdzeń w systemach sformalizowanych, np. w *rachunku zdań, *rachunku kwantyfikatorów, algebrze, teorii grup, geometrii.

Abstrakcyjne pojęcie automatu zostało po raz pierwszy wprowadzone przez angielskiego matematyka Turinga w 1936 r. w związku z badaniami pojęcia efektywności w matematyce (*Funkcje rekurencyjne). Turing dla sprecyzowania, co to znaczy, że jakieś zagadnienie jest efektywnie rozwiązalne, wprowadził pojęcie automatu, który samoczynnie wykonuje pewne proste operacje na symbolach (przepisywanie symboli, wymazywanie symboli, zastępowanie jednych symboli innymi), i wykazał, że wszelkie efektywnie rozwiązywalne zagadnienia matematyczne mogą być wykonane za pomocą takiego automatu. Automaty takie są dzisiaj nazywane maszynami Turinga. Podkreślamy raz jeszcze, że maszyna Turinga nie jest konkretnym urządzeniem technicznym, ani też projektem takiego urządzenia, a czysto abstrakcyjnym pojęciem mającym na celu sprecyzowanie pojęcia efektywności w matematyce. W ostatnich kilkunastu latach, w związku z rozwojem współczesnych maszyn matematycznych, powstało bardzo duże zainteresowanie koncepcjami Turinga. Próbuje się je zastosować do rozwiązywania problemów powstałych przy konstrukcji i użytkowaniu elektronicznych maszyn matematycznych. Powstała nawet nowa dziedzina nauki, zwana teorią automatów, której głównym przedmiotem badań są różne pojęcia automatu oraz ich wzajemne związki. Czynione są również próby takiego rozszerzenia pojęcia automatu, aby nadawało się ono do badania (naśladowania) pewnych procesów biologicznych, takich jak np. rozmnażanie się organizmów, uczenie się itp. Próby te jednakże do tej pory nie przyniosły zadowalających rezultatów. Badania nad automatami oraz ich teorią są prowadzone w wielu krajach o silnie rozwiniętym przemyśle i mocnych ośrodkach matematycznych. Pewne badania w tej dziedzinie są również prowadzone w Polsce, głównie na wyższych uczelniach i w instytutach naukowych.

2. Maszyny Turinga. Ponieważ maszyny Turinga grają dużą rolę w rozważaniach nad automatami, podamy tutaj krótko opis tego rodzaju maszyny.

Przewodnią myślą Turinga było takie określenie pojęcia automatu, aby jego działanie przypominało pracę rachmistrza w trakcie wykonywania obliczeń. Rachmistrz, aby wykonać jakiekolwiek obliczenie, musi posiadać kartkę papieru, na której zapisuje dane liczbowe oraz wyniki pośrednie swych rachunków. Następnie rachmistrz musi znać pewne reguły, według których odczytuje zapisane na kartce symbole i stosownie do tych reguł i odczytanych symboli wpisuje na kartkę nowe symbole. Praca rachmistrza sprowadza się więc do odczytywania i zapisywania odpowiednich symboli w myśl ustalonych reguł. Wszystkie wymienione wyżej elementy występujące w pracy rachmistrza występują również w pracy maszyny Turinga, jednakże w skrajnie uproszczonej postaci.

Maszyna Turinga zawiera nieskończoną taśmę papieru podzieloną na kratki, jak to pokazano niżej:

Taśma ta jest nazywana pamięcią maszyny, zaś pojedyncze kratki polami pamięci. Nieskończoność pamięci ma tu reprezentować fakt, że ilość papieru potrzebna do zapisania jakiegoś obliczenia może być praktycznie nieograniczona.

W każdym polu pamięci może być zapisany co najwyżej jeden symbol, który umownie oznaczamy pałeczką pionową: | Maszyna Turinga posiada możliwość obserwowania w każdej chwili jednego pola pamięci i rozróżniania, czy pole to jest puste, czy też zapisana w nim jest pałeczka. W każdej chwili maszyna Turinga znajduje się w jednym z $k+1$ możliwych stanów wewnętrznych $s_0, s_1 \ldots s_k$. Dalej maszyna Turinga może wykonywać następujące proste operacje na symbolach:

O_1 – zmienić pole obserwowane z pola aktualnie obserwowanego na pole sąsiednie z lewej strony,

O_2 – zmienić pole obserwowane z pola aktualnie obserwowanego na pole sąsiednie z prawej strony,

O_3 – wpisać w polu obserwowanym pałeczkę,

O_4 – wymazać z pola obserwowanego pałeczkę.

Po wykonaniu każdej z powyższych operacji maszyna Turinga zmienia swój stan wewnętrzny. Nowy stan wewnętrzny maszyny zależy od stanu poprzedniego oraz od symbolu zapisanego w polu obserwowanym. Zachowanie każdej maszyny Turinga można więc opisać w postaci tabelki, jak niżej:

	s_0	s_1	s_k
|	s_{i_0}, O_{i_0}	s_{i_1}, O_{i_1}	s_{i_k}, O_{i_k}
*	s_{j_0}, O_{j_0}	s_{j_1}, O_{j_1}	s_{j_k}, O_{j_k}

gdzie s_{i_l}, s_{j_p} są stanami wewnętrznymi maszyny, O_{i_l}, O_{j_p} są operacjami $O_1, \ldots, O_4$, zaś gwiazdka oznacza, że w polu obserwowanym nie jest zapisany żaden symbol.

Tabelkę tę należy rozumieć w ten sposób, że jeśli np. maszyna znajduje się w stanie $s_l (l = 0, 1, \ldots, k)$ i w polu obserwowanym zapisana jest pałeczka, to maszyna wykonuje operację O_{i_l} i przechodzi do stanu wewnętrznego s_{i_l}. Gdyby w polu obserwowanym nie był zapisany żaden symbol, to maszyna wykonałaby operację O_{j_l} i przeszłaby do stanu wewnętrznego s_{j_l}. Niektóre stany wewnętrzne maszyny są wyróżnione i nazywane są stanami końcowymi. Jeżeli maszyna znajdzie się w stanie końcowym, to nie wykonuje żadnej operacji i w ten sposób kończy działanie.

Turing pokazał, że za pomocą takiej maszyny można obliczać wartości każdej *funkcji rekurencyjnej. Ponieważ pojęcie funkcji rekurencyjnej jest równoważne pojęciu *algorytmu, wszelkie efektywne postępowanie matematyczne można zrealizować za pomocą takich maszyn.

Pojęcie maszyny Turinga odegrało dużą rolę w badaniach nad podstawami matematyki, obecnie zaś przeżywa swój renesans na gruncie teorii maszyn matematycznych, gdyż wiele problemów dotyczących współczesnych maszyn matematycznych można sprowadzić do badania odpowiednich własności maszyn Turinga. Maszyny Turinga można też uważać za uproszczony model współczesnych maszyn matematycznych.

3. Automaty skończone. Automaty skończone są szczególnym przypadkiem maszyn Turinga. Odgrywają one dużą rolę w lingwistyce matematycznej, teorii maszyn matematycznych i logice. Automat skończony tym się różni od maszyny Turinga, że może zmieniać pole obserwowane tylko w jednym kierunku taśmy (tj. w lewo albo w prawo od miejsca obserwowanego) oraz może tylko odczytywać zapisany w obserwowanym polu symbol, nie może natomiast wpisać bądź wymazać symbolu w pamięci. Przyjmuje się też, że w każdym polu pamięci może być zapisany jeden z $l+1$ symboli $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l$; σ_0 oznacza symbol pusty (pole zawierające symbol pusty nie zawiera żadnego symbolu). Zbiór wszystkich symboli automatu nazywa się alfabetem zewnętrznym automatu, który jest oznaczony przez Σ. Bardziej formalnie automat skończony można określić następująco: automatem skończonym nazywamy czwórkę uporządkowaną

$$\mathfrak{a} = \langle \Sigma, S, S', M \rangle$$

gdzie $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$ jest zbiorem stanów wewnętrznych automatu, zaś $S' \subset S$ jest zbiorem stanów końcowych, natomiast $M: \Sigma \times (S - S') \to S$ jest tzw. funkcją przejścia automatu $\mathfrak{a}$. Funkcja ta wyznacza następny stan automatu w zależności od stanu aktualnego i obserwowanego symbolu. Zamiast funkcji M podaje się czasem funkcję $M^*: \Sigma^* \times (S - S') \to S$, gdzie Σ^* oznacza zbiór wszystkich skończonych ciągów liter alfabetu (słów). Jeżeli w pamięci automatu napisany jest jakiś ciąg liter (słowo), to automat czyta kolejno symbole i trwa to tak długo, aż automat znajdzie się w stanie końcowym. Wtedy działanie automatu jest zakończone. Jeżeli po przeczytaniu ostatniego symbolu słowa zapisanego na taśmie automatu znajdzie się on w stanie końcowym, to mówimy, że automat akceptuje przeczytane słowo. Zbiór wszystkich słów akceptowanych przez automat $\mathfrak{a}$ nazywamy językiem automatu $\mathfrak{a}$. Jednym z podstawowych problemów teorii automatów skończonych jest badanie własności języków definiowanych przez automaty skończone. Badania te znajdują liczne zastosowania praktyczne, przede wszystkim w maszynach matematycznych, ale również w logice w związku z problemami *rozstrzygalności, a także w językoznawstwie do określania i badania własności języków natural-

nych. Inny dział teorii automatów zajmuje się nie językami definiowanymi przez automaty, a własnościami samych automatów i problemami związanymi z ich konstrukcją. Bada się, jak powinien być zbudowany automat, który definiuje zadany język. Okazało się, że każdy automat skończony można zbudować z kilku podstawowych, prostych automatów skończonych. W badaniach tych podstawową rolę odgrywa *algebra Boole'a oraz *rachunek zdań. Badania te mają również liczne zastosowania w technice, głównie przy konstruowaniu maszyn matematycznych. Czynione były również próby stosowania podobnych metod do analizy pracy systemu nerwowego.

A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman: *The design and analysis of computer algorithms*. 1975; M. A. Arbib (ed.): *Algebraic theory of machines, languages and semigroups*. 1968; J. Blikle: *Automaty i gramatyki. Wstęp do lingwistyki matematycznej*. 1971; J. Hartmanis, R. E. Stearns: *Algebraic structure theory of sequential machines*. 1966; J. E. Hopcroft, J. D. Ullman: *Formal languages and their relations to automata*. 1969; M. Minsky: *Finite and infinite machines*. 1967.

Z. P.

B

Beth Evert W. (1908–1964). Studia matematyczne i fizyczne w Utrechcie, doktorat z filozofii matematyki w Groningen 1935. W okresie studiów i potem przejawiał trwałe zainteresowanie filozofią Kanta. W l. 1935–1945 wykładał matematykę, prowadząc w tym czasie studia nad intuicjonizmem. Od 1946 wykładał na uniw. w Amsterdamie logikę matematyczną, filozofię nauki i historię nauki. Szczególnie znaczące wyniki logiczne Betha, to metoda dowodowa zwana metodą tabel analitycznych (*Dedukcja naturalna 3) oraz twierdzenie o *definiowalności (zob. też *Definicja normalna). Z innych prac, charakterystyczna jest dla badań Betha książka napisana wspólnie z J. Piagetem pt. *Mathematical epistemology and psychology* 1966.

W. M.

błąd formalny, zw. też non sequitur (łac.; nie wynika). Dotyczy *wnioskowania dedukcyjnego i popełniany jest wtedy, gdy z przesłanek nie wynika logicznie wniosek mimo uwzględnienia wszystkich przesłanek. Wnioskowanie, w którym popełniono błąd formalny, może (choć nie musi) prowadzić od prawdziwych przesłanek do fałszywego wniosku.

Ajdukiewicz: *Zarys*; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1959; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

błąd materialny. Błąd popełniony we wnioskowaniu wtedy, gdy przynajmniej jedna z przesłanek jest zdaniem fałszywym. Takie wnioskowanie może (ale nie musi) prowadzić do fałszywego wniosku. Gdy wnioskowanie obarczone błędem materialnym stanowi część składową jakiegoś dowodzenia, wtedy mówi się, że w danym dowodzeniu popełniono błąd materialny.

Ajdukiewicz: *Zarys*; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1959; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

błędne koło w definiowaniu (łac. circulus in definiendo; idem per idem – to samo przez to samo). Błąd ten występuje w dwóch odmianach: jako błędne koło bezpośrednie i błędne koło pośrednie.

Błędne koło bezpośrednie polega na użyciu wyrazu definiowanego w członie definiującym, np.: Praworządność jest to zachowywanie przepisów praworządności. Błędne koło pośrednie polega na tym, że termin *A* definiuje się przez zespół terminów zawierający termin *B*, a wśród terminów użytych do zdefiniowania terminu *B* występuje termin *A*, np.: Logika jest to nauka o warunkach poprawnego myślenia. Myślenie poprawne jest to myślenie zgodne z przepisami logiki.

Definicje, którym zarzuca się błędne koło bezpośrednie lub pośrednie nazywa się definicjami tautologicznymi bezpośrednio lub pośrednio.

Ajdukiewicz: *Log. pragm*; – *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*; – *Kurs logiki.*

M. P.

błędne koło w rozumowaniu (łac. circulus vitiosus). Błąd rozumowania polegający na tym, że przy wyprowadzaniu jakiegoś wniosku *W* oparto się na przesłance *P*, a następnie, przy uzasadnianiu przesłanki *P* powołano się na zdanie *W*. Dowodzi się np. że obrazy Leonarda da Vinci są arcydziełami, ponieważ ich autor był genialny, a gdy przychodzi uzasadnić poglądy o genialności Leonarda, podaje się jako dowód to, że tworzył on arcydzieła. Na tego rodzaju błędy narażone są szczególnie rozumowania entymematyczne, tj. takie, w których nie wszystkie przesłanki są wyraźnie sformułowane (*Entymemat).

Ajdukiewicz: *Zarys*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

Bolzano Bernard (1781–1848). Ur. w Pradze, gdzie studiował matematykę, filozofię i teologię, doktoryzując się w zakresie matematyki 1804 i filozofii 1805. Od 1807 był profesorem filozofii i teologii praskiego uniw; w 1819 został odsunięty od nauczania z powodu swych poglądów teologicznych i politycznych. Najważniejsze dzieła z zakresu logiki: *Wissenschaftslehre*, 4 tomy, 1837; *Paradoxien des Unendlichen* 1851.

Logikę traktował Bolzano jako teorię nauki, naukę zaś pojmował jako zbiór pewnych tworów abstrakcyjnych, mianowicie sądów „samych w sobie" (Sätze an sich), nie zaś jako zbiór wyrażeń języka czy też sądów w sensie psychologicznym. Bolzano antycypował wiele pojęć współczesnej logiki, jak: prawda logiczna, konsekwencja, sprzeczność, prawdopodobieństwo i in. Był także prekursorem teorii mnogości, jako autor pojęcia zbioru nieskończonego. Przyczynił się również do rozwoju rachunku kwantyfikatorów, które stosował w swoich pracach matematycznych i którym poświęcił uwagę w swojej *Wissenschaftslehre.*

W. M.

Boole George (1815–1864). Ur. w Lincoln, syn szewca będącego matematykiem samoukiem. Sam George Boole

był również na pół samoukiem, któremu drogę do katedry matematyki na uniw. w Cork (od 1849 do końca życia) utorowały doniosłe prace z analizy matematycznej i logiki. Z tych ostatnich najważniejsze są: *The mathematical analysis of logic* 1847 oraz *An investigation of the laws of thought* 1854.

Boole jest twórcą teorii, która jest uściśleniem i rozwinięciem *sylogistyki Arystotelesa uzyskanym dzięki zastosowaniu języka algebraicznego. Teoria ta, zw. obecnie *algebrą Boole'a różni się w swej obecnej postaci od oryginału m. in. tym, że nadano jej postać aksjomatyczną (często używana aksjomatyka pochodzi od E. V. Huntingtona, 1904). Boole zdawał sobie sprawę z wielości możliwych interpretacji swej algebry; sam był autorem jej zastosowań w logice zdań i w teorii prawdopodobieństwa. Ze względu na tę wielość interpretacji Boole traktował sformułowane przez siebie prawa algebraiczne jako najogólniejsze prawa myślenia (laws of thought), których uszczegółowieniami są twierdzenia poszczególnych teorii logicznych.

W. M.

Brouwer Luitzen Egbert Jan (1881–1966). Ur. w Holandii. Doktorat 1907 w Amsterdamie; profesor tamtejszego uniw. 1912–1955. Już w pracy doktorskiej Brouwer sformułował pogląd, że logika da się wywieść z matematyki, której źródłem jest intuicja czasu. Stanowisko to uzyskało miano *intuicjonizmu, będącego jednym z głównych kierunków w zakresie podstaw matematyki i logiki. Poglądy swe przedstawił Brouwer m. in. w pracach: *Intuitionisme en formalisme*, 1912 (przekł. ang. pt. *Intuitionism and formalism* w „Bull. of Amer. Math. Society" vol. 20 1913); *Zur Begründung der Intuitionistischen Mathematik* („Mathematische Annales" 93, 95, 96; 1924–27). Bibliografię prac Brouwera zawiera monografia A. Heytinga *Intuitionism* 1956.

W. M.

C

Cantor Georg (1845–1918). Ur. w Petersburgu, w l. 1872–1913 profesor uniw. w Halle, twórca *teorii mnogości, która odegrała doniosłą rolę w rozwoju matematyki, m. in. w badaniu jej podstaw. W pracy z r. 1874 (*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*) Cantor wykazał, że zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb naturalnych są różnej mocy (*Teoria mocy zbiorów), co było pierwszym i podstawowym odkryciem z zakresu teorii mnogości; w 1878 sformułował *hipotezę continuum. Był świadom konsekwencji swych odkryć dla logiki i epistemologii, czemu dał wyraz w piątej części rozprawy (1883) *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Cantor był też założycielem (1890) i pierwszym przewodniczącym Deutsche Mathematiker-Vereinigung oraz inicjatorem pierwszego światowego kongresu matematyków w Zurichu 1897.

W. M.

Carnap Rudolf (1891–1970). Ur. w Ronsdorf. Jeden z twórców i głównych reprezentantów Koła Wiedeńskiego, rozwijającego filozofię neopozytywizmu. Studiował m. in. w Jenie, gdzie jednym z jego nauczycieli był G. *Frege. W Jenie otrzymał w 1921 doktorat za rozprawę o pojęciu przestrzeni, zawierającą zalążki późniejszego programu *analizy logicznej pojęć. W l. 1926–1930 docent prywatny uniw. w Wiedniu, 1930–1931 profesor tejże uczelni; od 1931 profesor filozofii niem. uniw. w Pradze. Chroniąc się przed spodziewanymi prześladowaniami ze strony hitleryzmu, Carnap wyemigrował w 1935 do USA i został profesorem w Chicago; po śmierci Reichenbacha w 1954 objął jego katedrę na uniw. w Los Angeles. Współzałożyciel i współredaktor czasopisma „Erkenntnis" (1930–1940).

Carnap rozwijał wielostronną działalność na polu metodologii nauk i semantyki. Szczególnie doniosły jest jego wkład w badania dotyczące *składni logicznej, *znaczenia, *zdań analitycznych, *zdań empirycznych, *definicji cząstkowych oraz *logiki indukcji. Główne dzieła: *Der logische Aufbau der Welt*, 1928; *Logische Syntax der Sprache*, 1934; *Testability and meaning*, 1936; *Meaning and necessity*, 1947; *Logical foundations of probability*, 1950.

W. M.

cecha charakterystyczna. Dla elementów pewnego zbioru jest to ta cecha (lub zespół cech), która przysługuje wszystkim elementom i tylko im. Przykład: Cechą charakterystyczną dla klasy czerwonych ciałek krwi jest ich funkcja polegająca na przenoszeniu tlenu z płuc do wszystkich tkanek ciała, za pośrednictwem hemoglobiny. Za pomocą pojęcia cechy charakterystycznej określa się *konotację nazw. Pojęcie to służy także do wyjaśnienia, czym jest definicja realna, pojęta jako jednoznaczna charakterystyka pewnej klasy; jest to mianowicie opis danej klasy przez wymienienie jej cech charakterystycznych. Cechy charakterystyczne nazywa się też istotnymi (w jednym ze znaczeń tego słowa).

Ajdukiewicz: *Log. pragm*; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

W. M.

characteristica universalis. Postulowany w 17 w. (Leibniz i in.) uniwersalny i ścisły język graficzny. Uniwersalny w dwojakim sensie: miał służyć do wyrażania wszystkich pojęć nauki oraz do porozumiewania się ludzi różnych narodowości. Poszczególne proste pojęcia, odpowiadające prostym cechom, byłyby wyrażane przez pojedyncze znaki graficzne, zaś pojęcia złożone – przez układy znaków. Podstawą projektu było założenie, że cały słownik nauki da się utworzyć kombinatorycznie przez łączenie na różne sposoby nielicznych prostych pojęć. Ta metoda konstruowania pojęć otrzymała od Leibniza nazwę *ars combinatoria. Stanowiła ona część ogólniejszej metody rachunkowej, pozwalającej rozwiązywać w uniwersalnym języku wszelkie problemy, a określanej nazwami: mathesis universalis, calculus universalis, calculus ratiocinator, logica mathematica, logistica. Idea uniwersalnego języka nie doczekała się realizacji ani u Leibniza (poza niewielkimi i zaniechanymi fragmentami), ani później. Idea uniwersalnego rachunku została częściowo zrealizowana w logice matematycznej.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; Church: *Math. log*; C. I. Lewis, C. H. Langford: *Symbolic logic*. 1932; Kneale: *Development logic*; Kotarbiński: *Wykłady*.

W. M.

Chwistek Leon (1884–1944). Ur. w Zakopanem. Studiował matematykę i filozofię na Uniw. Jagiellońskim gdzie uzyskał doktorat w 1905. Od r. 1905 przez 20 lat uczył matematyki w gimnazjum. W 1928 habilitował się na UJ, a w 1934 otrzymał Katedrę Logiki Matematycznej we Lwowie. W latach wojny wykładał analizę matematyczną na uniw. w Tyflisie (ZSRR). W 1943 został członkiem Krajowej Rady Narodowej.

Z osiągnięć Chwistka na polu logiki najszerzej znana jest jego uproszczona wersja *teorii typów. Jednocześnie zajął on szczególną pozycję w filozofii sztuki, do której wniósł wiele oryginalnych idei.

W. M.

ciąg. Zbiór wartości funkcji określonej na zbiorze liczb naturalnych. Kolejne elementy ciągu zwane wyrazami wyznaczone są w ten sposób, że n-tym wyrazem ciągu jest wartość funkcji przy argumencie n (gdzie n – dowolna liczba naturalna). Ciąg o wyrazach $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zapisuje się $\{a_n\}$. Ciąg jest więc *zbiorem dobrze uporządkowanym typu ω.

Ciąg skończony n-elementowy jest funkcją określoną dla liczb naturalnych mniejszych od n: $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, można go więc utożsamić z n-elementowym zbiorem uporządkowanym.

Zob. też **teoria zbiorów uporządkowanych.**

Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

K. Cz.

contradictio in adiecto (łac.; sprzeczność w przydawce). Stosunek między dwoma wyrażeniami stanowiącymi składniki jakiegoś wyrażenia złożonego, polegający na tym, że każdy z tych składników jest negacją drugiego lub pociąga w pewien sposób negację drugiego. Np. zwrot „bezdzietny ojciec" oznacza kogoś, kto zarazem jest ojcem i nie ma dzieci, ale fakt, że nie ma się dzieci, pociąga to, że nie jest się ojcem. Inny obiegowy przykład: kwadratowe koło.

W. M.

cudzysłów. Funkcją cudzysłowu rozpatrywaną w logice jest tworzenie tzw. nazw cudzysłowowych. Nazwa cudzysłowowa jest to nazwa jakiegoś wyrażenia (zdania, funktora, nazwy itp.) utworzona w ten sposób, że wyrażenie, które chcemy nazwać, zostaje odtworzone co do kształtu, niejako odrysowane (gdy wyrażenie to należy do języka mówionego, robi się transkrypcję dźwięków na odpowiednie litery alfabetu) oraz zaopatrzone we wskaźnik informujący, że mamy do czynienia z tego rodzaju rysunkiem. Wskaźnikiem tym bywają kreski po obu stronach lub wyodrębnienie przy pomocy osobnego wiersza, lub użycie odmiennej czcionki; niekiedy poprzestaje się na tym, że jako wskaźnik charakteru cudzysłowowego służy termin w rodzaju „wyrażenie", „nazwa" itp., np. nazwa bicz, symbol +, cyfra 5. Powstała w ten sposób nazwa cudzysłowowa informuje o kształcie swych desygnatów. Bywają też użycia dające się interpretować w ten sposób, że utworzona z ich pomocą nazwa nie informuje o kształcie wyrażenia, lecz o jakiejś innej jego własności, np. o znaczeniu: informujemy o znaczeniu (z pominięciem kształtu) m. in. wtedy, gdy ujmujemy w cudzysłów przekłady (a nie dosłowne cytaty) z obcego języka lub gdy tworzymy nazwy w rodzaju: Sąd „2+2 = 4", gdzie wyrażenie następujące po słowie „sąd" jest nazwą pewnego sądu arytmetycznego. Można jednak zwrot w rodzaju wyżej przytoczonego traktować jako skrót zwrotu: Sąd wyrażony przez napis „2+2 = 4"; wyrażenie cudzysłowowe występuje wówczas w swej normalnej roli, będąc nazwą wyrażenia o takim kształcie, jaki przedstawia napis wewnątrz cudzysłowu. W dalszym ciągu będzie mowa jedynie o nazwach cudzysłowowych traktowanych jako nazwy zdające sprawę z kształtu wyrażeń.

Nazwy cudzysłowowe dzielą się na nazwy wyrażeń-egzemplarzy i wyrażeń-typów (*Wyrażenie). Nazwa cudzysłowowa występująca w zdaniu [a] «Cezar przekraczając Rubikon powiedział 'Alea iacta est'.», jest nazwą konkretnego zdania, wygłoszonego w określonym czasie i miejscu, a więc zdania-egzemplarza. Natomiast w zdaniu: [b] «„Alea iacta est" jest trójwyrazowym zdaniem łacińskim.» część cudzysłowowa jest nazwą wszelkiego zdania o tym samym kształcie, więc zdania-typu. Nazwy wyrażeń-egzemplarzy są nazwami jednostkowymi, ponieważ każda z nich ma dokładnie jeden *desygnat. Nazwy wyrażeń-typów są ogólne, ponieważ każda z nich desygnuje wiele wyrażeń, którym wspólny jest ten sam kształt. Nazwy wyrażeń-typów można również uważać za nazwy jednostkowe, ale wówczas jedynym desygnatem tego rodzaju nazwy będzie pewien przedmiot abstrakcyjny, mianowicie określony kształt wyrażenia (inaczej: klasa wyrażeń równokształtnych). W podanych wyżej przykładach użyto cudzysłowów różnego kroju (kreski pojedyncze i podwójne) dla odróżnienia nazwy oznaczającej wyrażenie-egzemplarz w [a] od nazwy oznaczającej wyrażenie-typ w [b].

Desygnatem jednostkowej nazwy cudzysłowowej wyrażenia-egzemplarza jest z zasady nie to, co znajduje się między znakami cudzysłowowymi, lecz jakiś inny, kiedy indziej wytworzony napis, którego kopię stanowi napis znajdujący się między kreskami; tego rodzaju nazw cudzysłowowych używamy bowiem po to, by powiedzieć coś o wyrażeniu gdzie indziej użytym, a nie o wyrażeniu, które w danym momencie umieszczamy pomiędzy kreskami. Można skonstruować taką jednostkową nazwę cudzysłowową, której desygnatem będzie napis objęty znaczkami cudzysłowu, ale jest to konstrukcja nietypowa, pomyślana dla specjalnych celów teoretycznych (*Wyrażenie okazjonalne – (3)).

W sprawie desygnatów cudzysłowowej nazwy ogólnej istnieją dwa stanowiska. Wg jednego desygnatem takiej nazwy jest każde wyrażenie podobne kształtem do tego, które zawiera się w cudzysłowie. Np. ogólna nazwa cudzysłowowa spójnika alternatywy użyta w zdaniu: [c] «„Lub" jest spójnikiem». – oznacza wszystkie (i tylko) wyrażenia równokształtne z napisem ujętym w cudzysłów w [c], a w tej liczbie i sam ów napis wewnątrzcudzysłowowy w [c], ponieważ jest on równokształtny z sobą samym. Wg drugiego stanowiska to, co stanowi zawartość cudzysłowu, nie należy do zakresu nazwy cudzysłowowej, lecz jest kopią któregoś z elementów zakresu, potraktowanego jako reprezentant całej owej klasy napisów.

Dyskutowanym problemem jest też struktura syntaktyczna nazwy cudzysłowowej: czy nazwa taka stanowi wyrażenie syntaktycznie złożone, gdy znak cudzysłowu pełni rolę funktora, a zawartość cudzysłowu rolę argumentu, czy też jest to twór syntaktycznie prosty, w którym kreski cudzysłowowe mają rolę sylaby pozbawionej (po oderwaniu od pozostałych sylab) funkcji semantycznych. Za tym drugim stanowiskiem opowiada się Tarski, pokazując, że traktowanie cudzysłowu jako funktora prowadzi do pewnego wariantu *antynomii kłamcy. Zwraca się też niekiedy uwagę, wychodząc z założenia o nieanalizowalności nazw cudzysłowowych, na podobieństwo zachodzące między nimi a kontekstami o charakterze intensjonalnym (*Intensjonalność – stanowisko Quine'a).

L. Koj: *Nazwy cudzysłowowe*. „St. Log." XV 1964; Reichenbach: *Elements*; Quine: *ML*; Tarski: *Pojęcie prawdy*.

W. M.

Czeżowski Tadeusz (1889–1981). Dr, prof. zwyczajny (od 1935) w Uniw. Stefana Batorego w Wilnie, od 1945 prof. filozofii (potem logiki) w Uniw. Mikołaja Kopernika w Toruniu. Zajmował się głównie zagadnieniami logiki, metodologii teorii nauki. Ważniejsze publikacje: *O metafizyce, jej kierunkach i zagadnieniach* 1948; *Logika* 1949; *Odczyty filozoficzne* 1958; *Główne zasady nauk filozoficznych* 1959 (wyd. 3); *Filozofia na rozdrożu. Analizy filozoficzne* 1965; *Logika, jej problemy i wyniki z punktu widzenia ich przydatności dla rozwiązywania zagadnień pedagogicznych*. [W:] *Nauki filozoficzne współdziałające z pedagogiką* 1966.

W. M.

część właściwa zbioru (podzbiór właściwy). Zbiór X jest częścią właściwą zbioru Y, gdy każdy element należący do X *należy do* Y, ale nie na odwrót (zbiory X i Y nie są równe). Symbolicznie:

$$X \subsetneq Y \equiv X \subset Y \wedge X \neq Y. \quad \text{Lub} \quad X \subsetneq Y \equiv \wedge x(x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge \vee x(x \in X \wedge x \notin Y).$$

Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

K. Cz.

D

Dąmbska Izydora (1904–1983) odbywała studia we Lwowie pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego, z którym następnie współpracowała jako jego asystent i jako współredaktor „Ruchu Filozoficznego". Od roku 1955 prof. UJ, w latach 1957–64 kierownik Katedry Historii Filozofii UJ. Od 1964 prof. w Instytucie Filozofii i Socjologii PAN, do 1975. Prace książkowe: *La théorie du jugement de M. E. Goblot*, 1930; *Dwa studia z teorii naukowego poznania*, 1962; *O narzędziach i przedmiotach poznania*, 1967; *Wprowadzenie do starożytnej semiotyki greckiej. Studia i teksty*, 1984. Inne prace (przykładowo): *Z semantyki zdań warunkowych*. „Przegl. Filoz." 1948; *Z filozofii imion własnych*. „Kwart. Filoz." 1949; *Le concept de modèle et son role dans les sciences*. „Revue de Synthèse" 1959; *Niektóre pojęcia gramatyki w świetle logiki* [W:] *Księga pamiątkowa ku czci prof. R. Ingardena*, 1964. Szczególne zasługi dla filozofii w Polsce położyła I. Dąmbska sporządzając, od lat przed II wojną światową aż do końca swego życia, omówienia polskich książek filozoficznych, w tym także logicznych, dla Bibliographie de Philosophie wychodzącej w Paryżu.

W. M.

De Morgan August (1806–1871). Ur. w Madura (Indie). Po studiach w Cambridge (1823–1827) został profesorem matematyki w Londynie: 1828–1831 oraz 1836–1866; powodem pięcioletniej przerwy, jak i ustąpienia w 1866 były konflikty biorące się z niezależności przekonań De Morgana. Rozwijając *sylogistykę, De Morgan doszedł do pewnych idei *teorii relacji i *algebry logiki, w której zwrócił uwagę na równości nazwane później prawami De Morgana; pracował również nad teorią prawdopodobieństwa. Najbardziej znanym jego dziełem jest *Formal logic* 1847, gdzie szczególnie godny uwagi jest rozdział o błędach logicznych.

W. M.

dedukcja. Termin używany w następujących znaczeniach;
1. Wnioskowanie dedukcyjne, tj. wnioskowanie, w którym z przesłanek wynika logicznie wniosek.
2. Rozumowanie dedukcyjne (*Klasyfikacja rozumowań).
3. Metoda dedukcyjna, tj. metoda stosowana przy budowaniu *systemu dedukcyjnego.

M. P.

dedukcja naturalna. Jest to jedna z dwóch metod, obok metody aksjomatycznej zwanej czasem dedukcją logistyczną, budowania systemów dedukcyjnych logiki. Każdy system dedukcyjny może być określony jako para $\langle A, R\rangle$, gdzie A jest zbiorem aksjomatów zaś R zbiorem reguł dedukcyjnych. Gdy zbiór A jest niepusty, mamy do czynienia z systemem aksjomatycznym (logistycznym), gdy A jest pusty mamy do czynienia z systemem dedukcji naturalnej, tj. takim, że w procesie dowodzenia twierdzeń posługujemy się wyłącznie regułami.

Podczas gdy systemy aksjomatyczne logiki mają tradycję wywodzącą się od Fregego, pierwsze systemy dedukcji naturalnej powstały dopiero w latach trzydziestych, zyskując z czasem coraz większe upowszechnienie i coraz większą prostotę. Inicjatorami tej metody byli, niezależnie od siebie, G. Gentzen (1934) i S. Jaśkowski (1934). Intencją obu tych autorów było możliwie jak najdalej idące przybliżenie logicznej teorii dowodu do rzeczywistej praktyki dowodowej w matematyce i innych naukach. System Jaśkowskiego był doskonalony przez polskich logików, w szczególności w pracach J. Słupeckiego i L. Borkowskiego; systemy Gentzena zawarte w pracy 1934 były rozwijane w różnych kierunkach (w Polsce Rasiowa i Sikorski 1963), jednym z nich jest *logika dialogowa.

W niniejszym przedstawieniu dedukcji naturalnej pomija się te ujęcia, które są stosunkowo łatwo dostępne w polskim piśmiennictwie, koncentrując się na systemach Gentzena oraz pewnej linii ewolucyjnej w rozwoju tych systemów, związanej z wynikami Betha, Hintikki i Smullyana.

1. Systemy NK i NJ Gentzena. Gentzen (1934) przedstawił dwie różne metody dedukcji, każdą w wariancie klasycznym i wariancie intuicjonistycznym. Tylko jedną z nich nazywa on dedukcją naturalną, dla drugiej, tzw. rachunku sekwentów (*rachunek Gentzena) przyjmując miano logistycznej, ale – jak pokazała późniejsza ewolucja – jest to w pewnym sensie dedukcja naturalna. Przyjęta przez Gentzena terminologia wyjaśnia skróty: NK – naturalna klasyczna (dedukcja), NJ – naturalna intuicjonistyczna; dla rachunku „logistycznego" używa się, odpowiednio, skrótowych nazw LK i LJ (zob. poniżej 2).

W systemach NK i NJ występują dwa symbole *wynikania inferencyjnego, mianowicie pozioma kreska oddzielająca konkluzję od przesłanek, oraz symbol wynikania używany wówczas, gdy wśród przesłanek pojawia się nie pojedyncza formuła, lecz jakiś schemat wnioskowania (ten typ przesłanek jest jedną z oryginalności systemów Gentzena); w tym drugim przypadku używać będziemy, za późniejszymi autorami, symbolu $\vdash$ (Gentzen uży-

wa w tym celu nawiasu kwadratowego ujmującego przesłankę). Używa się dwóch rodzajów zmiennych indywiduowych: małe litery z końca alfabetu funkcjonują jako zmienne związane, małe litery z początku alfabetu jako zmienne nie podlegające wiązaniu, a więc występujące w roli parametrów. Oprócz standardowych stałych logicznych występuje stała 0 oznaczająca formułę fałszywą logicznie, tj. fałszywą przy każdej interpretacji. Reguły dzielą się na te, które służą do wprowadzania stałych logicznych i te, które służą do opuszczania stałych logicznych.

	Reguły wprowadzania	Reguły opuszczania
(.)	$\dfrac{A\ B}{A.B}$	$\dfrac{A.B}{A}\quad\dfrac{A.B}{B}$
(v)	$\dfrac{A}{A\vee B}\quad\dfrac{B}{A\vee B}$	$\dfrac{A\vee B\ \ A\vdash C\ B\vdash C}{C}$
(~)	$\dfrac{A\vdash 0}{\sim A}$	$\dfrac{A\ \sim A}{0}\quad\dfrac{\sim\sim A}{A}$
(→)	$\dfrac{A\vdash B}{A\to B}$	$\dfrac{A\ \ A\to B}{B}$
(U)	$\dfrac{B(a)}{(x)B(x)}$	$\dfrac{(x)B(x)}{B(a)}$
(E)	$\dfrac{B(a)}{(Ex)B(x)}$	$\dfrac{(Ex)B(x)\ \ B(a)\vdash A}{A}$

Reguła wprowadzania (U), tj. kwantyfikatora uniwersalnego czyli ogólnego, może być stosowana pod warunkiem, że zmienna wolna a nie pojawia się w konkluzji, zaś reguła opuszczania (E) pod warunkiem, że a nie pojawia się w formułach A i $(Ex)B(x)$. Ponadto przyjmuje się regułę

$$\frac{0}{A},$$

która nie należy do żadnej z dwóch powyższych grup.

Rachunek intuicjonistyczny NJ otrzymuje się z NK przez pominięcie drugiej z reguł opuszczania (~), tj. reguły podwójnego przeczenia.

Dowód przeprowadzony metodą dedukcji naturalnej polega na tym, że kierując się regułami, wyprowadza się wnioski z założeń przyjętych „na próbę"; stąd nazwa: dowód założeniowy. Istnieją dwa warianty dowodów założeniowych. Dowód wprost polega na tym, że jeśli z przyjętego założenia A uda się wyprowadzić wniosek B, to uznaje się za udowodnione twierdzenie $A\to B$, zgodnie z podaną wyżej regułą wprowadzania implikacji (odpowiednik twierdzenia o dedukcji). Założeniowy dowód nie wprost (reductio ad absurdum) polega na tym, że jeśli z A wyprowadzi się sprzeczność, to – zgodnie z regułą wprowadzania (~) – przyjmuje się za udowodnione twierdzenie $\sim A$.

Dla logiki pierwszego rzędu udowodniono (Gentzen 1934), że systemy dedukcji naturalnej są równoważne systemom aksjomatycznym, tj. pozwalają uzyskać ten sam zbiór twierdzeń logicznych.

Niech jako przykład dedukcji naturalnej posłuży dowód prawa:

$((p\to q).(r\to s).(p.r))\to(q.s)$.

1. $p\to q$	założenia (uzyskane z poprzednika przez op. (.))
2. $r\to s$	
3. $p.r$	
4. p	op. (.): 3
5. r	op. (.): 3
6. q	op. (→): 1, 4
7. s	op. (→): 2, 5
8. $q\cdot s$	dol. (.): 6, 7

$((p\to q).(r\to s).(p.r))\to(q.s)$ dol. (→): 1, 2, 3, 8.

2. Systemy LK i LJ Gentzena (rachunek sekwencji). Litera L w powyższych oznaczeniach pochodzi od słowa logistyczny, ponieważ terminem tym (niem. logistisch) Gentzen odróżniał owe systemy od systemów dedukcji naturalnej (niem. natürlich). Istotnie, dowody w NK i NJ w tym sensie nie są założeniowe, iż każdy zaczyna się od schematu wyrażającego regułę, że każda formuła jest wyprowadzalna z siebie; dowód zaczyna się zawsze od owego schematycznego aksjomatu. Nie jest jednak błędem rozważanie LK czy LJ w kontekście dedukcji naturalnej, ponieważ w systemach tych zachodzą, jak pokaże się dalej, duże podobieństwa do metody dedukcji naturalnej.

Do oryginalnych osiągnięć Gentzena należy idea sekwencji (niem. Sequenz), zwanej też sekwentem (z ang. sequent). Sekwencja jest to najogólniejsza postać schematu wnioskowania. Ogólność polega na tym, że dopuszcza się dowolnie wiele formuł w poprzedniku (niem. Antezedens) i w następniku (niem. Sukzedens) sekwencji, przy czym można operować zbiorami formuł, także zbiorami pustymi, na równi z pojedynczymi formułami. Rachunek sekwencji składa się ze schematów przekształcania jednych sekwencji w inne, a więc wnioskowanie przebiega niejako od jednego schematu wnioskowania do innego, a nie jak w tradycyjnym ujęciu – od formuły do formuły. Symbolem sekwencji, oddzielającym jej następnik od poprzednika, jest u Gentzena strzałka; tutaj będzie się używać symbolu $\vdash$.

W przypadku gdy w skład sekwencji wchodzą jedynie formuły, a więc nie operuje się zbiorami formuł, ma ona postać:

$$A_1,\ldots,A_m\vdash B_1,\ldots,B_n.$$

Poprzednik należy rozumieć jako koniunkcję, zaś następnik jako alternatywę formuł. Sens takiego in-

terpretowania sekwencji można pokazać na następującym przykładzie. Sekwencję

$$(1)\ A\to B,\ (2)\ B\to C \vdash (3)\ A\to C,\ (4) \sim C\to \sim A$$

można też zapisać, tradycyjnie, jako schemat wnioskowania:

$$\frac{(1)\ A\to B\ (2)\ B\to C}{\begin{array}{c}(3)\ A\to C\\ (4) \sim C\to \sim A\end{array}}$$

Na podstawie (1) i (2) branych łącznie, czyli jako koniunkcja, możemy przyjąć jako wniosek bądź (3), bądź (4), bądź oba, co właśnie odpowiada rozumieniu alternatywy.

Takie pojmowanie sekwencji dopuszcza sekwencję z pustym poprzednikiem lub z pustym następnikiem, co należy rozumieć w następujący sposób: Tautologia wynika z każdego zbioru zdań, także zbioru pustego, a więc gdy A jest tautologią, to zachodzi $\vdash A$, gdzie puste miejsce przed znakiem $\vdash$ symbolizuje zbiór pusty; w tym przypadku $\vdash$ pełni rolę podobną jak znak *asercji. Ze sprzeczności, czyli zaprzeczenia tautologii, wynika każdy zbiór zdań, także zbiór pusty, a więc gdy B jest formułą wewnętrznie sprzeczną, to zachodzi $B \vdash$, gdzie puste miejsce po B symbolizuje zbiór pusty; w tym przypadku $\vdash$ pełni rolę podobną jak znak odrzucania. Będziemy więc pisać np.: $\vdash A \vee \sim A$ lub $\vdash A, \sim A$; $A. \sim A \vdash$ lub $A, \sim A \vdash$. Inną, oprócz pojęcia sekwencji, osobliwością tego rachunku jest występowanie dwóch rodzajów reguł. Jedne z nich wprowadzają stałe logiczne do następnika lub do poprzednika (reguł opuszczania nie ma w tym rachunku), inne – zwane strukturalnymi – nie mówią o posługiwaniu się stałymi logicznymi, określają natomiast dopuszczalne – ze względu na poprawność wnioskowania – modyfikacje schematów wnioskowania (dokładniej: schematów przekształcania sekwencji, ponieważ wnioskowanie jest tutaj przechodzeniem od sekwencji do sekwencji).

Symboliczne zapisy reguł strukturalnych podane przez Gentzena można streścić słownie w następujący sposób:

Rozrzedzenie: wolno opuścić jedną z formuł poprzednika sekwencji lub dołączyć dowolną formułę do następnika sekwencji.

Skrócenie: jeśli jakaś formuła występuje dwa razy, to wolno opuścić jedno jej wystąpienie, zarówno w poprzedniku, jak w następniku.

Przestawienie: wolno zamienić kolejność formuł, zarówno w poprzedniku, jak w następniku.

Cięcie: gdy mamy dwie sekwencje takie, że jakaś formuła występująca w następniku pierwszej z nich występuje w poprzedniku drugiej, to ową formułę wolno opuścić, łącząc przy tym obie sekwencje w jedną, w sposób wskazany w następującym schemacie:

$$\frac{T \vdash U, A;\ A, W \vdash X}{T, W \vdash U, X}$$

W schemacie tym, jak i w rozważanych dalej, duże litery z końca alfabetu reprezentują zbiory formuł, zaś duże litery z początku alfabetu reprezentują pojedyncze formuły. Ponieważ zbiory formuł mogą być także puste, nadaje to schematowi taką ogólność, że jego poszczególnymi przypadkami są procedury analogiczne do reguły odrywania, reguły sylogizmu i in. Oto odpowiednik reguły odrywania:

$$\frac{\vdash A;\ A \vdash B}{\vdash B},$$

gdzie zbiory T, U i W (z ogólnego schematu cięcia) są puste, a zbiór X zawiera jako jedyny element formułę B. A oto odpowiednik reguły sylogizmu:

$$\frac{B \vdash A\ \ A \vdash C}{B \vdash C}.$$

Jednym z najważniejszych wyników w dziejach teorii dowodu jest wykazanie przez Gentzena (1934), że każdy dowód posługujący się regułą cięcia można przekształcić na dowód nie korzystający z tej reguły, tzw. dowód w postaci normalnej. Doceniając doniosłość swego twierdzenia o eliminowalności reguły cięcia, Gentzen nadał mu miano Hauptsatz (twierdzenie główne) i pod tą nazwą przeszło ono do literatury. Ów wynik utorował drogę szczególnie użytecznej odmianie dedukcji naturalnej, którą nazywa się metodą tablic analitycznych (zob. poniżej 3.), a także odmianie zwanej *logiką dialogową. Wśród innych ważnych konsekwencji wyniku Gentzena jest jego zastosowanie w dowodzie niesprzeczności arytmetyki (bez aksjomatu indukcji), niesprzeczności rachunku kwantyfikatorów i in. (Gentzen 1934).

Reguły wprowadzania stałych logicznych do poprzednika (oznaczone literą A) i do następnika (oznaczone literą S) są następujące:

$$(\mathrm{A}\to)\quad \frac{T \vdash U, A;\ B, W \vdash X}{A\to B, T, W \vdash U, X}$$

$$(\mathrm{S}\to)\quad \frac{A, T \vdash U, B}{T \vdash U, A\to B}$$

$$(\mathrm{A}.)\quad \frac{A, T \vdash U}{A.B, T \vdash U},\qquad \frac{B, T \vdash U}{A.B, T \vdash U}.$$

$$(\mathrm{S}.)\quad \frac{T \vdash U;\ A\ T \vdash U, B}{T \vdash U, A.B}.$$

$$(\mathrm{A}\vee)\quad \frac{A, T \vdash U\ B, T \vdash U}{A \vee B,\ T \vdash U}.$$

$$(S\vee)\quad \frac{T\vdash U, A}{T\vdash U, A\vee B}\qquad \frac{T\vdash U, B}{T\vdash U, A\vee B}$$

$$(A\sim)\quad \frac{T\vdash U, A}{\sim A, T\vdash U},$$

$$(S\sim)\quad \frac{A, T\vdash U}{T\vdash U, \sim A},$$

z U pustym dla systemu intuicjonistycznego.

$$(AU)\quad \frac{B(a), T\vdash U}{(x)B(x), T\vdash U}.$$

$$(SU)\quad \frac{T\vdash U, B(a)}{T\vdash U, (x)B(x)},$$

z zastrzeżeniem, że zmienna wolna a nie pojawia się we wniosku (tj. pod kreską).

$$(AE)\quad \frac{B(a), T\vdash U}{(Ex)B(x), T\vdash U}$$

z zastrzeżeniem jak wyżej.

$$(SE)\quad \frac{T\vdash U, B(a)}{T\vdash U, (Ex)B(x)}.$$

Każdy dowód zaczyna się od jedno- lub wielokrotnego użycia jedynego aksjomatu, którym jest sekwencja typu $A\vdash A$. Przekształcenia tego aksjomatu, dokonywane za pomocą reguł strukturalnych i reguł wprowadzania stałych, dają takie jego rozwinięcia, które w ostatnim kroku doprowadzają do formuły będącej przedmiotem dowodu. Oto przykład dowodu jednej z wersji prawa De Morgana dla kwantyfikatorów.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Ba\vdash Ba}{Ba\vdash (Ex)Bx}\,(SE)\quad \dfrac{(Ex)Bx\vdash (Ex)Bx}{\sim(Ex)Bx, (Ex)Bx\vdash}\,(A\sim)}{(Ex)Bx, \sim(Ex)Bx\vdash}\ \text{Przestawianie}}{Ba, \sim(Ex)Bx\vdash}\ \text{Cięcie}}{\dfrac{\sim(Ex)Bx\vdash \sim Ba}{\sim(Ex)Bx\vdash (x)\sim Bx}\,(SU)}{\sim(Ex)Bx\to(x)\sim Bx}\,(S\to)$$

3. Metoda tabel analitycznych. Tabele analityczne (Smullyan 1968) wywodzą się z tabel semantycznych Betha (1955, 1959) i pewnej metody dowodowej Hintikki (1955); wszystkie te odmiany należą do metody dowodu nie wprost (łac. reductio ad absurdum), robionego metodą kontrprzykładu. Ujęcia Betha i Hintikki, jako bardziej skomplikowane, nie będą tutaj rozważane, tym bardziej że główna ich idea jest widoczna w owej prostej metodzie tabel analitycznych będącej przedmiotem obecnego rozważania.

Reguły tabel analitycznych są to wyłącznie reguły opuszczania stałych logicznych. Opuszczanie prowadzi do coraz prostszych formuł, będących składnikami formuły wyjściowej, a więc stanowi rodzaj analizy. Jest to postępowanie niejako odwrotne do procedury rachunku Gentzena, gdzie możliwie najprostsza sekwencja wyjściowa, zwana aksjomatem, jest stopniowo rozbudowywana za pomocą reguł dołączania stałych logicznych. W tabelach analitycznych stosowanie reguł kierowane jest prostą zasadą: do danej formuły stosuje się tę regułę opuszczania, która dotyczy głównego funktora lub stojącego na czele kwantyfikatora, a w przypadku zdań przeczących dotyczy negacji oraz głównego symbolu formuły negowanej (w *symbolice Łukasiewicza odpowiednia reguła odnosiłaby się do pierwszego lub dwóch pierwszych symboli formuły). Pionowa kreska w następniku reguły oznacza rozgałęzienie dowodu na dwa alternatywne wątki zwane gałęziami dowodu. Dowód jest zakończony, gdy rozłożyło się formułę wyjściową na wszystkie jej najprostsze składniki (w sensie Teilformeln u Gentzena 1934). Jeśli na każdej gałęzi pojawia się para tego rodzaju składników między sobą sprzecznych, np. $B(a)$ i $\sim B(a)$, to mówimy, że tabela jest zamknięta, w przeciwnym wypadku mówi się o tabeli otwartej. Gdy tabela jest zamknięta, znaczy to, że formuła wyjściowa $\sim A$, jako prowadząca w każdym przypadku do sprzeczności, nie jest spełnialna; zaś $\sim A$ nie jest spełnialna wtedy i tylko, gdy jej negacja, tj. A, jest *tautologią. Tym sposobem dochodzimy do stwierdzenia tautologiczności formuły A poddanej owemu testowi zaprzeczenia i wysnuwania zeń wszystkich możliwych konsekwencji (konsekwencjami formuły są m. in. wspomniane najprostsze jej składniki). Jeśli natomiast któraś z gałęzi pozostaje otwarta, ujawnia ona przypadek, w którym formuła wyjściowa $\sim A$ jest spełniona, a taki przypadek świadczy, że A nie jest tautologią. Tak więc metoda tabel analitycznych pozwala znajdować nie tylko rozstrzygnięcia pozytywne, lecz także negatywne, tj. stwierdzić o jakiejś formule, że nie jest ona tautologią (oczywiście, w granicach wyznaczonych przez fakt, że zbiór formuł rachunku kwantyfikatorów nie jest rozstrzygalny).

Oto lista reguł wnioskowania systemu tabel analitycznych.

$$(\sim\sim)\quad \frac{\sim\sim A}{A}$$

$$(\cdot)\quad \frac{A.B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}\qquad (\sim\cdot)\quad \frac{\sim(A.B)}{\sim A\,|\,\sim B}$$

$$(\vee)\quad \frac{A\vee B}{A\,|\,B}\qquad (\sim\vee)\quad \frac{\sim(A\vee B)}{\begin{array}{c}\sim A\\ \sim B\end{array}}$$

$$(\to)\quad \frac{A\to B}{\sim A\,|\,B}\qquad (\sim\to)\quad \frac{\sim(A\to B)}{\begin{array}{c}A\\ \sim B\end{array}}$$

$$(E)\quad \frac{(Ex)A(x)}{A(c)}\qquad (\sim E)\quad \frac{\sim(Ex)A(x)}{\sim A(c)}$$

$$(\mathrm{U})\quad \frac{(x)A(x)}{A(c)} \qquad (\sim\mathrm{U})\quad \frac{\sim(x)A(x)}{\sim A(c)}$$

Do reguł (E) i (∼U) dołączone jest następujące zastrzeżenie: mogą one być stosowane tylko w ten sposób, że parametr indywiduowy c (którym po opuszczeniu kwantyfikatora zastępujemy zmienną x wszędzie tam, gdzie występuje ona w formule A) nie pojawił się we wcześniejszym wierszu dowodu w jakiejś formule różnej od A; jeśli zaś c pojawia się wcześniej, to należy użyć w charakterze parametru innej litery, nie występującej dotąd w dowodzie. Zastrzeżenie to tłumaczy się w sposób następujący: Przypuśćmy, że w danym dowodzie zostało już stwierdzone istnienie przedmiotu spełniającego A, tzn. stwierdzone $(\mathrm{Ex})A(x)$. Możemy wtedy wprowadzić indywiduum, które oznaczymy symbolem c, powiadając: niech c będzie owym x spełniającym A. Jeśli potem wykażemy, że istnieje przedmiot spełniający warunek B, to nie możemy nazwać go znowu symbolem c, bo to by przesądzało, że ów przedmiot spełnia oba warunki, co nie zostało udowodnione; używając zaś innej litery, np. a, niczego takiego nie przesądzamy (równokształtność oznaczeń wskazuje na identyczność przedmiotów oznaczanych, natomiast brak równokształtności nie wskazuje ani na identyczność przedmiotów, ani na jej brak: może się zdarzyć $a = c$, jak i $a \neq c$). Analogiczne uzasadnienie odnosi się do zastrzeżenia przy regule (∼U), która ma również charakter egzystencjalny: to że nie każdy przedmiot spełnia A, znaczy tyle, że istnieją przedmioty nie spełniające A.

Oto przykład dowodu w formie tabeli analitycznej (dla skrócenia napisów opuszczać się będzie nawiasy tam, gdzie nie są konieczne). Dowodzi się formuły:

$$(x)(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow ((x)Ax \rightarrow (x)Bx),$$

a więc przyjmuje się jako założenie dowodu nie wprost jej negację; to znaczy, zgodnie z (∼→), przyjmuje się poprzednik implikacji oraz negację jej następnika; daje to dwa założenia naszego dowodu, oznaczone niżej numerami 1 i 2.

1	$(x)(Ax \rightarrow Bx)$	
2	$\sim((x)Ax \rightarrow (x)Bx)$	
3	$(x)Ax$	2
4	$\sim(x)Bx$	2
5	Aa	3
6	$\sim Ba$	4
7	$Aa \rightarrow Ba$	1
8	$\underline{\underline{\sim Aa}} \mid \underline{\underline{Ba}}$	

(podwójna kreska oznacza, że tabela się zamyka po wystąpieniu sprzeczności w danej gałęzi dowodu).

Dowód formuły $(\mathrm{Ex})(y)Rxy \rightarrow (y)(\mathrm{Ex})Rxy$, gdzie, dla ustalenia uwagi, możemy interpretować Rxy np. jako predykat: x jest liczbą naturalną większą niż y.

1	$(\mathrm{Ex})(y)Rxy$	
2	$\sim(y)(\mathrm{Ex})Rxy$	
3	$(y)Ray$	1
4	$\sim(\mathrm{Ex})Rxb$	2
5	Rab	3
6	$\sim\underline{\underline{Rab}}$	4

Zbadajmy dowodliwość formuły będącej implikacją odwrotną w stosunku do poprzedniej, czyli: (y) (Ex) Rxy → →(Ex) (y) Rxy.

1	$(y)(\mathrm{Ex})Rxy$	
2	$\sim(\mathrm{Ex})(y)Rxy$	
3	$(\mathrm{Ex})Rxa$	1
4	Rba	3
5	$\sim(y)Rby$	2
6	$\sim Rbc$	5

(nie można y zastąpić przez a, ze względu na zastrzeżenie przy regule (∼U)). Rozważana formuła okazuje się niedowodliwa, ponieważ w zbiorze konsekwencji płynących z jej zaprzeczenia nie pojawiła się sprzeczność; znaczy to, że formuła nie jest tautologią. Widać to także z interpretacji predykatu R jako większości: prawdą jest w zbiorze liczb naturalnych, że dla każdej liczby istnieje liczba od niej większa (poprzednik naszej formuły), nie jest zaś prawdą, że istnieje liczba większa od każdej liczby (następnik formuły).

Metoda tabel analitycznych, mająca charakter w pewnym sensie syntaktyczny, wzorowany na podejściu Hintikki 1955, podziela też pewne rysy z metodą tabel semantycznych Betha 1955. Wspólne obu metodom jest poszukiwanie kontrprzykładu w postaci pary sprzecznych między sobą zdań, z których jedno jest zdaniem atomowym. Różni je natomiast to, że formuły, które w tabeli analitycznej podlegają zaprzeczeniu, w tabeli semantycznej pisane są bez przeczenia, w osobnej kolumnie zatytułowanej „fałsz" (invalid) podczas gdy pozostałe wpisuje się do kolumny pod tytułem „prawda" (valid). Tabela semantyczna się zamyka, gdy dla każdej formuły atomowej z jednej kolumny istnieje równokształtna z nią formuła atomowa w drugiej kolumnie. Użycie terminu „tabela semantyczna" tłumaczy się występowaniem w niej semantycznych pojęć prawdy i fałszu. Jeśli natomiast kolumnom tym nada się, odpowiednio, tytuły w rodzaju „teza głoszona", „teza zaprzeczana", to otrzymamy pragmatyczną wersję tabel, charakterystyczną dla *logiki dialogowej.

4. O pełności systemu tabel analitycznych. Twierdzenie o pełności reguł wnioskowania, zwanej też pełnością (lub zupełnością) semantyczną, stwierdza, że każde zdanie prawdziwe danego systemu jest w nim dowodliwe za pomocą właściwych temu systemowi reguł wnioskowania. W systemie tabel analitycznych formuła A jest dowodliwa wtedy i tylko, gdy w tabeli dla A, tzn. tabeli zawierającej konsekwencje wyprowadzone z $\sim A$, wszystkie gałęzie są zamknięte.

Wprowadzimy za Hintikką (1955, 1962 i in.) pojęcie zbioru modelowego formuł (model set). Definiuje się je następująco:
(a) Jeśli formuła A należy do zbioru modelowego **S**, to $\sim A$ nie należy do **S**.
(b) Jeśli formuła A, lub para formuł A, B, należy do **S**, to należy do **S** także każda formuła wyprowadzalna z A, ewentualnie z pary A, B, za pomocą (wymienionych w poprzednim odcinku) reguł od ($\sim\sim$) do ($\sim$U).

Tak więc otwarte gałęzie tabeli są ze względu na (b) zbiorami modelowymi, zaś zamknięte gałęzie – ze względu na (a) – nie są zbiorami modelowymi.
Rozważając pełność systemu tabel analitycznych, korzystamy z dwóch faktów, z których jeden wykażemy potem (by nie przerywać ciągłości wywodu), drugi zaś wyraża się w jednym z podstawowych twierdzeń teoriomodelowych.
(1) Każdy zbiór modelowy dla jakiejś dziedziny D jest w D spełnialny.
(2) Formuła A jest tautologią wtedy i tylko, gdy formuła $\sim A$ nie jest spełnialna; tzn. jakikolwiek by rozważać model M, nie znajdzie się w M przedmiotów spełniających $\sim A$, co wynika z definicji *tautologii.
Twierdzeniu o pełności nadać można następującą formę – przez transpozycję sformułowania podanego na wstępie:
(P) Jeśli formuła A nie jest dowodliwa, to A nie jest tautologią. Niech Tab ($\sim A$) oznacza tabelę służącą do testowania formuły A, a więc będącą jej dowodem, gdy się okaże, że wszystkie gałęzie Tab ($\sim A$) są zamknięte, zaś kontrprzykładem, gdy przynajmniej jedna gałąź okaże się otwarta.

Jeśli formuła A nie jest dowodliwa, jak się zakłada w poprzedniku twierdzenia (P), to w Tab ($\sim A$) istnieje gałąź otwarta, a więc gałąź będąca jakimś zbiorem modelowym $\mathbf{S}_k$. Na mocy (1) gałąź $\mathbf{S}_k$ jest spełnialna, a więc i formuła $\sim A$, będąca wierzchołkiem drzewa jest spełnialna, bo wierzchołek należy do każdej gałęzi. A jeśli $\sim A$ jest spełnialna, to na mocy (2) A nie jest tautologią. Tak więc z poprzednika tezy (P) wynika jej następnik, co znaczy, że została udowodniona implikacja (P).

Zdanie (1) użyte wyżej jako przesłanka zawdzięcza swą prawdziwość definicji *spełniania. Punktem wyjścia tej definicji jest warunek dotyczący formuł atomowych: formuła $R(a_1, ..., a_n)$ jest spełniona wtedy i tylko, gdy relacja R zachodzi dla indywidów oznaczonych parametrami od a_1 do a_n. Następnymi punktami definicji spełniania są te same warunki, które stanowią charakterystykę zbioru modelowego, tzn. warunki wprowadzające formuły, które powstają z wcześniej posiadanych formuł przez poprzedzanie negacją, łączenie koniunkcją, alternatywą lub implikacją, lub też poprzedzenie kwantyfikatorami. Dzięki temu wynika z tych definicji (1), tj. teza, że każdy zbiór modelowy dotyczący jakiejś dziedziny jest w tej dziedzinie spełnialny.
Obszerna dyskusja pełności systemu tabel analitycznych znajduje się w monografii Smullyana 1968 oraz w podręczniku Bella i Machovera 1977. Przykładu zastosowania tabel analitycznych w logice wielowartościowej dostarcza Suchoń 1977. Inne systemy dedukcji naturalnej podają prace Borkowski i Słupecki, Suppes 1957 i in. Przykład dedukcji naturalnej dla logiki modalnej znaleźć można w podręczniku Masseya 1977.

J. L. Bell, M. Machover: *A course in mathematical logic*. 1977; E. W. Beth: *Semantic entailment and formal derivability*. 1955; – – *Foundations*; L. Borkowski: *Elementy logiki formalnej*. 1972; G. Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schliessen*. „Math. Zeitschr." 1934–35. XXXIX. Przedr. [W:] K. Berka, L. Kreiser (red.): *Logik-Texte*. 1973; J. Hintikka: *Form and content in quantification theory*. „Acta Philos. Fennica" 1955 VIII; – – *Knowledge and belief*. 1962; S. Jaśkowski: *On the rules of supposition in formal logic*. „St. Log." 1934 I; Kneale: *Development of logic*; G. J. Massey: *Understanding symbolic logic*. 1970; H. Rasiowa, R. Sikorski: *The mathematics of metamathematics*. 1963; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; R. M. Smullyan: *First-order logic*. 1968. W. Suchoń: *Smullyan's method of constructing Łukasiewicz's n-valued implicational-negational sentential calculus*. [W:] R. Wójcicki (red.): *Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi*. 1977; P. Suppes: *Introduction to logic*. 1957.

W. M.

definicja. Termin ten użyty bez przydawki, odnoszony bywa z reguły do *definicji normalnej, w którejś z jej postaci (analitycznej lub syntetycznej, słownikowej lub semantycznej itd). Ponadto można uważać za zakres nazwy „definicja" sumę zakresów tych wszystkich nazw, które utworzone są ze słowa „definicja" oraz następującego po nim przymiotnika („aksjomatyczna", „redukcyjna" itp.). Dla tak utworzonej klasy trudno jednak znaleźć cechę wspólną wszystkim jej elementom, poza tą jedną, że każdy przyczynia się w jakiś sposób do wyjaśnienia sensu pewnego wyrażenia. Tak ogólnikowa charakterystyka nie odróżnia definicji od innych zwrotów językowych, toteż jako jedyny sposób określenia owej nadrzędnej klasy definicji pozostaje wyliczenie jej podzbiorów, uprzednio już zdefiniowanych w sposób nie odwołujący się do jakiegoś nadrzędnego pojęcia definicji. Uzasadnia to omawianie każdego z rodzajów definicji osobno, zamiast traktowania ich jako członów powstających z podziału zbioru definicji.

K. Ajdukiewicz: *Trzy pojęcia definicji*. [W:] *JiP*. T. 2 i [W:] *LTN*.

W. M.

definicja aksjomatyczna (d. przez postulaty, d. w uwikłaniu). Definicją aksjomatyczną terminów $T_1 ... T_n$ jest zbiór zdań $Z_1 ... Z_n$ tak dobranych, że kolejno ograniczają zakres możliwych interpretacji terminów $T_1 ... T_n$; przez możliwe interpretacje terminów $T_1 ... T_n$ rozumie się takie interpretacje, przy których zdania $Z_1 ... Z_n$ są prawdziwe. Np. zdania $[1] \wedge x(xFx)$, $[2] \wedge x \wedge y(xFy \rightarrow yFx)$,

[3] $\wedge x \wedge y \wedge z(xFy \wedge yFz \rightarrow xFz)$ są prawdziwe, gdy interpretuje się F jako dowolną równość. Właściwą interpretację znajduje się tu dzięki wyeliminowaniu relacji podobieństwa (przy której spełnione byłyby [1] i [2], lecz nie [3]), relacji w rodzaju inkluzji (przy której spełnione byłyby [1] i [3], lecz nie [2]), relacji takich, jak mniejszość (nie spełniających [1] ani [2]), itd.

Powyższy przykład, pokazujący sposób funkcjonowania definicji aksjomatycznej, zawiera pewne terminy (kwantyfikatory i in. stałe logiczne), których znaczenie trzeba znać uprzednio, jeśli domyślanie się znaczenia F ma być skuteczne. Są też takie definicje aksjomatyczne, w których wszystkie terminy są wprowadzone po raz pierwszy do danego języka. Przykładem może tu być dowolny układ aksjomatów dla *rachunku zdań; stanowi on zawsze definicję aksjomatyczną wszystkich terminów występujących w aksjomatach, czyli wszystkich terminów pierwotnych danego systemu. W językach naturalnych rolę analogiczną do definicji aksjomatycznych spełniają konteksty zawierające nieznany nam wyraz, gdy w drodze porównywania tych kontekstów można się domyślać znaczenia danego wyrazu.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Beth: *Foundations*; W. Dubislav: *Die Definition*. 1931; Kotarbiński: *Elementy*; H. Stonert: *Język i nauka*. 1964.

W. M.

definicja analityczna (d. sprawozdawcza; vs definicja syntetyczna). Jedno pojęcie definicji analitycznej i, odpowiednio, syntetycznej przedstawione zostało przez Kotarbińskiego: (1) definicja analityczna jest definicją w pewnym języku dla tegoż języka; drugie pochodzi od Ajdukiewicza: (2) definicja analityczna jest w pewnym języku dla innego języka. Każde z tych pojęć ma oprócz wariantu syntaktycznego (zasadniczego) wariant pragmatyczny, zrelatywizowany do osoby.

(1) *D* jest definicją analityczną wyrażenia *W* w języku *J* wtedy i tylko, gdy *D* jest definicją normalną, odpowiadającą bądź na pytanie a) jakie jest znaczenie *W* w zastanym w *J* sposobie mówienia, bądź b) jaki jest zakres *W* w zastanym w *J* sposobie mówienia.

Punkt a) odnosi się do definicji analitycznych w sensie węższym, b) do definicji w sensie szerszym. Gdy na pytanie o sens lub zakres definicja analityczna odpowiada trafnie, jest prawdziwym twierdzeniem o języku *J*.

D jest definicją syntetyczną wyrażenia *W* w języku *J* wtedy i tylko, gdy *D* odpowiada na pytanie, jakie jest znaczenie *W* w projektowanym w *J* sposobie mówienia.

Definicja: «„Premier" znaczy w języku polskim tyle, co „Przewodniczący Rady Ministrów"» jest analityczna, ponieważ zdaje sprawę z zastanego sposobu mówienia. Definicja zaproponowana w swoim czasie przez Marię Curie-Skłodowską: «Niech wyraz „polon" znaczy tyle, co „pierwiastek o ciężarze atomowym 210"» jest syntetyczna, ponieważ charakteryzuje pewien projekt terminologiczny.

Warianty pragmatyczne dla (1). *D* jest definicją analityczną wyrażenia *W* w języku *J* ze względu na osobę *P* wtedy i tylko, gdy *P* zalicza *D* do poprawnych definicji analitycznych (a więc prawdziwych zdań o *J*) wyrażenia *W* w *J*. *D* jest definicją syntetyczną wyrażenia *W* w języku *J* ze względu na *P* wtedy i tylko, gdy *P* zalicza *D* do definicji syntetycznych w *J*.

(2) Jako pojęcie nadrzędne wprowadza się pojęcie możliwej definicji nominalnej (w stylizacji przedmiotowej): *D* jest możliwą definicją nominalną wyrażenia *W* dla języka *J* na gruncie języka *J'* wtedy i tylko, gdy: 1° *W* nie należy do *J*; 2° *W* należy do bogatszego języka *J'* zawierającego *J* jako swą część właściwą; 3° definiens jest przekładem wyrażenia *W* na odpowiednie wyrażenia z języka *J*.

Możliwą definicją nominalną dla języka ucznia (*J*), sformułowaną na gruncie języka nauczyciela (*J'*) bywa np. zdanie: „Mikron jest to tysięczna część milimetra". Należy tu też m. in. definicja liczby naturalnej sformułowana dla języka arytmetyki (*J*) na gruncie języka logiki (*J'*). Możliwa definicja nominalna nie jest zdaniem w *J*, ponieważ zawiera termin w tym języku nie istniejący. Jest natomiast zdaniem w bogatszym języku *J'*, będąc w tym języku zdaniem prawdziwym lub nieprawdziwym. Zdania takie mogą być uzasadniane w różny sposób, m. in. przez powołanie się na reguły aksjomatyczne danego języka. Wśród reguł aksjomatycznych jedne zawdzięczają swą moc zwyczajowi językowemu, inne wyraźnej konwencji terminologicznej. Te ostatnie pozwalają wyróżnić w zbiorze możliwych definicji nominalnych klasę definicji syntetycznych, która posłuży następnie do scharakteryzowania (przez przeciwstawienie) klasy definicji analitycznych.

D jest definicją syntetyczną wyrażenia *W* w języku *J'* dla języka *J* wtedy i tylko, gdy: 1° *D* jest możliwą definicją nominalną *W* w *J'* dla *J*; 2° *D* jest podyktowana przez taką regułę aksjomatyczną, która swą moc obowiązującą zawdzięcza wyraźnej konwencji terminologicznej.

D jest definicją analityczną wyrażenia *W* w *J'* dla *J* wtedy i tylko, gdy: 1° *D* jest możliwą definicją nominalną *W* w *J'*; 2° *D* nie jest definicją syntetyczną.

Wariant pragmatyczny. *D* jest definicją syntetyczną *W* w *J'* dla *J*, ze względu na osobę *P* wtedy i tylko, gdy *P* zalicza *D* do definicji syntetycznych wyrażenia *W* w *J'* dla *J*.

D jest definicją analityczną wyrażenia *W* w języku *J'* dla języka *J*, ze względu na osobę *P*, wtedy i tylko, gdy *P* zalicza *D* do poprawnych definicji analitycznych wyrażenia *W*, sformułowanych w języku *J'* dla języka *J*.

K. Ajdukiewicz: *Trzy pojęcia definicji*. [W:] *JiP*. T. 2. i [W:] *LTN*; L. Borkowski: *Über analytische und synthetische Definitionen*. „St. Log." IV 1956; J. Kotarbińska: *Definicja*. „St. Log." II 1955; Kotarbiński: *Elementy*; Pap: *Elements*; Pawłowski: *Def. w humanist.*; R. Robinson: *Definition*. 1950.

W. M.

definicja arbitralna (postulat znaczeniowy). Zdanie, którego prawdziwość jest zagwarantowana przez postanowienie terminologiczne co do tego, do jakich przedmiotów mają się odnosić terminy wchodzące w skład tego zdania. Dokładniej: Zdanie Z jest definicją arbitralną w języku J wtedy i tylko, gdy w J obowiązuje konwencja terminologiczna ustanawiająca, że terminy występujące w Z mają denotować przedmioty, które na miejscu tych terminów spełniają Z. Definicja arbitralna może mieć formę *definicji normalnej (równościowej) lub *definicji cząstkowej.

Jeśli ktoś chce tak rozumieć np. słowo „łabędź", że zalicza do łabędzi tylko ptaki o białych piórach, to komunikując swą decyzję za pomocą zdania „wszystkie łabędzie są białe" wygłasza definicję arbitralną (w tym wypadku cząstkową) terminu „łabędź".

Zob. też. **zdanie analityczne.**

Ajdukiewicz: *Trzy pojęcia definicji*. [W:] *JiP.* T. 2 i [W:] *LTN*; Carnap: *MaN*.

W. M.

definicja cząstkowa. Wyrażenie lub para wyrażeń w języku przedmiotowym (nie w metajęzyku), o budowie okresu warunkowego, które wprowadzają do danego języka nowy *predykat. Jako okres warunkowy (a nie równoważność) wyrażenie takie podaje tylko niektóre kryteria stosowalności dla wprowadzenia terminu: sam warunek wystarczający lub sam warunek konieczny, bądź też (w wypadku pary zdań) niektóre tylko warunki konieczne i tylko niektóre wystarczające; warunek konieczny formułuje się zwykle w ten sposób, że podaje się warunek wystarczający dla negacji danego terminu. Termin zdefiniowany cząstkowo jest więc zawsze nieostry. Najprostszy schemat definicji cząstkowej przybiera często postać pary zdań: $\wedge x(Px \rightarrow Qx)$, $\wedge x(Rx \rightarrow \sim Qx)$, gdzie Q jest terminem właśnie definiowanym, zaś pozostałe należą do predykatów uprzednio zdefiniowanych lub obserwacyjnych. Np. $\wedge x$(x ma lat $20 \rightarrow x$ jest dorosły); $\wedge x$(x ma lat $15 \rightarrow x$ nie jest dorosły).

Jedną z postaci definicji cząstkowej jest definicja redukcyjna (1), służąca do definiowania terminów teoretycznych za pomocą elementarnych. Ze względu na probabilistyczny charakter związku między poprzednikiem a następnikiem (gdy spełniony jest poprzednik, to 'przeważnie' spełniony jest i następnik) wyróżnia się cząstkowe definicje probabilistyczne.

Dyskutowana jest sprawa sensowności wyrażeń, w których występują terminy zdefiniowane cząstkowo. Istnieje radykalny pogląd odmawiający sensowności wszystkim takim wyrażeniom. Na przeciwnym krańcu znajduje się stanowisko przypisujące sensowność wszystkim kontekstom zawierającym terminy zdefiniowane cząstkowo. Do umiarkowanych należy m. in. pogląd: Sensowne są wszystkie i tylko te wyrażenia, z których termin zdefiniowany da się wyeliminować za pomocą definicji cząstkowej.

Pawłowski: *Def. w humanist.*; M. Przełęcki: *Pojęcia teoretyczne a doświadczenie*. [W:] *LTN*.

W. M.

definicja indukcyjna (d. rekurencyjna). Jest to definicja *zbioru dobrze uporządkowanego, w którym dają się wyróżnić elementy wyjściowe oraz elementy otrzymane z wyjściowych; również definicja jakiejś własności tego rodzaju zbioru, uprzednio określonego indukcyjnie. Definicja indukcyjna składa się z dwóch części: warunku wyjściowego i warunku indukcyjnego. Warunek wyjściowy stwierdza, które przedmioty niewątpliwie należą do określanego zbioru; warunek indukcyjny stwierdza, w jakim stosunku do przedmiotów już należących do zbioru powinien pozostawać nowy przedmiot, jeśli i on ma należeć do owego zbioru.

Np. na definicję indukcyjną zbioru wyrażeń sensownych implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań składają się: 1° Warunek wyjściowy: Jeśli x jest zmienną zdaniową, to x jest wyrażeniem sensownym. 2° Warunek indukcyjny: Jeśli x jest negacją lub implikacją o argumentach będących wyrażeniami sensownymi, to x jest również wyrażeniem sensownym. Definicja indukcyjna dodawania dla liczb naturalnych obejmuje warunki: 1° $x+0=x$; 2° $x+\text{seq}(y)=\text{seq}(x+y)$, gdzie „seq($y$)" oznacza liczbę większą o jedność y, czyli tzw. następnik (łac. sequens) y.

Definicje indukcyjne w powyższej postaci nie spełniają warunku przekładalności, czyli warunku eliminowalności terminu definiowanego (*Definicja normalna); np. w definicji dodawania znak „+" występuje po obu stronach drugiej równości. Dają się one jednak sprowadzić do postaci definicji normalnej, tj. spełniającej warunek przekładalności. Podana wyżej definicja wyrażenia sensownego przybierze wówczas postać (w wysłowieniu nie-symbolicznym): Zbiór wyrażeń sensownych implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań jest to: 1° najmniejszy zbiór, do którego należą zmienne zdaniowe (warunek wyjściowy), który jest zarazem 2° zamknięty ze względu na operacje tworzenia negacji i implikacji (warunek indukcyjny). Przez najmniejszy zbiór o własności W rozumie się taki zbiór Z, który sam posiada własność W i zawiera się w każdym zbiorze o własności W; przez zbiór zamknięty ze względu na operację O rozumie się taki zbiór Z, którego elementy, przekształcone przez zastosowanie operacji O, są znowu elementami Z.

Dla powyższej nie-symbolicznej charakterystyki definicji indukcyjnej istnieje równoważna jej ścisła postać symboliczna (zob. Grzegorczyk oraz Słupecki, Borkowski).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; — — *Propedeutyka filozofii*. 1950; Beth: *Foundations*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Mostowski: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M

definicja klasyczna.
(1) *Definicja realna o budowie: A jest B i C, gdzie A, B, C reprezentują nazwy, zaś „jest" należy rozumieć jako funktor identyczności. Z dwóch nazw tworzących definiens pierwsza podaje klasę, w której zawiera się (jako część właściwa) zakres definiowanego wyrazu A; druga natomiast wskazuje na to, co wyróżnia elementy klasy A spośród elementów nadrzędnej nad nią klasy B. Termin denotujący klasę nadrzędną nazywa się terminem rodzajowym (krócej: rodzajem, łac. genus); termin określający różnicę nazywa się różnicą gatunkową (łac. differentia specifica), ponieważ wyróżnia przedmioty tworzące pewien gatunek (łac. species) od innych przedmiotów należących do tego samego rodzaju. Stąd tradycyjna formuła: Definitio fit per genus et differentiam specificam (definicja powstaje za pomocą rodzaju i różnicy gatunkowej). Przykład: Planeta (gatunek) jest to ciało niebieskie (rodzaj) krążące wokół słońca (różnica gatunkowa).
(2) Autorzy nie godzący się na przyznawanie definicjom charakteru twierdzeń rzeczowych (zob. Kotarbiński) pojmują definicję klasyczną jako *definicję nominalną podaną w stylizacji przedmiotowej (tj. w takim sformułowaniu, jak gdyby była ona twierdzeniem rzeczowym), a poza tym spełniającą warunki, o których w (1).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

definicja kontekstowa. *Definicja normalna, w której wyraz mający być zdefinowany nie stanowi całego definiendum, lecz tylko jego część umieszczoną w typowym dla tego wyrazu kontekście.
Definicja tego rodzaju stosowana jest jako charakterystyka znaczeniowa tzw. wyrażeń niesamodzielnych (inaczej: niezupełnych, ang. incomplete symbols), tj. wyrażeń uzyskujących sens nie na drodze przyporządkowania do pewnych przedmiotów, lecz poprzez określenie roli, jaką pełnią one w kontekście. W wypadku np. funktora kontekstem takim są jego argumenty, podawane z reguły w postaci zmiennych. Definicja funktora implikacji podawana bywa w postaci: $(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$. Definicja logarytmu: $x = \log_b a \equiv b^x = a$. Do definicji kontekstowych należą także *definicje przez abstrakcję.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; W. Dubislav: *Die Definition*. 1931; Kneale: *Development of logic*; Pawłowski: *Def. w humanist.*; *Principia*.

W. M.

definicja metajęzykowa (vs definicja wewnątrzjęzykowa). Definicja jest metajęzykowa, jeśli występuje w niej nazwa cudzysłowowa wyrażenia definiowanego. Takimi są wszelkie *definicje nominalne—(2). Definicja jest wewnątrzjęzykowa, jeśli wyrażenie definiowane nie jest w niej cytowane za pomocą cudzysłowów, lecz użyte w twierdzeniu o postaci równości lub równoważności. Takimi są *definicje realne (1) i (2).

K. Ajdukiewicz: *Trzy pojęcia definicji*. [W:] *JiP*. T. 2 i [W:] *LTN*.

W. M.

definicja nominalna (vs definicja realna).
(1) *Definicja normalna wyrażenia sformułowana bądź w stylizacji metajęzykowej, bądź przedmiotowej. Przez stylizację metajęzykową rozumie się taką postać definicji normalnej, w której mówi się o wyrażeniu definiowanym; stąd użycie cudzysłowów, czyli wzięcie definiendum (lub nadto i definiensa) w supozycji materialnej. Przez stylizację przedmiotową rozumie się taką postać definicji normalnej, w której pozornie mówi się o przedmiotach, ale intencją mówiącego jest charakterystyka znaczeniowa (lub przynajmniej zakresowa) wyrażenia; np. na pytanie co znaczy słowo „kapela" udziela się odpowiedzi: „Kapela to wieloosobowy zespół muzyków grających na różnych instrumentach". O nominalnym charakterze definicji decyduje intencja zdefiniowania wyrażenia (a nie rzeczy), uwyraźniona w stylizacji bądź też domyślna.
(2) Definicja normalna wyrażenia dokonana w stylizacji metajęzykowej. Klasa tak pojętych definicji nominalnych jest częścią klasy określonej przez (1), ponieważ zakłada się, że stylizacja metajęzykowa idzie zawsze w parze z intencją zdefiniowania wyrażenia.
(3) Definicja normalna nie podająca informacji o desygnatach wyrażenia definiowanego, lecz jedynie informację o tym, jakie wyrażenie równoznaczne jest z definiowanym. Np. «„wakuola" znaczy tyle, co „wodniczka"». Należą tu również definicje wprowadzające skróty, tj. podające sposób zastępowania jakiegoś wyrażenia wyrażeniem odeń krótszym.
(4) Definicja normalna nie podająca cech istotnych przedmiotu określanego, lecz jedynie cechy tzw. przypadłościowe, np. „Człowiek jest to zwierzę zdolne do śmiechu".
(5) Definicja normalna wyrazu nie mającego dotąd w danym języku określonego znaczenia. Inaczej: *definicja syntetyczna (2).
(6) Definicja normalna, której nie towarzyszy tzw. założenie egzystencjalne, tj. założenie o istnieniu przedmiotu denotowanego przez definiens.
Zob. też **definicja realna,** gdzie pod tymi samymi numerami znajdują się, odpowiednio, pojęcia dopełniające (w obrębie klasy definicji normalnych) do podanych wyżej pojęć definicji nominalnej, np. definicja realna (3) to każda definicja normalna nie będąca nominalną w sensie (3). Powyższe 6 znaczeń należy do bardziej aktualnych. W sprawie innych zob. Kotarbińska.

K. Ajdukiewicz: *O definicji*. [W:] *JiP*. T. 2; – – *Trzy pojęcia definicji*. [W:] *JiP*. T. 2; J. Kotarbińska: *Definicja*. „St. Log." II 1955; R. Robinson *Definition*. 1950.

W. M.

definicja normalna (d. równościowa, d. pełna). D jest definicją normalną wyrażenia W (na gruncie języka J) wtedy i tylko, gdy D ma postać równości lub równoważności, która pozwala przełożyć każdy zwrot językowy zawierający wyrażenie W na zwrot nie zawierający tego wyrażenia (innymi słowy, pozwala wyeliminować W z dowolnego kontekstu).

Powyższy warunek, charakterystyczny dla definicji normalnej, nazywa się warunkiem przekładalności. Poprawna definicja normalna spełnia ponadto następujące warunki: 1° jest wolna od *błędnego koła (w definiowaniu); 2° w definiendum każda zmienna występuje tylko raz; 3° każda zmienna wolna występująca po jednej stronie definicji występuje jako wolna po drugiej jej stronie (zob. Słupecki, Borkowski).

Mówi się, że definicja jest niesprzeczna, gdy jej dołączenie do niesprzecznego zbioru zdań Z nie przekształca Z w zbiór zdań sprzeczny. Definicje normalne, które w swym definiendum zawierają (oprócz, ewentualnie, zmiennych) jedynie wyraz definiowany, są niesprzeczne zawsze, gdy spełniają wymienione warunki. Takie są np. definicje: $1 =$ następnik zera; $x \geqslant y \equiv (x > y \vee y = x)$. Definicje symboli funkcyjnych, które po stronie definiendum oprócz samego terminu definiowanego zawierają znak równości, jak np. definicja odejmowania: $(x - y = z) \equiv (z + y = x)$, powinny, dla zagwarantowania niesprzeczności czynić nadto zadość tzw. warunkowi istnienia i jedyności, tj. wymaganiu, aby istniał przedmiot spełniający definiens i był jedynym przedmiotem spełniającym ów definiens (zgodnie z pojęciem funkcji). Warunku jedyności nie spełnia np. definicja: $\sqrt{x} = y \equiv y^2 = x$, ponieważ dla każdego x istnieje więcej niż jeden y taki, że $y^2 = x$, np. dla $x = 9$, $y = 3$ oraz $y = -3$. Wtedy $\sqrt{9} = 3$, lecz również $\sqrt{9} = -3$, a więc $3 = -3$, co sprzeczne jest z twierdzeniem $3 \neq -3$.

Definicje normalne dzielą się ze względu na budowę na wyraźne i niewyraźne (inaczej: *definicje kontekstowe) w zależności od tego, czy po stronie definiensa znajduje się sam definiowany wyraz, czy też definiowany wyraz wraz z typowym dla siebie kontekstem.

Pojęcie definicji normalnej wiąże się ściśle z pojęciem definiowalności pochodzącym od Padoa (1901), który był inspirowany przez Leibnizowską ideę uniwersalnego języka formalnego *characteristica universalis. Gdy jakiś termin nie jest definiowalny za pomocą innych, powiadamy, że jest on niezależny od pozostałych. Tak pojętą niezależność można wykazać przez zastosowanie następującej procedury, zwanej metodą Padoa.

Niech będzie dany układ aksjomatów U z terminami pierwotnymi T_0, T_1, ..., T_n. Termin T_0 nazywamy niezależnym od terminów T_1, ..., T_n, gdy istnieją dwie interpretacje aksjomatyki U, nazwijmy je M i M′, które spełniają następujące warunki: dziedzina obu interpretacji jest identyczna; T_1, ..., T_n są tak samo interpretowane w M i M′; T_0 ma w M inną interpretację niż w M′.

Oto bardzo prosty przykład zastosowania metody Padoa. System U składa się z trzech aksjomatów zawierających jako terminy pierwotne predykaty P i S.

A1 $(Px . Py) \rightarrow (Sxyz \rightarrow Pz)$

A2 $(Px . \sim Py) \rightarrow (Sxyz \rightarrow \sim Pz)$

A3 $Sxyz \equiv Syxz$.

Niechaj dziedziną interpretacji będzie zbiór liczb całkowitych, niech symbol P (odpowiednik ciągu T_1, ..., T_n, który jest tutaj jednoelementowy) będzie interpretowany jako predykat „jest liczbą parzystą", zaś S (odpowiednik T_0) niech ma dwie następujące interpretacje:

M: $Sxyz$ to tyle, co: z jest sumą $x + y$;

M′: $Sxyz$ to tyle, co: z jest sumą $x + y + 2$.

Obie interpretacje spełniają aksjomaty, przy czym predykat S okazuje się niezależny od P, czyli niedefiniowalny za pomocą P, bo gdy np. $x = 1$ i $y = 2$, to do denotacji predykatu S przy interpretacji M należy trójka uporządkowana liczb (1, 2, 3), zaś przy interpretacji M′ trójka (1, 2, 5).

Pojęcie definiowalności zawarte implicite w metodzie Padoa zostało sformułowane w określeniach definiowalności podanych przez Tarskiego (1926, 1934 i in.) dla systemów wyrażonych w języku *teorii typów oraz przez Betha (1953, 1959) dla teorii pierwszego rzędu.

W ujęciu Tarskiego (1926) występują dwa określenia definiowalności, z których pierwsze nawiązuje do kryterium Padoa, a o drugim można wykazać, że wynika zeń pierwsze.

Niech U będzie układem aksjomatów, które zawierają (przykładowo) tylko dwa terminy pierwotne, P i S, będące predykatami. Niech U' powstaje z U przez zastąpienie wszędzie predykatu S predykatem S'. Powiemy wówczas, że S jest definiowalny w U przez P wtedy i tylko, gdy zachodzi warunek:

$$(1) \qquad U + U' \vdash S(x_1, ..., x_n) \equiv S'(x_1, ..., x_n),$$

gdzie $U + U'$ jest układem aksjomatów powstającym z połączenia układów składowych; może on być traktowany jako koniunkcja wszystkich aksjomatów z obu grup.

Warunek (1) w zastosowaniu do rozważanego wyżej przykładu przybrałby formę:

$$U + U' \vdash Sxyz \equiv S'xyz,$$

gdzie S odpowiada interpretacji M zaś S' interpretacji M′. Przy podstawieniach poprzednio podanych otrzymałoby się wniosek, że z połączonej aksjomatyki $U + U'$ (która ma

model, a więc jest niesprzeczna) wynika sprzeczność $3 = 5$. A zatem predykat S jest niezależny od P, czyli nie jest definiowalny za pomocą P.

Warunek (1) charakteryzuje tę własność metamatematyczną, którą nazwano definiowalnością pośrednią (ang. implicit definability) ze względu na konieczność odniesienia się do innego systemu U'. Gdy określa się definiowalność bez takiego odnoszenia, mamy do czynienia z definiowalnością bezpośrednią (explicit definability). Terminy te pochodzą od Betha 1959, ale same pojęcia pojawiają się u Tarskiego i Lindenbauma 1926, gdzie podaje się, jako prostsze, także i takie określenie definiowalności: predykat S jest definiowalny w U, gdy spełniony jest warunek:

(2) $\quad S(x_1, ..., x_n) \equiv (Z)\,(U(Z) \rightarrow Z(x_1, ..., x_n))$;

$U(Z)$ jest koniunkcją aksjomatów systemu U, w której predykat S zastąpiono wszędzie zmienną Z (związaną przez kwantyfikator ogólny). Autorzy odnotowują, że warunkiem (2) można zastąpić warunek (1). Istotnie, widać to z następujących przekształceń warunku (2).

$$S(x_1, ..., x_n) \rightarrow (Z)\,(U(Z) \rightarrow Z(x_1, ..., x_n))$$

$$S(x_1, ..., x_n) \rightarrow (U(S') \rightarrow S'(x_1, ..., x_n))$$

$$U(S') \rightarrow (S(x_1, ..., x_n) \rightarrow S'(x_1, ..., x_n)).$$

Stosując pojęcie definiowalności także do S', otrzymujemy:

(2') $\quad S'(x_1, ..., x_n) \equiv (Z)\,(U(Z) \rightarrow Z(x_1, ..., x_n))$,

a stąd analogicznie:

$$U(S') \rightarrow (S'(x_1, ..., x_n) \rightarrow S(x_1, ..., x_n)),$$

co łącznie z poprzednio uzyskaną formułą prowadzi do

$$U(S).\,U(S') \rightarrow (S(x_1, ..., x_n) \equiv S'(x_1, ..., x_n)).$$

Niech U oznacza układ zawierający S, zaś U' układ zawierający S'.

Wtedy mamy:

$$U + U' \vdash S(x_1, ..., x_n) \equiv S'(x_1, ..., x_n)),$$

czyli warunek (1).

W ujęciu Betha definiowalność bezpośrednia scharakteryzowana jest przez warunek:

(B) $\quad U \vdash (x_1, ..., x_n)\,(Q(x_1, ..., x_n) \equiv F(x_1, ..., x_n))$,

gdzie Q jest predykatem występującym w aksjomatyce U, a przy tym są spełnione następujące warunki: 1° formuła F nie zawiera predykatu Q, zawiera natomiast inne spośród predykatów $P_1, ..., P_m$ występujących w U, tj. terminów pierwotnych danego systemu; 2° każda ze zmiennych wolnych występuje w kontekście Q tylko raz (warunek ten byłby naruszony np. wtedy, gdybyśmy definiując symbol inkluzji umieścili go w kontekście $X \subset X$, a nie $X \subset Y$); 3° wszystkie zmienne wolne w kontekście Q występują jako wolne także w formule F. Są to więc te same warunki, od których zależy poprawność definicji normalnej (por. wyżej).

Jeśli w aksjomatyce U zastąpimy wszędzie predykat Q predykatem Q', wszystko inne zostawiając bez zmiany, powstający w ten sposób wariant układu U nazwiemy układem U'. Przy tych oznaczeniach definiowalność pośrednią charakteryzuje następujący warunek (analogiczny do warunku (1) rozważanego wyżej):

(P) $\quad U, U' \vdash (x_1, ..., x_n)\,(Q(x_1, ..., x_n) \equiv Q'(x_1, ..., x_n))$

Twierdzenie Betha o definiowalności stwierdza, co następuje: predykat Q jest definiowalny bezpośrednio w terminach $P_1, ..., P_m$, ze względu na układ aksjomatów U, wtedy i tylko, gdy jest on definiowalny pośrednio w terminach $P_1, ..., P_m$ ze względu na U.

To, że definiowalność bezpośrednia pociąga pośrednią jest łatwo widoczne (por. wyżej wyprowadzenie (1) z (2)); pozostaje dowieść implikacji odwrotnej: że (P) pociąga (B). Dowód pochodzący od Betha 1959 (inny niż w pracy tegoż z 1953) korzysta z *lematu Craiga o interpolacji. Twierdzenie Craiga w odniesieniu do rachunku kwantyfikatorów stwierdza, co następuje. Jeśli $A \rightarrow B$ jest tezą rachunku kwantyfikatorów oraz A i B mają przynajmniej jeden wspólny predykat, to istnieje dla $A \rightarrow B$ formuła interpolacyjna F, to znaczy taka, że wszystkie zawarte w niej parametry i predykaty występują w A i w B, oraz są tezami implikacje $A \rightarrow F$ i $F \rightarrow B$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla sekwencji, przy czym F jest formułą interpolacyjną dla $A \vdash B$, gdyż każdy predykat i każdy parametr z F zachodzi w przynajmniej jednym składniku A i w przynajmniej jednym składniku B, oraz obie sekwencje $A \vdash F$ i $F \vdash B$ są poprawne (ang. valid).

Poniższy dowód twierdzenia Craiga stanowi pewną redakcję wersji dowodu Betha 1959 zawartej w monografii Smullyana 1968. Odtąd, dla uproszczenia, zamiast formuł w postaci najogólniejszej, tj. z predykatami od dowolnie wielu argumentów, posługiwać się będziemy formułami z predykatem jednoargumentowym, zaś każdy z układów U, U' traktować będziemy jako jedno zdanie, mianowicie koniunkcję składających się na dany układ aksjomatów. Tak więc warunek (P), stanowiący założenie dowodu, przybiera postać:

1. $\quad U, U' \vdash (x)\,(Qx \equiv Q'x)$.

Z owego założenia wyprowadzamy dalej, co następuje.

2. $\quad U, U' \vdash (x)\,(Qx \rightarrow Q'x)$.

2.1. $\quad U, U' \vdash (Qa \rightarrow Q'a)$ dla dowolnego parametru a.

2.2. $\quad U, Qa \vdash (U' \rightarrow Q'a)$ 2.1, przestawienie poprzedników.

2.3. $U, Qa \vdash Fa$ } 2.2, twierdzenie interpolacyjne
2.4. $Fa \vdash (U' \rightarrow Q'a)$ } (F zawiera tylko predykaty spośród $P_1, \ldots, P_m$).
2.5. $U \vdash (Qa \rightarrow Fa)$ 2.3, twierdzenie o dedukcji.
3. $U, U' \vdash (x)(Q'x \rightarrow Qx)$1.
3.1. $U, U' \vdash (Q'a \rightarrow Qa)$ 3.
3.2. $U', Q'a \vdash (U \rightarrow Qa)$ 3.1, przestawienie poprzedników.
3.3 $U', Q'a \vdash Fa$ } 3.2, twierdzenie interpolacyjne.
3.4. $Fa \vdash (U \rightarrow Qa)$
3.5. $U \vdash (Fa \rightarrow Qa)$ 3.4, przestawienie poprzedników.
4. $U \vdash (Qa \equiv Fa)$ 2.5, 3.5.
5. $U \vdash (x)(Fx \equiv Qx)$ 4, generalizacja.

Idea tego prostego dowodu jest więc taka, że formuła interpolacyjna F pokrywa się z definiensem dla Q. Formuła ta raz jest następstwem aksjomatyki U branej łącznie z definiendum Q (2.3), raz zaś jest przesłanką dla implikacji $U \rightarrow Qa$ (3.4); dzięki manipulowaniu poprzednikami i twierdzeniu o dedukcji pozwala to wyprowadzić poszukiwaną równoważność.

Wynik Betha ma duże znaczenie dla teorii i praktyki definiowania, dostarcza bowiem metody rozstrzygania dwóch rodzajów pytań: 1° czy termin, który mamy na uwadze, jest definiowalny za pomocą innych terminów z danego układu twierdzeń? 2° jeśli tak, to jak znaleźć zdanie będące jego definicją na gruncie owego układu twierdzeń? Oto przykład procedury prowadzącej do tego rodzaju rozstrzygnięć.

Niech na układ aksjomatów U składają się następujące zdania:

A1 $(x)(y)(Qx \rightarrow (Pxx \vee \sim Pxy))$
A2 $(x)(Qx \vee (Ey)Pxy)$
A3 $(x)(Pxx \rightarrow Qx)$.

Układ U' będzie się różnił od powyższego jedynie tym, że w miejscu występowania Q występować będzie wszędzie Q'.

Rozważymy pytanie, czy predykat Q jest definiowalny za pomocą P, nie znając treści owej ewentualnej definicji; uniemożliwia to skorzystanie z warunku (B) charakteryzującego definiowalność bezpośrednią. Można jednak w tej sytuacji skorzystać z warunku (P), tj. charakterystyki definiowalności pośredniej, a dzięki twierdzeniu Betha o pokrywaniu się tych dwóch rodzajów definiowalności otrzymamy odpowiedź na poprzednie pytanie. Wiadomo bowiem, jaką formułę należy wprowadzić z połączonych układów aksjomatów U i U', żeby stwierdzić definiowalność rozważanego predykatu; będzie to formuła: $(x)(Qx \equiv Q'x)$. Gdy do wyprowadzenia zastosujemy metodę tabel analitycznych lub inną podobną, to także nieudane wyprowadzenie będzie miało wartość definitywnego wyniku; jeśli bowiem na którejś gałęzi nie uda się uzyskać sprzeczności, będzie to świadczyło, że formuła $(x)(Qx \equiv Q'x)$ nie wynika z aksjomatyki U i U', czyli że termin Q nie jest definiowalny za pomocą innych terminów z U (*Dedukcja naturalna, odc. 3).

Jeśli okaże się, że nasz predykat jest definiowalny, to żeby znaleźć jego definicję, trzeba będzie skorzystać z lematu Craiga (wiersz 2.4 z podanego wyżej dowodu twierdzenia Betha). Pozwoli to znaleźć formułę interpolacyjną, która wskaże poszukiwany definiens. W szukaniu tej formuły znowu okazuje się użyteczna metoda tabel semantycznych lub analitycznych. W myśl wiersza 2.4 formuła $Q'a$ wynika z aksjomatów U' i nieznanej nam jeszcze formuły interpolacyjnej F. Na trop tej ostatniej naprowadza próba wyprowadzenia $Q'a$ z samego układu U'. Niepowodzenie tej próby ujawni, jakie przesłanki są jeszcze niezbędne, żeby na każdej gałęzi tabeli uzyskać sprzeczność. W naszym przykładzie, gdy skonstruujemy odpowiednią tabelę, okaże się być otwarta jedna gałąź, dla której domknięcia, czyli dla uzyskania sprzeczności, niezbędne są formuły Paa, $\sim Pab$. Aby je wprowadzić, wystarczy dołączyć alternatywę $Paa \vee \sim Pab$. A więc formułą interpolacyjną jest powyższa alternatywa, zaś szukany definiens musi mieć taką postać, żeby po opuszczeniu kwantyfikatorów przekształcił się w ową alternatywę; ze względu na restrykcje towarzyszące opuszczaniu kwantyfikatora egzystencjalnego, nie dopuszczające w nowych wierszach dowodu użytych już wcześniej parametrów, oba składniki alternatywy powinny być związane kwantyfikatorami ogólnymi (w przeciwnym wypadku nowe parametry zapobiegłyby powstaniu sprzeczności, czyli zamknięciu gałęzi). A zatem szukany definiens przybierze postać: $Pxx \vee (y) \sim Pxy$, gdzie zmienna x jest związana także kwantyfikatorem ogólnym. Tak więc, poszukiwaną definicją predykatu Q jest formuła:

$$(x)(Qx \equiv (Pxx \vee (y) \sim Pxy)).$$

Istotnie, jak łatwo sprawdzić, formuła ta wynika z U za sprawą następujących przekształceń.

1 $(x)(Qx \rightarrow (Pxx \vee (y) \sim Pxy))$ A1;
2 $(x)((y) \sim Pxy \rightarrow Qx)$ A2;
3 $(x)((Pxx \vee (y) \sim Pxy) \rightarrow Qx)$. A3,2. 1903;

Koniunkcja formuł 1 i 3 stanowi naszą równoważność definicyjną.

Aby nadać jakiś intuicyjny sens tej definicji i aksjomatom U, możemy, zapisawszy definiens w formie $(Ey)Pxy \rightarrow Pxx$, odczytać predykat P słowami „oddziałuje tak a tak", zaś mianem Q nazwać każdy taki przedmiot, który oddziałuje na siebie w pewien sposób, o ile istnieje przedmiot, który na niego w ten sposób oddziałuje (np. ktoś się sam ceni, o ile istnieje ktoś, kto go ceni).

K. Ajdukiewicz: *O definicji*. [W:] *JiP*; E. Beth: *On Padoa's method in the theory of definition*. „Indag. Math." XV 1953; — *Foundations*; L. Borkowski: *Logika formalna*. 1970; Grzegorczyk: *Log. mat.*; J. Kotarbińska: *Definicja*

„St. Log." II 1955; J. C. C. Mc Kinsey: *On the independence of undefined ideas.* „Bull. of the Amer. Math. Soc.", XLI 1935; A. Padoa: *Essai d'une théorie algébraique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.* „Bibliothéque du Cong. Int. de Philos." 3. 1901; R. M. Smullvan: *First-order logic.* 1968: P. Suppes: *Introduction to logic.* 1957; A. Tarski, A. Lindenbaum: *Sur l'indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques.* „Ann. de la Soc. Polonaise de Math.". V 1926; A. Tarski: *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów.* „Przeg. Filoz." 37, 1934. Wersja niem. w „Erkenntnis" V 1935. Przekł. ang. [W:] *ISM (Some methodological investigations on the definability of concepts).*

W. M.

definicja operacyjna. Definicja należy do operacyjnych, gdy sens definiowanego terminu, czyli definiowane pojęcie określa się przez podanie czynności (operacji) prowadzących do utworzenia owego pojęcia. Czas definiuje się za pomocą pomiarów wykonywanych z użyciem zegarów lub sygnałów świetlnych (jako typowy przykład definicji operacyjnej podaje się Einsteina definicję równoczesności zdarzeń), prawdziwość zdania definiuje się przez opis czynności weryfikacyjnych itp.

Konsekwencje takiego określenia sensowności są następujące: 1° definiowany termin ma sens tylko w tej dziedzinie, w której odpowiednie operacje są wykonalne (np. wyraz „długość" zdefiniowany przez opis mierzenia sztabą jest bez sensu w odniesieniu do odległości astronomicznych); 2° skoro na znaczenie terminu składa się opis operacji pomiarowych, to terminy zdefiniowane za pomocą różnych operacji różnią się między sobą znaczeniem. (np. pojęcie długości mierzonej sztabą i mierzonej teodolitem; pojęcie inteligencji mierzonej różnymi testami).

Konsekwencje te okazują się spełnione, gdy definicję operacyjną ujmie się w schemat zdania redukcyjnego:

$\wedge x[Px \rightarrow (Qx \equiv Rx)]$, gdzie Q reprezentuje termin definiowany, na miejscu Px figuruje opis dokonanej operacji, zaś na miejscu Rx opis zachowania się przedmiotu poddanego tej operacji (*Definicja redukcyjna). Np.: Jeśli przyłożyć do x sztabę metrową, to x ma metr długości wtedy i tylko, gdy końce przedmiotu x pokrywają się z końcami sztaby. Jest to definicja operacyjna długości. Pojęcie definicji operacyjnej zostało rozciągnięte również na te definicje, w których zamiast czynności pomiarowej opisuje się innego rodzaju operacje wykonywane przez obserwatora. Np.: Jeśli umieścić x w bliskości opiłków żelaznych, to x jest magnesem wtedy i tylko, gdy x przyciąga opiłki.

E. Poznański: *Operacjonalizm po trzydziestu latach.* [W:] *Fragmenty filozoficzne.* 1959; M. Przełęcki: *O tzw. definicjach operacyjnych.* „St. Log." III 1955.

W. M.

definicja ostensywna (z łac. ostendo – pokazuję; d. dejktyczna). Definicja, na którą składa się, oprócz formuły słownej, pokazanie w jakiś sposób, np. gestem wskazującym, przedmiotu będącego desygnatem terminu definiowanego.

Za pomocą takich definicji uczymy się języka metodą poglądową, kiedy zamiast przekładania terminów na znany już język, pokazuje się przedmioty, do których się odnoszą wprowadzane terminy; pokazuje się np. kota ze słowami „To jest kot".

Gdy wprowadza się nazwę ogólną, przedmiot pokazywany traktuje się jako wzorcowy egzemplarz reprezentujący zakres danej nazwy. Ponieważ jeden i ten sam przedmiot reprezentuje wiele klas przedmiotów (np. pokazywany tu i teraz kot należy do klasy kotów, ssaków, zwierząt domowych itd.), istnieje problem, jak naprowadzić osobę informowaną na tę właśnie klasę, którą ma na myśli informujący. Osiąga się to m. in. przez pokazywanie dużej liczby wzorców pozytywnych (z towarzyszącą temu formułą „To jest X") oraz negatywnych (z formułą „To nie jest X"). Wzorce pozytywne określają pewne warunki wystarczające: Wystarczy być takim, jak to oto, żeby być X. Wzorce negatywne określają pewne warunki konieczne: Jeśli coś jest takie, jak to oto, to nie jest X; wobec tego, jeśli coś ma być X, to musi być różne od tego oto. Ponieważ z reguły nie sposób jest wyczerpać, drogą ukazywania wzorców, wszystkich warunków wystarczających i wszystkich koniecznych, definicje ostensywne podpadają pod schemat *definicji cząstkowych. Można je też interpretować jako układy postulatów znaczeniowych. Terminy ostensywne, jako zdefiniowane cząstkowo, są zawsze nieostre, czyli otwarte.

Definiowanie ostensywne wymaga, oprócz zabiegu pokazywania, pewnych dodatkowych wyjaśnień lub domyślnie przyjmowanych założeń. Takim wyjaśnieniem bywa wymienienie względu, pod jakim rozpatruje się dany przedmiot: mówimy np. „To jest – pod względem barwy – seledynowe", zacieśniając w ten sposób mnogość wchodzących w grę klas do klas przedmiotów oznaczanych przez nazwy konotujące jakąś barwę. Definiowaniu ostensywnemu towarzyszy też zwykle domyślne założenie prostoty orzeczników definiowanych: przyjmuje się, że nie chodzi o nazwę o złożonej budowie, stanowiącą np. koniunkcję, alternatywę czy dopełnienie innych nazw. Założenie takie wydatnie ogranicza pole domysłów, jakie powinna brać pod uwagę osoba informowana; tym samym zwiększa się szansa trafnego domysłu. Innym założeniem ograniczającym jest domniemanie doniosłości wprowadzonych terminów: przyjmuje się, że konotacjami wprowadzonych nazw są tylko cechy ważne poznawczo lub praktycznie (a nie cechy tak nieistotne i przemijające, jak np. sposób oświetlenia pokazywanego przedmiotu).

Terminy zdefiniowane ostensywnie stanowią zbiór tzw. terminów elementarnych, czyli spostrzeżeniowych (inaczej: obserwacyjnych). Odgrywają one rolę terminów pierwotnych w teoriach empirycznych: za ich pomocą definiuje się (cząstkowo) tzw. terminy teoretyczne.

J. Kotarbińska: *Tak zwana definicja dejktyczna.* [W:] *Fragmenty filozoficzne.* 1959; W. Marciszewski: *Redukcjonizm w świetle analizy zdań spostrzeżeniowych.* „St. Filoz." 1963 nr 3/4; M. Przełęcki: *O definiowaniu terminów spostrzeżeniowych.* [W:] *Rozpr. log.*; R. Robinson: *Definition.* 1950.

W. M.

definicja przez abstrakcję. Definicja stosowana do określenia wspólnej własności przysługującej przedmiotom pod jakimś względem jednakowym, np. kształtu jako wspólnej własności przedmiotów równokształtnych, ciężaru jako wspólnej własności ciał tyle samo ważących. W dokładniejszym sformułowaniu definicja przez abstrakcję np. ciężaru może przybrać następującą formę: Ciężar ciała x jest identyczny z ciężarem ciała y zawsze i tylko wtedy, gdy ciało x równoważy się na wadze (rzetelnej) z ciałem y.

Ogólnie schematem definicji przez abstrakcję jakiegoś terminu P będzie formuła: $P(x) = P(y) \equiv xRy$, gdzie R jest *relacją równoważnościową, czyli symetryczną, zwrotną i przechodnią, zaś Px czytamy: własność P przedmiotu x (por. przykład wyżej). Pod schemat ten podpada znana definicja *liczby kardynalnej za pomocą relacji równoliczności zbiorów, definicja znaczenia za pomocą relacji *równoznaczności (pojętej np. jako wzajemna wyprowadzalność) i in.

Od tego rodzaju definicji przez abstrakcję, będących *definicjami kontekstowymi, łatwo jest przejść do definicji wyraźnej interesującego nas terminu, jeśli posłużymy się słowem „własność", „cecha" lub podobnym. Np.: Znaczenie jest to taka własność wyrażeń, pod względem której dwa wyrażenia zgadzają się zawsze i tylko wtedy, gdy są z siebie wzajemnie (w danym języku) wyprowadzalne.

Relacja równościowa zachodząca między elementami pewnego zbioru dzieli ten zbiór na tzw. *klasy abstrakcji. Np. w zbiorze ciał klasami abstrakcji są: klasa ciał o ciężarze jednego kilograma, klasa ciał o ciężarze dwóch kg itd. W zbiorze wyrażeń pewnego języka wszystkie wyrażenia równoznaczne z jakimś wyrażeniem W_1; wyrażenia równoznaczne z W_2 tworzą klasę abstrakcji wyznaczoną przez W_2 itd.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Beth: *Foundations;* W. Dubislav: *Die Definition.* 1931; Suszko: *Wykłady* (par. 11).

W. M.

definicja redukcyjna.

(1) Definicja cząstkowa służąca do definiowania *terminów teoretycznych. Stanowią ją bądź dwa tzw. jednostronne zdania redukcyjne, bądź jedno obustronne zdanie redukcyjne. Para zdań jednostronnych ma postać: $\wedge x[Px \rightarrow (Rx \rightarrow Qx)]$, $\wedge x[Sx \rightarrow (Tx \rightarrow \sim Qx)]$, gdzie Q jest terminem podlegającym definiowaniu, pozostałe zaś są już uprzednio zdefiniowane bądź też są *terminami spostrzeżeniowymi, a więc nie wymagającymi definicji. Obustronne zdanie redukcyjne ma postać: $\wedge x[Px \rightarrow \rightarrow (Rx \equiv Qx)]$. Schemat ten służy m. in. do definiowania tzw. terminów dyspozycyjnych, tj. terminów konotujących pewne własności nieobserwowalne. P służy wówczas do opisu sytuacji doświadczalnej, R opisuje zachowanie się przedmiotu postawionego w tej sytuacji, zaś Q jest nazwą domniemanej dyspozycji warunkującej takie właśnie zachowanie w opisanej sytuacji. Np.: Jeśli x znajdzie się w wodzie, to x jest rozpuszczalne w wodzie wtedy i tylko, gdy x się rozpuszcza. Zdanie to określa (cząstkowo) zakres stosowalności terminu „rozpuszczalny w wodzie".

Jednostronne zdania redukcyjne należą do *zdań syntetycznych w tym sensie, że wynika z nich zdanie nie zawierające terminu definiowanego i będące zdaniem empirycznym odpowiedniej teorii, mianowicie zdania o schemacie: $\wedge x \sim (Px \wedge Rx \wedge Sx \wedge Tx)$. Obustronne zdanie redukcyjne nie prowadzi do takich syntetycznych konsekwencji. Definicja redukcyjna nie daje możliwości wyeliminowania definiowanego terminu z dowolnego kontekstu, nie spełnia więc warunku przekładalności. W sprawie syntetyczności zdań redukcyjnych zob. też. **zdanie analityczne.**

(2) Termin „definicja redukcyjna" bywa czasem używany zamiennie z terminem *„definicja cząstkowa"; klasa tak szeroko rozumianych definicji redukcyjnych zawiera jako podzbiór klasę definicji redukcyjnych w sensie (1).

R. Carnap: *Testability and meaning.* 1936/37; J. Kamińska: *Ewolucja Koła Wiedeńskiego.* „Myśl Współcz." II 1947; Pawłowski: *Def. w humanist.*; M. Przełęcki: *Pojęcia teoretyczne a doświadczenie.* „St. Log." XI 1961 i [W:] *LTN.*

W. M.

definicja regulująca. *Definicja nominalna – (1) nadająca dźwiękom lub napisom już używanym w danym języku nowe znaczenie, z zachowaniem jednak warunku, że to nowe znaczenie jest na tyle bliskie dotychczasowemu, na ile to jest możliwe ze względu na zamierzony stopień precyzji. Definicja regulująca, będąc w zasadzie arbitralna, przypomina tym *definicję syntetyczną. Z drugiej strony, liczenie się ze znaczeniem zastanym zmniejsza stopień arbitralności i stwarza podobieństwo do *definicji analitycznej. Definicji regulujących używa się dla uczynienia ostrzejszymi terminów nazbyt w danym języku nieostrych. Tak np. ustawodawca zaostrza arbitralnie zakres terminu „pełnoletni", postanawiając, że pełnoletnim nazywać się będzie każdego i tylko tego, kto ukończył 21 lat. Szczególnym przypadkiem definicji regulującej, zachodzącym przy konstruowaniu ścisłych języków sztucznych, jest tzw. *eksplikacja.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy.*

W. M.

definicja semantyczna. *Definicja nominalna – (2), w której definiendum występuje w cudzysłowie (*Supozycja materialna), zaś definiens w supozycji zwykłej. Np.: „Jan jest w gorącej wodzie kąpany", znaczy, że Jan podejmuje

zbyt pośpiesznie decyzje. Definicja semantyczna ma tu definiens w formie zdania. Inną postać wyrażeń spełniających charakterystykę definicji semantycznej stanowią zwroty z orzecznikami semantycznymi takimi, jak „oznacza", „denotuje" itp. Np: „Kalomel" oznacza chlorek rtęci.

Kotarbiński: *Elementy*; Pawłowski: *Def. w humanist.*; R. Robinson: *Definition*. 1950.

W. M.

definicja słownikowa. *Definicja nominalna – (2), w której definiendum i definiens występują w supozycji materialnej, czyli są nazwami cudzysłowowymi. Np.: „Kalomel" znaczy tyle, co „chlorek rtęci". Obecność supozycji materialnej także w definiensie odróżnia definicję słownikową od *definicji semantycznej.

Kotarbiński: *Elementy*; Pawłowski: *Def. w humanist.*; R. Robinson: *Definition*. 1950.

W. M.

definicja twórcza. Definicja jest twórcza na gruncie pewnego języka, gdy za pomocą tej definicji daje się wywieść z tez danego języka, wedle reguł w nim obowiązujących, takie zdanie, którego nie można by wywieść bez pomocy danej definicji. Jeśli *definicję nominalną (1) pojmuje się jako zabieg wprowadzania skrótów, a więc zabieg przydatny praktycznie, lecz teoretycznie zbędny, to twórczość definicji jest własnością niepożądaną, przed którą powinny zabezpieczać odpowiednie reguły definiowania. Szczególnie niebezpieczną odmianą definicji twórczych są definicje rodzące sprzeczności. Aby jej zapobiec, nakłada się na definicje warunek istnienia i jedyności (*Definicja normalna).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; W. Dubislav: *Die Definition*. 1931; Kneale: *Development of logic*; H. Stonert: *Język i nauka*. 1964.

W. M.

definicja warunkowa.
(1) Tyle co: *definicja cząstkowa.
(2) Szczególny przypadek definicji cząstkowej: okres warunkowy, którego następnik jest *definicją normalną jakiejś równości. Np.: $y \neq 0 \rightarrow \left(\frac{x}{y} = z \equiv y \cdot z = x\right)$. Definicja taka jest poprawna, gdy następnik spełnia warunki wymagane od definicji normalnej, ponadto zaś warunek istnienia i jedyności przedmiotów spełniających poprzednik.

Słupecki, Borkowski: *Elementy*.

W. M.

definicja wyraźna. *Definicja normalna, która po stronie definiendum ma jedynie wyraz będący przedmiotem definiowania. Przykład: Mikron jest to tysięczna część milimetra; słowem definiowanym (definiendum) jest tu wyraz „mikron", który występuje samodzielnie, tj. bez jakiegokolwiek kontekstu. Definicja normalna, która nie jest wyraźna, jest *definicją kontekstową.

W. M.

definiendum (łac.; to, co ma być zdefiniowane). Człon definicji będący wyrażeniem definiowanym lub, w przypadku *definicji kontekstowej, zawierający wyrażenie definiowane jako swoją część.

W. M.

definiens (łac.; to, co definiujące). Człon określający w definicji, nie zawierający wyrazu definiowanego i połączony z definiendum funktorem definicyjnym takim, jak znak równości, zwrot „znaczy tyle, co" itp.

W. M.

definiowalność.
Definiowalność syntaktyczna. Predykat P jest definiowalny w teorii pierwszego rzędu T w terminach predykatów $Q_1, ..., Q_n$, jeśli istnieje formuła Φ, w której występują jedynie predykaty $Q_1, ..., Q_n$ taka, że twierdzeniem teorii T jest zdanie

$$\wedge x_1 \ldots \wedge x_m [P(x_1, ..., x_m) \equiv \Phi(x_1, ..., x_m)].$$

Zasadniczym wynikiem dotyczącym definiowalności syntaktycznej jest następujące:
Twierdzenie Betha. Niech F i F' będą predykatami o n zmiennych wolnych. $A(F, F')$ oznacza formułę:

$$\wedge x_1 \ldots \wedge x_n F(x_1, ..., x_n) \equiv F'(x_1, ..., x_n).$$

Niech $X(F, Q_1, ..., Q_n)$ będzie zdaniem zbudowanym z predykatów $F, Q_1, ..., Q_n$. Niech, na koniec, $X(F', Q_1, ..., Q_n)$ będzie zdaniem powstałym przez zastąpienie każdego występowania symbolu F w X symbolem F'. Wtedy, jeśli w teorii T pierwszego rzędu można udowodnić zdanie

$$X(F, Q_1, ..., Q_n) \wedge X(F', Q_1, ..., Q_n) \rightarrow A(F, F'),$$

to predykat F jest definiowalny (syntaktycznie) w teorii T w terminach $Q_1, ..., Q_n$. Innymi słowy, jeśli predykat F jest implicite zdefiniowany w teorii T, to może być też zdefiniowany explicite.
Definiowalność semantyczna. Podzbiór B universum A modelu $\mathfrak{A}$ (relacja n-członowa R określona na A) jest definiowalny w $\mathfrak{A}$, jeśli istnieje formuła Φ o jednej zmiennej wolnej (odpowiednio o n zmiennych wolnych) taka, że B jest zbiorem tych elementów (odpowiednio R jest zbiorem tych n-tek uporządkowanych), które spełniają Φ w modelu $\mathfrak{A}$.
Zob. też **definicja normalna.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*; A. Tarski: *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów*. „Przegl. Filoz." XXXVII 1934; E. W. Beth: *On Padoa method in the theory of definitions*, „Indag. Math". 15 1953.

W. Mk

denotacja (denotat).
(1) Zakres *nazwy (1), czyli zbiór jej *desygnatów (również przeszłych lub przyszłych). Denotacją np. nazwy „dąb" jest zbiór przedmiotów złożony z dębów i tylko z dębów (istniejących aktualnie lub możliwych). Denotacją nazwy „liczba naturalna" jest zbiór liczb: 1, 2, 3, etc. Jest to węższe pojęcie denotacji, przy którym przysługuje ona tylko nazwom i to niekoniecznie wszystkim (pewne teorie odmawiają denotacji *imionom własnym). To pojęcie denotacji oddawane jest także słowem „zakres" (ang. denotation, extension; niem. Ausdehnung, Extension).
(2) Klasa wszystkich (i tylko) istniejących aktualnie *desygnatów nazwy. To pojęcie denotacji (ang. denotation) pochodzi od Lewisa. Jest ono mało rozpowszechnione, ale zasługuje na uwagę jako propozycja odróżniania zbioru aktualnie istniejących desygnatów nazwy od zbioru jej desygnatów możliwych, tj. bądź zrealizowanych, bądź mogących dostąpić realizacji. Ten ostatni, tj. zbiór desygnatów możliwych, określił Lewis ang. mianem comprehension. Nazwy puste, lecz niesprzeczne (np. syn Kopernika) mają denotację zerową, ale nie zerową 'comprehension', odpowiada im bowiem niepusta klasa przedmiotów możliwych. Nazwy sprzeczne natomiast, takie np. jak „syn bezdzietnych rodziców", mają nie tylko zerową denotację, ale i zerową 'comprehension', ponieważ nie odnoszą się do przedmiotów możliwych.
(3) Przedmiot dowolnego typu, tj. niekoniecznie klasa, jak w (1) lub (2), do którego odnosi się wyrażenie z odpowiedniej do danego typu *kategorii semantycznej.
a) Denotacją nazwy jednostkowej nie będącej predykatem jest indywidualny przedmiot określany daną nazwą; np. denotacją imienia własnego „Bertrand Russell" jest osoba B. Russella; b) Denotacją predykatu jest klasa przedmiotów, o których można ten predykat zgodnie z prawdą orzec. Denotacją np. predykatu jednoargumentowego „żyje", jest klasa istot żyjących, denotacją predykatu „filozof" (dokładniej: „jest filozofem") stanowi klasa filozofów. Denotacją predykatu dwuargumentowego, np. „rządzi" jest stosunek rządzenia, czyli – wg teoriomnogościowej koncepcji stosunku – klasa par $\langle x, y \rangle$ takich, że x rządzi y; c) Denotacją zdania jest jego wartość logiczna, czyli prawdziwość lub fałszywość.
Określenie (3) miewa też inne warianty, w zależności od różnych modyfikacji punktu c). Ujęcie c) pochodzi m. in. od Fregego, rozwijane jest przez Churcha, w piśmiennictwie polskim zob. Kokoszyńska. Określenie (3) można rozbudowywać dalej, charakteryzując denotację terminów logicznych: spójników zdaniowych (zob. Kokoszyńska) i operatorów, a więc wyrażeń takich, jak kwantyfikatory, znak abstrakcji, znak deskrypcji (zob. Suszko). Szerokiemu pojęciu denotacji (3) odpowiadają terminy ang denotation (Church i in.) i reference (Quine in.), niem. Bedeutung (Frege).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zagadnienie uzasadniania zdań analitycznych.* [W:] *LTN*; Church: *Math. log.*; Frege: *SuB*; Kneale: *Development of logic*; M. Kokoszyńska: *O dyrektywach inferencji.* [W:] *Rozpr. log.*; Kotarbiński: *Elementy*; C. I. Lewis: *The modes of meaning.* [W:] *Philosophy and phenomenological research.* IV. (1943/44); Quine: *LPV*; R. Suszko: *O kategoriach syntaktycznych i denotacjach wyrażeń w językach sformalizowanych.* [W:] *Rozpr. log.*

W. M.

deskrypcja. Odróżnia się za B. Russellem deskrypcje określone (ang. definite descriptions) i deskrypcje nieokreślone (ang. indefinite descriptions). Pierwsze, to wyrażenia różne od *imion własnych, mające nie więcej niż jeden desygnat; drugie, to wyrażenia mogące mieć więcej niż jeden desygnat. Rozróżnienie to wprowadził Russell dla celów analizy języka naturalnego (deskrypcje określone odpowiadają w języku angielskim zwrotom z przedimkiem określonym „the", zaś deskrypcje nieokreślone odpowiadają zwrotom z przedimkiem „a"); dla konstrukcji pojęć matematycznych korzysta się u Russella jedynie z pojęcia deskrypcji określonej. Przykłady deskrypcji określonych: Najwyższy szczyt Alp, obecna królowa Anglii, autor *Klubu Pickwicka*. Przykłady deskrypcji nieokreślonych: Jakiś szczyt Alp, jeden z synów Kazimierza Jagiellończyka, pewien człowiek. Symbol deskrypcji określonej, używany przez Peano, Russella i innych, ma postać: $(\imath x)(fx)$; znak „$\imath$" wiążący zmienną x jest nazywany operatorem deskrypcyjnym (inaczej jota-operatorem, ponieważ „$\imath$" jest odwróconą literą grecką „ ι", odczytywaną „jota"). Cały ów zwrot odczytuje się: Takie jedyne x, które ma własność F (np. tę własność, że jest najwyższym szczytem Alp). Symbol deskrypcji nieokreślonej, wprowadzony przez Hilberta i Bernaysa, a dyskutowany także przez Reichenbacha, ma postać $(\eta x)(Fx)$ – jest to tzw. eta-operator. Zwrot ten można odczytywać: Jakieś x, które ma własność F. W dalszym tekście ilekroć wystąpi słowo „deskrypcja" (bez przymiotnika), należy je traktować jako skrót dla terminu „deskrypcja określona".
Teoria deskrypcji uprawiana jest w kilku wariantach, różniących się odmiennym traktowaniem deskrypcji w przypadku, gdy nie jest spełniony warunek jedyności. Zostanie tu szerzej omówiona, tytułem przykładu, teoria Russella.
Russella teoria deskrypcji. Oryginalną cechą teorii Russella, odróżniającą ją od innych teorii semantycznych (np. Fregego, Carnapa), jest zaliczenie deskrypcji do tzw. symboli niesamodzielnych (ang. incomplete symbols), tj. takich, które pozbawione są znaczenia, gdy występują w izolacji, a nabierają znaczenia dopiero w kontekście innych wyrażeń. Jedynym możliwym sposobem ich zdefiniowania jest definicja przez użycie (ang. definition in use), czyli *definicja kontekstowa. Powszechnie przyjmuje się, że ten typ definicji przysługuje wyrażeniom w rodzaju spójników; Russell rozszerza go m. in. na deskrypcje, przyznając charakter symboli samodzielnych jedynie

*imionom własnym – (1). Taka teoria deskrypcji pozwala, wg Russella, odpowiedzieć na pytanie, dlaczego identyczność $a = (\iota x)(Fx)$, w której po jednej stronie stoi imię własne „*a*" (np. „Walter Scott"), po drugiej zaś deskrypcja (np. „autor Waverleya"), różni się od trywialnej identyczności $a = a$ (zob. *Principia*, Wstęp, rozdz. III). Na to samo pytanie Frege odpowiadał przez odróżnienie sensu i *detonacji: identyczność jest nietrywialna, gdy jej strony mają, przy tej samej detonacji, odmienny sens.

Również w terminach teorii deskrypcji podejmuje Russell próby rozwiązania paradoksów powstających na gruncie zdań o nieistnieniu czegoś (np. „Nie istnieje kwadratowe koło") lub zdań, w których coś się orzeka o przedmiotach nieistniejących (np. „Obecny król Francji jest łysy"). Jeśli zdanie jest prawdziwe, to mówi o czymś zgodnie z rzeczywistością, jeśli jest fałszywe, to również mówi o czymś, tyle że niezgodnie z rzeczywistością. Zawsze więc istnieje jakaś rzeczywistość, o której stwierdza coś zdanie, a zatem istnieje i kwadratowe koło, o którym twierdziło się (w przytoczonym wyżej zdaniu), iż nie istnieje. Rozumowanie takie skłaniało niektórych filozofów do przypisania tego rodzaju przedmiotom swoistego sposobu bytowania, różnego od istnienia ('Aussersein' A. Meinonga; pewna odmiana 'being' różna od 'existence' u tegoż Russella we wcześniejszym dziele *The principles of mathematics*, 1903; także znane odróżnienie 'subsistence' od 'existence'). Uniknąłoby się wówczas sprzeczności przez wskazanie na wieloznaczność słowa „istnienie" (np. jako 'being' i jako 'existence'). Rozwiązanie Russella w *On denoting* i w *Principia* idzie po innej drodze. Zapobiega sprzeczności analiza zdania, w której zwrot „Kwadratowe koło" zostaje pozbawiony roli podmiotu; odtąd nie ma podstaw, by uważać, że zdanie to mówi o kwadratowym kole. W wyniku owego przeformułowania przybiera ono formę (z symbolem „**K**" w roli skrótu od „kwadratowe koło"): [1] $\sim \vee z(\mathbf{K}x \equiv x = z)$. Co się tyczy zdań w rodzaju „Obecny król Francji jest łysy", schematycznie: $F[(\iota x)(Gx)]$, to można je uznać za fałszywe (bez tej niepożądanej konsekwencji, że przypisze się istnienie królowi Francji), jeśli przełoży się je na zdanie o schemacie: [2] $\vee z[Fz \wedge \wedge x(x = z \equiv Gx)]$.

Przekład taki stanowi zarazem dla danej deskrypcji jej definicję kontekstową, ponieważ nie definiuje się samej deskrypcji $(\iota x)(Gx)$, ale obejmujący ją kontekst, w którym została użyta, mianowicie: $F[(\iota x)(Gx)]$. Na gruncie takiej definicji potrafi się też zdać sprawę z dwuznaczności zdania w rodzaju „Obecny król Francji nie jest łysy", schematycznie: $\sim F[(\iota x)(Gx)]$. Może ono znaczyć bądź tyle, co [3] $\sim \vee z[Fz \wedge \wedge x(x = z \equiv Gx)]$, bądź tyle, co: [4] $\vee z[\sim Fz \wedge \wedge x(x = z \equiv Gx)]$. W przypadku, gdy obecny król Francji nie istnieje, [3] jest prawdziwe, zaś [4] fałszywe. Kiedy $F[(\iota x)(Gx)]$ stanowi część jakiegoś innego zdania, jak w rozważanym wyżej $\sim F[(\iota x)(Gx)]$, to mówi się, że $(\iota x)(Gx)$ występuje w sposób wtórny (ang. has a secondary occurrence).

Russella teoria deskrypcji miała nie tylko zapobiegać filozoficznym trudnościom z pojęciem istnienia. Była ona przede wszystkim jednym z etapów budowania języka matematyki opartym na pojęciach logicznych; twierdzenia formalnej teorii deskrypcji (*Principia* *14) ingeruia przy dowodzeniu różnych twierdzeń dotyczących funkcji deskryptywnych, klasy jednostkowej, liczby kardynalnej jeden etc. Ponadto, w sposób już raczej uboczny, traktował Russell teorię deskrypcji jako narzędzie opisu języka naturalnego, pozwalające m. in. zdać sprawę z intencji towarzyszących używaniu zwrotów „the so and so" (jedyna rzecz taka a taka). Zdania zawierające tego rodzaju zwroty miałyby być skrótami zdań postaci [2], [3], [4] itp. Taka rekonstrukcja wyrażeń potocznych została poddana krytyce przez P. F. Strawsona, reprezentującego (wraz z innymi autorami z kręgu tzw. Filozofii Oksfordzkiej) pogląd, że specyficzne cechy języka naturalnego czynią go niepodatnym na analizowanie za pomocą logiki formalnej. Wedle Strawsona nie ma w ogóle problemu prawdziwości zdania takiego, jak „Obecny król Francji jest łysy", ponieważ prawdziwość przysługuje nie samym zdaniom, ale aktom stwierdzenia czegoś za pomocą zdań. To samo stwierdzenie dokonane w czasie, gdy Francja była monarchią, było prawdą lub fałszem. Wygłoszone w czasach Republiki nie jest ani prawdą, ani fałszem, ponieważ nie odnosi się do niczego; pozostaje jednak sensowne, bo sensowność – wbrew koncepcji Russella – nie utożsamia się z odnoszeniem się do czegoś.

Inne teorie deskrypcji. W teorii Russella zdanie zawierające deskrypcję ma sens także wówczas, gdy nie jest spełniony warunek jedyności, tj. gdy desygnatów danej deskrypcji nie ma lub gdy jest ich więcej niż jeden; zdanie jest wówczas fałszywe, a więc i sensowne. Prowadzi to jednak do pewnych komplikacji w regułach wnioskowania: nie można np. stosować reguły, która od wyrażenia $F(a)$ (gdzie *a* jest deskrypcją lub jej skrótem) pozwala przejść do wyrażenia $\vee xF(x)$ (tzw. egzystencjalna generalizacja), ponieważ *a* może być puste. Tego rodzaju komplikacje stały się powodem do szukania innych rozwiązań. Poszły one w dwóch kierunkach: jedni autorzy odmówili sensowności tym deskrypcjom, które warunku jedyności nie spełniają; inni wprowadzili reguły gwarantujące spełnienie tego warunku przez każdą bez wyjątku deskrypcje.

Pierwszy kierunek obierają Hilbert i Bernays w *Grundlagen*, a także Słupecki i Borkowski w *Elementach*. Gdy zmienna *x* przebiega liczby naturalne, to np. wyrażenie [1] $(\eta x)(2 < x < 4)$ jest sensowne, nie jest natomiast sensowne ani [2] $(\eta x)(2 < x < 3)$, ani [3] $(\eta x)(2 < x < 5)$. Stąd, dla zapewnienia sensowności zdaniom zawierającym deskrypcje trzeba poprzedzać te zdania zwrotem stwierdzającym spełnienie warunku jedyności. Niedogodnością tej

metody (poniechanej przez Bernaysa 1958) jest brak ogólnej procedury pozwalającej rozstrzygnąć, co jest wyrażeniem sensownym danej teorii. W przypadku zaś teorii zawierających zdania empiryczne, trzeba by sensowność jej wyrażeń uzależnić od przygodnych faktów zamiast od reguł języka (zob. Quine, *ML*; Carnap, *MaN*; Bernays 1958).

Trudności tych pozwala uniknąć takie określenie deskrypcji, by zawsze była ona spełniona. Pierwszy zastosował tę metodę Frege, po nim zaś Gödel, Carnap, Quine, Bernays (1958). Polega ona na wskazaniu obiektu będącego przedmiotem deskrypcji w przypadku, gdy nie spełnia ona zwykłego warunku jedyności (w rozumieniu Russella). Poszczególni autorzy różnią się w wyborze owego obiektu. U Fregego jest to klasa tych przedmiotów, które stanowią de facto zakres danej deskrypcji, np. dla zwrotu [2] będzie to klasa pusta, dla zwrotu [3] klasa dwuelementowa złożona z liczb 3 i 4. W każdym więc przypadku istnieje ów jedyny przedmiot, mianowicie klasa denotowana przez deskrypcję. Ujęcie innych autorów, odznaczające się m. in. większą prostotą, polega na określeniu raz na zawsze jakiegoś jednego przedmiotu, który będzie detonowany przez deskrypcję nie spełniającą zwykłego warunku jedyności. Takim przedmiotem może być liczba 0, klasa pusta (u Quine'a), itp.

P. Bernays: *Axiomatic set theory*. 1958; Carnap: *MaN* (zawiera także informacje historyczne); Frege: *SuB*; – – *Grundlagen der Arithmetik*. 1884; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; Küng: *Ontology*; Russell: *On denoting*. „Mind" XVI 1905; – – *Principia*; – – *Wstęp do filozofii matematyki*. 1958 (wyd. ang. 1919); Quine: *ML*; Reichenbach: *Elements*; Słupecki, Borkowski: *Elementy*; P. F. Strawson: *On referring*. „Mind" LIX 1950 i [W:] *LiJ* (przekł.).

W. M.

deskrypt.

(1) Tyle, co *deskrypcja. Zob. Słupecki, Borkowski: *Elementy*.

(2) Tyle, co przedmiot, do którego odnosi się deskrypcja – w terminologii ang. descriptum. Zob. Carnap: *MaN*.

W. M.

desygnat. Desygnatem nazwy *N* języka *J*, przy pewnym jej znaczeniu, jest każdy przedmiot, o którym można ją zgodnie z prawdą orzec. Desygnatem nazwy „człowiek" jest np. Platon, ponieważ o Platonie orzeka się prawdziwie, że jest człowiekiem. Stosunek nazwy do jej desygnatów nazywa się oznaczaniem lub desygnowaniem. Zbiór wszystkich desygnatów nazwy, przy danym jej znaczeniu, stanowi denotację, czyli zakres tej nazwy (gdy nazwa jest wieloznaczna, ma więcej niż jeden zakres). Jeśli przyjmie się tak szerokie pojęcie zakresu, że utożsamia się ono z pojęciem *denotacji – (3), to desygnowanie przysługuje nie tylko nazwom, lecz również wyrażeniom z innych kategorii semantycznych; np. desygnatem wyrażenia „rządzi" będzie taka para przedmiotów *x*, *y*, o której prawdą jest, że *x* rządzi *y*-em.

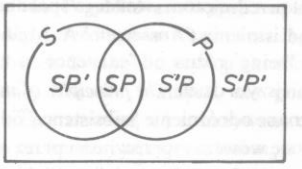
Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

desygnowanie. Stosunek zachodzący między nazwą a jej *desygnatem. Słowo to bywa używane zamiennie ze słowem „oznaczanie". Funkcji desygnowania pozbawione są *nazwy puste.

W. M.

diagramy Venna. Są to wykresy w postaci przecinających się kół, za pomocą których można graficznie wykazywać prawdziwość (ewentualnie fałszywość) pewnych formuł logicznych, np. tradycyjnych praw wnioskowania (*kwadrat logiczny, *Sylogistyka zdań asertorycznych) lub twierdzeń *rachunku zbiorów. W przypadku formuł zawierających tylko dwa terminy, np. *S*, *P*, stosuje się wykres złożony z dwóch kół przedstawiających *zakresy tych terminów. Z przecięcia się tych kół powstały cztery pola przedstawiające odpowiednie zakresy (Rys. 1) oznaczone



Rys. 1

literami: SP = zakres przedmiotów, o których orzeka się S i orzeka się P; SP' = zakres przedmiotów, o których orzeka się S, lecz nie orzeka się P; $S'P$ = zakres przedmiotów, o których nie orzeka się S, lecz orzeka się P; $S'P'$ = zakres przedmiotów, o których nie orzeka się S i nie orzeka się P.

Na wykresie takim można „zapisywać" graficznie zdania zbudowane według następujących schematów:

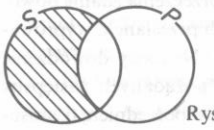
każde S jest P	–	skrót: SaP,
żadne S nie jest P	–	skrót: SeP,
pewne S jest (są) P	–	skrót: SiP,
pewne S nie jest (są) P	–	skrót: SoP.

„Zapisywanie" tych zdań na wykresie polega na zakreskowaniu odpowiedniego pola, lub na oznaczeniu go krzyżykiem. Zakreskowane pole przedstawia zakres pusty. Na przykład zakreskowane pole SP' mówi, że nie istnieją przedmioty będące S, lecz nie będące P (Rys. 2), co stanowi sens zdania SaP.

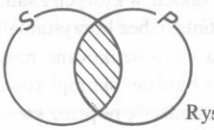
Zakreskowane pole SP (Rys. 3) mówi, że nie istnieją przedmioty będące S oraz P zarazem. To właśnie mówi zdanie SeP. Pole z krzyżykiem przedstawia zakres niepusty. Krzyżyk na polu SP (Rys. 4) mówi, że istnieją przedmioty będące S oraz będące P zarazem, czyli tyle, co zdanie SiP. Natomiast krzyżyk na polu SP' (Rys. 5) stwier-

dza, że istnieją przedmioty, które są S, lecz nie są P, czyli SoP.

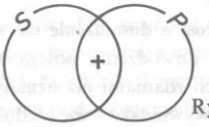
Sprawdzanie praw wnioskowania za pomocą diagramów Venna polega na dwóch czynnościach. Pierwsza – to graficzne zapisanie przesłanek tego wnioskowania na wykresie przez odpowiednie kreskowanie lub krzyżykowanie. Druga – to próba odczytania właściwego wniosku z tak sporządzonego wykresu. Jeżeli uda się odczytać ten



Rys. 2

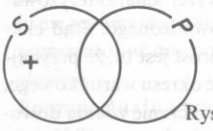


Rys. 3

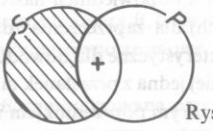


Rys. 4

wniosek, daną formułę należy uznać za prawdziwą. Jeżeli zaś wykres nie pozwala na odczytanie tego wniosku, formuła badana jest fałszywa. W ten sposób można sprawdzić prawo $SeP \rightarrow PeS$, posługując się rysunkiem 3, z którego można odczytać SeP oraz PeS (nie istnieją P będące S).



Rys. 5

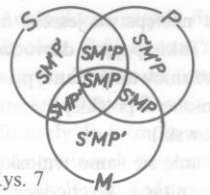


Rys. 6

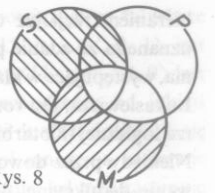
Dla sprawdzenia prawa subalternacji $SaP \rightarrow SiP$ sporządzamy najpierw wykres dla SaP (Rys. 2). Z wykresu tego nie można jeszcze odczytać SiP. Byłoby to możliwe, gdyby na polu SP był krzyżyk (Rys. 6). Znaczy to, że prawo subalternacji jest ważne tylko dla nazw niepustych.

Dla sprawdzenia formuł, w których występują trzy terminy, potrzebny jest wykres złożony z trzech przecinających się kół, przedstawiających zakresy tych terminów (Rys. 7). Z przecięcia się tych kół powstało osiem pól oznaczonych według tej samej zasady jak na Rys. 1. Sposób „zapisywania" zdań jest taki sam, jak na wykresie złożonym z dwóch kół.

Dla sprawdzenia trybu sylogistycznego Barbara: $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$, najpierw zapisuje się przesłanki: MaP – przez zakreskowanie tej części koła M, która nie zawiera się w kole P (nie istnieją przedmioty będące M, lecz nie będące P), SaM – przez zakreskowanie tej części koła S, która nie zawiera się w kole M (nie istnieją przedmioty będące S, lecz nie będące M). Na tak zakreskowanym wykresie (Rys. 8) widać, że nie istnieją takie przedmioty, które są S, lecz nie są P, co zapisuje się symbolicznie: SaP.



Rys. 7



Rys. 8

Jest to wniosek o sprawdzanej formule, a więc należy ją uznać za prawdziwą. Analogicznie sprawdza się inne formuły. Przedstawiona metoda daje się rozszerzyć na formuły o większej ilości zmiennych i precyzyjnie opisać, także bez użycia kół.

Ajdukiewicz: *Zarys*; L. Borkowski: *Elementy logiki formalnej*. 1972; T. Czeżowski: *O graficznych metodach rozwiązywania sylogizmów*. [W:] – – *Odczyty filozoficzne*. 1958; Kotarbiński: *Wykłady*; A. S. Kuziczew: *Diagramy Venna. Istorija i primienienija*. 1968; S. Łuszczewska-Romahanowa: *Analiza i uogólnienie metody sprawdzania formuł logicznych przy pomocy diagramów Venna*. „St. Log." I 1953; P. Suppes: *Introduction to logic*. 1957; J. Venn: *Symbolic logic*. Wyd. 2. 1894.

M. P.

differentia specifica (łac.; różnica gatunkowa). Cecha wyróżniająca pewien gatunek przedmiotów w obrębie klasy nadrzędnej, zwanej rodzajem (łac. genus). Np. cechą wyróżniającą gatunek ludzki w obrębie klasy zwierząt jest rozumność. Pojęcie różnicy gatunkowej ma zastosowanie w tzw. *definicji klasycznej.

W. M.

dowodzenie. Rozumowanie polegające na wykazywaniu prawdziwości danego zdania, jeszcze nie uznanego za prawdziwe, na podstawie innych zdań, już uznanych za prawdziwe. Ze względu na strukturę tego rozumowania rozróżnia się dowodzenie wprost i dowodzenie nie wprost.

1. Dowodzenie wprost. Przykład – mamy udowodnić twierdzenie: suma kątów czworokąta równa się 360°. W tym celu zastanawiamy się, z jakich znanych nam twierdzeń wynika twierdzenie, które mamy udowodnić. W rezultacie tego namysłu uświadamiamy sobie, że każdy czworokąt można podzielić na dwa trójkąty (dzieląc po przekątnej). Wobec tego suma kątów czworokąta równa się sumie kątów dwóch trójkątów. Wiadomo zaś, że suma kątów jednego trójkąta wynosi 180°. A więc – wnioskujemy – suma kątów czworokąta równa się 360°

W rozumowaniu tym, jak w każdym dowodzeniu wprost, można wyróżnić dwa procesy ściśle ze sobą powiązane:

1° Poszukiwanie zdań już uznanych za prawdziwe, stanowiących rację logiczną dla zdania dowodzonego.

2° Wnioskowanie dedukcyjne, w wyniku którego dochodzi się do wniosku identycznego ze zdaniem dowodzonym.

Często w definicji dowodzenia wymienia się tylko pierwszy z wyróżnionych wyżej procesów, nazywając go do-

bieraniem racji już uznanej dla następstwa jeszcze nie uznanego za zdanie prawdziwe. Takie pojęcie dowodzenia, występujące w klasyfikacji rozumowań podanej przez Łukasiewicza, jest rozpowszechnione w polskiej literaturze logicznej (Kotarbiński, Czeżowski).

Niekiedy przez dowodzenie rozumie się samo wnioskowanie dedukcyjne, w którego rezultacie, wychodząc ze zdań już uznanych, dochodzi się do wniosku identycznego ze zdaniem dowodzonym (drugi z wyżej wymienionych procesów).

Poszukiwanie przesłanek do tego wnioskowania traktuje się jako czynność przygotowawczą do dowodzenia. Nie są to jednak pełne charakterystyki dowodzenia. Całość postępowania, które w praktyce nazywa się zwykle dowodzeniem, obejmuje wymienione wyżej dwa procesy: poszukiwanie racji i wnioskowanie.

2. Dowodzenie nie wprost (d. apagogiczne, d. przez sprowadzenie do niedorzeczności, łac. reductio ad absurdum). Przykład – lekarz przekonujący pacjenta, że ten nie jest chory na grypę, tak rozumuje: Gdyby pan był chory na grypę, to miałby pan takie a takie objawy chorobowe (np. ból głowy, podwyższoną temperaturę). Ale pan nie ma tych objawów (głowa nie boli, temperatura normalna). Wobec tego pan nie jest chory na grypę. W rozumowaniu tym można wyróżnić następujące stadia:

1° Wyprowadzanie (dedukcyjne) konsekwencji z zaprzeczenia twierdzenia, które ma być udowodnione, z myślą znalezienia konsekwencji fałszywej.

2° Stwierdzenie, że wśród tych konsekwencji jest zdanie fałszywe.

3° Wnioskowanie (dedukcyjne) stwierdzające prawdziwość zdania dowodzonego (skoro jego zaprzeczenie jest fałszywe, gdyż prowadzi do fałszywych konsekwencji).

W przedstawionym przykładzie rozumowanie przebiega według następującego prawa logicznego: $[(\sim p \rightarrow q) \wedge \wedge \sim q] \rightarrow p$. W przykładzie tym fałszywość następstwa stwierdzono empirycznie (że pacjent nie ma podwyższonej temperatury i nie cierpi na ból głowy).

Niekiedy sama analiza struktury logicznej następstw upoważnia do stwierdzenia fałszywości jednego z nich. Tak jest np., gdy dwa następstwa są ze sobą sprzeczne, albo gdy jakieś następstwo jest koniunkcją dwóch zdań sprzecznych. Wiadomo bowiem, że z dwóch zdań sprzecznych jedno jest zdaniem fałszywym, oraz, że koniunkcja zdań sprzecznych jest zdaniem fałszywym. Również fałszywe jest następstwo, gdy ma postać równoważności dwóch zdań sprzecznych. W tych przypadkach dowodzenie nie wprost przebiega według któregoś z następujących praw logiki:

$$[(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)] \rightarrow p,$$

$$[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p,$$

$$[\sim p \rightarrow (q \equiv \sim q)] \rightarrow p.$$

Istnieje jeszcze inna postać dowodzenia nie wprost, różniąca się od poprzednich tym, że w ogóle nie zachodzi potrzeba szukania fałszywych następstw. Dla udowodnienia jakiegoś zdania p, należy wykazać, że zdanie to wynika ze swego zaprzeczenia $\sim p$. Oto prawo logiczne, w myśl którego postępuje się w takim dowodzeniu: $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$.

Przedstawione wyżej prawa logiczne dotyczą pewnych najprostszych postaci dowodzenia nie wprost, mianowicie takich, w których z samego zaprzeczenia zdania dowodzonego, bez korzystania z innych przesłanek, wyprowadza się poszukiwane następstwa. Niekiedy dowodzenie jest bardziej skomplikowane: do pożądanych następstw dochodzi się poprzez szereg kroków pośrednich, tj. stosując wielokrotne wnioskowanie, posługując się dodatkowymi przesłankami.

3. Dowodzenie wprost a dowodzenie nie wprost. W obu tych przypadkach dowodzenie polega na znalezieniu przesłanek będących zdaniami już uznanymi, z których następnie zostanie wywnioskowane (dedukcyjnie) zdanie dowodzone; zachodzi jednak różnica w sposobie poszukiwania tych przesłanek i w ich strukturze. W dowodzeniu wprost czynność ta stanowi jak gdyby przegląd wiedzy na temat sformułowany przez zdanie dowodzone, ujętej w zdaniach, z myślą znalezienia wśród nich racji logicznej dla dowodzonego zdania. W dowodzeniu nie wprost poszukiwanie racji dla zdania dowodzonego polega na szukaniu odpowiednich następstw (wyżej scharakteryzowanych) dla zaprzeczenia zdania dowodzonego. Stąd charakterystyczne dla dowodu nie wprost jest to, że przynajmniej jedna z przesłanek ma postać okresu warunkowego, w którym poprzednikiem jest zaprzeczenie zdania dowodzonego Oba sposoby dowodzenia przedstawiają z punktu widzenia logicznego tę samą wartość. W konkretnej sytuacji wybiera się sposób dogodniejszy.

Zob. też **dowód; klasyfikacja rozumowań.**

K. Ajdukiewicz: *Dowód a wyjaśnienie*. [W:] *JiP*. T. 2; – – *Zarys logiki*; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*; N. Łubnicki: *Nauka poprawnego myślenia*. 1963; J. Łukasiewicz: *O nauce*. [W:] *Poradnik dla samouków*. T. 1. 1915; G. Vailati: *Sur une classe remarquable de raisonnements par reduction á l'absurde*. „Rev. de metaph. et de morale" XII 1904.

M. P.

dowód. Pojęcie dowodu wymaga odniesienie (relatywizacji) do zbioru założeń i zbioru reguł dowodzenia (reguł dedukcyjnych). Dowodem jest taki ciąg zdań lub formuł zdaniowych, który zaczyna się od wyrażeń przyjętych jako założenia, następnie zawiera wyrażenia otrzymane z założeń w wyniku przekształceń dozwolonych przez reguły dedukcyjne, potem ewentualnie wyrażenia otrzymane z tych ostatnich, itd.; jako ostatnie ogniwo tych przekształceń występuje zdanie dowodzone.

Jeśli regułami danego systemu są np. reguła odrywania i podstawiania, to określenie dowodu przybiera następującą postać: D jest dowodem zdania B w oparciu o zbiór

formuł X przyjętych jako założenia wtedy i tylko, gdy D jest skończonym ciągiem formuł

$$D = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$$

takim, że ostatnia formuła tego ciągu jest identyczna ze zdaniem B (tj. $B = D_n$) oraz każda formuła D_k ciągu $D(1 \leqslant k \leqslant n)$ 1° albo należy do zbioru X; 2° albo powstaje z pewnej formuły D_j tego ciągu wcześniejszej od $D_k(j < k)$ przez prawidłowe podstawienie; 3° albo powstaje z dwóch formuł D_j, D_i wcześniejszych od $D_k(j < k, i < k)$ przez odrywanie: $D_j = (D_i \rightarrow D_k)$.

Zob. też **konsekwencja.**

Grzegorczyk: *Log. mat.*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; Rasiowa: *Wstęp.*

W. M.

dualność (dwoistość). Dualność jest pewnym stosunkiem między formułami logicznymi, w szczególności formułami *ruchunku zdań, *rachunku kwantyfikatorów i *algebry Boole'a. Bierzemy pod uwagę rachunek zdań i kwantyfikatorów zawierający następujące stałe logiczne: $\sim$, $\cdot$, $\vee$, (x), (Ex); jeśli w jakimś rachunku występują inne stałe, to przy rozważaniu dualności trzeba dokonać odpowiednich przekładów na stałe wyżej wymienione.

Niech każdy z symboli A_1, A_2 itd. reprezentuje jakąś formułę atomiczną, to jest formułę, która jest bądź pojedynczą zmienną zdaniową, bądź jest utworzona z predykatu z odpowiednią liczbą argumentów; są to więc formuły nie zawierające stałych logicznych. Litery B, C itd. będą reprezentować dowolne formuły, zarówno atomowe, jak i złożone.

Formuła dualna względem B, symbolizowana przez $*B$ lub $*[B]$, jest to formuła otrzymana z B przez zastąpienie w niej wszędzie określonych elementów przez inne, wedle następującej zasady: (1) A_i przez $\sim A_i$. (2) $\sim A_i$ przez A_i, (3) $\cdot$ przez $\vee$. (4) $\vee$ przez $\cdot$, (5) (x) przez (Ex). (6) (Ex) przez (x). Pierwsze dwa punkty możemy zapisać, odpowiednio, również w formie równości: $*A_i = \sim A_i$, $*[\sim A_i] = A_i$.

Przykłady:

$p \cdot q$ jest formułą dualną względem $\sim p \vee \sim q$;

$(x)(Px \vee Qx)$ względem $(Ex)(\sim Px \cdot \sim Qx)$;

$(Ex)(y)(\sim Px \vee (\sim Qy \cdot Rx))$ względem $(x)(Ey)(Px \cdot (Qy \vee \sim Rx))$.

Zasada dualności jest środkiem, który pozwala uzyskiwać z twierdzeń logicznych inne twierdzenia, wedle następujących reguł: (a) jeśli B jest twierdzeniem, to $\sim *B$ jest twierdzeniem; (b) jeśli $B \rightarrow C$ jest twierdzeniem, to $*C \rightarrow *B$ jest twierdzeniem; (c) jeśli $B \equiv C$ jest twierdzeniem, to $*B \equiv *C$ jest twierdzeniem.

Przykłady. Ad (a): z $p \vee \sim p$ otrzymuje się $\sim *[p \vee \sim p]$, tj. twierdzenie $\sim (\sim p \cdot p)$; ad (b): z $p \rightarrow (p \vee q)$ otrzymuje się $*[p \vee q] \rightarrow *p$, tj. twierdzenie $(\sim p \cdot \sim q) \rightarrow \sim p$; ad (c): z $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$ otrzymuje się $*[\sim (p \vee q)] \equiv *[\sim p \cdot \sim q]$, tj. twierdzenie $\sim (\sim p \cdot \sim q) \equiv (p \vee q)$.

Analogiczna zasada dualności obowiązuje w *algebrze Boole'a. Jeśli system relacyjny $\langle U, \cap, \cup, ', 0, 1\rangle$ jest algebrą Boole'a, to system relacyjny $\langle U, \cup, \cap, ', 1, 0\rangle$ jest także algebrą Boole'a. Przy przechodzeniu od jakiejś formuły do formuły względem niej dualnej dokonuje się następujących zastępowań: symbol mnożenia zastępuje się symbolem dodawania, i odwrotnie; jedynkę zastępuje się zerem, i odwrotnie. Np. formułą dualną względem $x \cup x' = 1$ jest formuła $x \cap x' = 0$.

I. M. Copi: *Symbolic logic.* 1954; D. Hilbert, W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik.* 1928; S. C. Kleene: *Introduction to metamathematics.* 1952; J. C. C. McKinsey, A. Tarski: *On closed elements in closure algebras* (Appendix). „Ann. of Math." XLVII 1946; Mostowski: *Log. mat.*; R. Sikorski: *Boolean algebras.* 1960.

W. M.

dylemat. Nazwą tą w logice tradycyjnej obejmowano schematy wnioskowania, w których obok dwóch zdań warunkowych występuje jako trzecia przesłanka zdanie alternatywne. Wyróżniono następujące odmiany dylematów:

Dylemat konstrukcyjny prosty:

jeżeli a, to c;
jeżeli b, to c;
a lub b.

Zatem: c

Przykład: Jeżeli spędzę urlop nad morzem, to będę miał dobry odpoczynek; jeżeli spędzę urlop w górach, to (też) będę miał dobry odpoczynek; spędzę urlop nad morzem lub spędzę urlop w górach. Zatem: Będę miał dobry odpoczynek.

Dylemat konstrukcyjny złożony:

jeżeli a, to b;
jeżeli c, to d;
a lub c

Zatem: b lub d.

Przykład: Jeżeli pojadę w góry, to pojadę do Zakopanego; jeżeli pojadę nad morze, to pojadę do Sopotu; pojadę w góry lub pojadę nad morze. Zatem: Pojadę do Zakopanego lub pojadę do Sopotu.

Dylemat destrukcyjny prosty:

jeżeli a, to b;
jeżeli a, to c;
nie-b lub nie-c

Zatem: nie-a

Przykład: Jeżeli x jest podzielne przez 6, to x jest podzielne przez 3; jeżeli x jest podzielne przez 6, to x jest podzielne przez 2; x nie jest podzielne przez 3 lub x nie jest podzielne przez 2. Zatem: x nie jest podzielne przez 6.

Dylemat destrukcyjny złożony:

jeżeli a, to b;
jeżeli c, to d;
nie-b lub nie-d

Zatem: nie-a lub nie-c

Przykład: Jeżeli pojadę w góry, to pojadę do Zakopanego; jeżeli pojadę nad morze, to pojadę do Sopotu; nie pojadę do Zakopanego lub nie pojadę do Sopotu. Zatem: nie pojadę w góry lub nie pojadę nad morze.

Zwrot „lub" np. w wyrażeniu „a lub b" rozumie się w sensie alternatywy: przynajmniej jedno z dwojga. Omówione dylematy są niezawodnymi schematami wnioskowania, tzn. od prawdziwych przesłanek prowadzą zawsze do prawdziwych wniosków. Każdemu dylematowi odpowiada jakieś prawo z rachunku zdań.

Prawa dylematu konstrukcyjnego:

prostego: $[(p\to r)\wedge(q\to r)\wedge(p\vee q)]\to r$;

złożonego: $[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(p\vee r)]\to(q\vee s)$.

Prawa dylematu destrukcyjnego:

prostego: $[(p\to q)\wedge(p\to r)\wedge(\sim q\vee\sim r)]\to\sim p$;

złożonego: $[(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\sim q\vee\sim s)]\to(\sim p\vee\sim r)$.

Ajdukiewicz: *Zarys*; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

dysjunkcja (dyzjunkcja, d. Sheffera). Zdanie (lub *funkcja zdaniowa) utworzone za pomocą *funktora prawdziwościowego „/" o następującej tabelce (matrycy):

p	q	p/q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Dysjunkcja jest więc fałszywa, gdy oba zdania składowe są prawdziwe, w pozostałych przypadkach jest prawdziwa. Funktor ten, odkryty przez logika amerykańskiego Sheffera, można czytać: nie p lub nie q. Jest on jednym z dwóch funktorów (obok jednoczesnego zaprzeczenia), z których każdy sam wystarcza do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów prawdziwościowych. Przykłady definicji: $\sim p\equiv p/p$; $p\vee q\equiv(p/p)/(q/q)$. Ponieważ alternatywa z negacją pozwala zdefiniować pozostałe funktory (podobnie jak *koniunkcja z negacją czy *implikacja z negacją), także dysjunkcja wystarcza do zdefiniowania wszystkich. Funktor dysjunkcji stanowi jedyny termin pierwotny systemu rachunku zdań, którego jedynym aksjomatem jest *aksjomat Nicoda-Łukasiewicza.

Mostowski: *Log. mat.*; Quine: *ML*; H. M. Sheffer: *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants.* „Transact. of Amer. Math. Soc." XIV 1913.

W. M.

dziedzina relacji. Dziedziną danej *relacji nazywamy zbiór wszystkich przedmiotów, które pozostają w tej relacji do co najmniej jednego przedmiotu. Oznaczając symbolem $D(R)$ dziedzinę relacji R zapisujemy tę definicję symbolicznie: $x\in D(R)\equiv\vee y\,xRy$. Przykład: dziedziną relacji bycia ojcem jest zbiór wszystkich mężczyzn mających dzieci. Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

dziedzina teorii (struktura, układ relacyjny). Układ przedmiotów, tj. *indywiduów, własności, relacji i *funkcji rozpatrywanych w danej teorii. Pojęcie dziedziny teorii związane jest z pojęciem *modelu semantycznego.

W. M.

E

eksperyment. Zabieg przedsiębrany w celu dokonania obserwacji, który bądź wywołuje samo obserwowane zjawisko, bądź wpływa na jego przebieg. Przykład: Zmniejszanie objętości pewnej masy gazu przy stałej jego temperaturze w tym celu, by zaobserwować, jak wraz ze zmianą objętości zmienia się prędkość cząstek gazu.

Obserwacje poczynione w wyniku przeprowadzonych eksperymentów dostarczają przesłanek wykorzystywanych następnie do rozwiązywania rozmaitych zadań, np. metodami *indukcji eliminacyjnej. Odpowiednio do rodzajów tych zadań, wyróżnia się rozmaite typy eksperymentów. Na przykład:

Eksperyment diagnostyczny, tj. taki, który przeprowadza się w tym celu, by uzyskane dzięki niemu obserwacje pozwoliły na gruncie posiadanej już wiedzy zaklasyfikować dany przedmiot lub rozpoznać pewne jego własności. Przykładem jest wprowadzanie wiązki promieni w pole magnetyczne, aby z kierunku, w jakim się one w tym polu wychylają, wnioskować, że promienie te stanowią strumień cząsteczek o elektrycznym ładunku dodatnim, ewentualnie ujemnym.

Experimentum crucis (łac.; eksperyment krzyżowy, eksperyment rozstrzygający). Jest to taki eksperyment, którego zadaniem jest dostarczenie obserwacji pozwalających rozstrzygnąć o wyborze jednego z dwóch konkurencyjnych rozwiązań jakiegoś problemu. Tego rodzaju był eksperyment Foucaulta polegający na pomiarze szybkości światła w powietrzu i w wodzie. Dzięki tym pomiarom, które wykazały, że szybkość światła jest większa w powietrzu niż w wodzie, został rozstrzygnięty spór pomiędzy cząsteczkową teorią światła Newtona a falową teorią światła Huyghensa na korzyść tej drugiej. Rozumowanie było następujące. Znane zjawisko załamywania się do pionu promienia światła przechodzącego z powietrza do wody znajduje swe wyjaśnienie w teorii cząsteczkowej tylko przy założeniu, że szybkość światła w powietrzu jest mniejsza niż w wodzie. Natomiast falowa teoria światła potrafi wyjaśnić to samo zjawisko tylko przy założeniu większej szybkości światła w powietrzu niż w wodzie. Eksperyment Foucaulta, który wykazał, że światło ma większą szybkość w powietrzu niż w wodzie, potwierdził falową teorię światła, a obalił cząsteczkową (w jej ówczesnej postaci).

Jeszcze innym typem (nie mającym własnej nazwy) jest eksperyment, którego zadaniem jest dostarczenie obserwacji umożliwiających wykrycie związków zależności (ilościowych lub jakościowych) pomiędzy zjawiskami, np. pomiędzy objętością a prężnością gazu, przy stałej temperaturze tego gazu.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*; Mill: *Syst. log.*; H. Reichenbach: *The rise of scientific philosophy*. 1951 (polski przekł.: *Powstanie i rozwój filozofii naukowej*. 1960).

M. P.

eksplikacja (ang. explication). Terminem tym określa się, za Carnapem, konstrukcję nowego pojęcia, które ma się odnosić do tego samego zakresu, co pewne dawniejsze pojęcie, będąc jednak od dawnego bardziej precyzyjne (ang. more exact). To dawniejsze, uściślane, pojęcie nazywa się explicandum (łac.; to, co ma być wyjaśnione); pojęcie służące do uściślenia nazywa się explicatum (łac.; to, co wyjaśniane). Np. pojęcie L-prawdy zostało pomyślane przez Carnapa jako explicatum dla pojęcia analityczności (*Zdanie analityczne). Termin „eksplikacja" przyjmuje się także w piśmiennictwie polskim. Eksplikacja wykazuje podobieństwo do *definicji regulującej, z tą jednak różnicą, że w tej ostatniej koncentruje się uwagę na sprecyzowaniu zakresu, podczas gdy eksplikacja jest przede wszystkim modyfikacją sensu.

Zob. też **analiza logiczna** – (3).

Carnap: *MaN*, par. 2.

W. M.

ekstensjonalność (łac. extensio – zakres; vs intensjonalność). Własność orzekana o pewnych wyrażeniach złożonych lub o pewnych *funktorach, lub o pewnych językach.

Wyrażenie złożone *W* jest ekstensjonalne wtedy i tylko, gdy *denotacja *W* zależy (w sensie: jest funkcją) wyłącznie od denotacji wyrażeń składowych.

F jest funktorem ekstensjonalnym wtedy i tylko, gdy wraz ze swymi argumentami tworzy wyrażenia złożone ekstensjonalne.

J jest językiem ekstensjonalnym wtedy i tylko, gdy wszystkie wyrażenia w *J* są ekstensjonalne.

Dla ujednolicenia rozważań nad ekstensjonalnością przyjmuje się zwykle, że zakres, czyli denotacja przysługuje nie tylko nazwom, lecz również zdaniom: denotacją zdania jest wartość logiczna. Stąd w przypadku, gdy wyrażenie jest zdaniem złożonym, tj. takim, które wśród swych składników zawiera przynajmniej jedno zdanie, charakterystyka ekstensjonalności formułowana jest następująco: Zdanie złożone *Z* jest ekstensjonalne wtedy i tylko, gdy wartość logiczna *Z* zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań składowych. Funktor ekstensjonalny tworzący wraz ze swymi argumentami złożone zdanie

ekstensjonalne nazywa się funktorem prawdziwościowym. Takimi są wszystkie funktory rachunku zdań. Zdaniami ekstensjonalnymi są wyrażenia otrzymane drogą podstawienia za zmienne w dowolnych napisach sensownych rachunku zdań, takich np., jak: $\sim p$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, itp.

Do wyrażeń ekstensjonalnych odnoszą się reguły zastępowania pozwalające na zastępowanie dowolnych wyrażeń wyrażeniami o tej samej denotacji. Stosowanie takich reguł nie zmienia denotacji wyrażenia, w którym dokonane zostało zastępowanie; m. in. nie zmienia wartości logicznej zdania (tzw. zastępowalność salva veritate, łac., z zachowaniem prawdziwości). W przypadku wyrażeń nie-ekstensjonalnych potrzebne są inne reguły, uwzględniające nie tylko stosunki zakresowe.

Można charakteryzować ekstensjonalność również za pomocą tzw. *aksjomatu ekstensjonalności, który w jednej ze swych wersji, przybiera postać: $\wedge x(x \in X \equiv x \in Y) \rightarrow \rightarrow (X = Y)$.

Słownie: Jeśli dwa zbiory mają dokładnie te same elementy, to są identyczne.

Można określić język ekstensjonalny jako taki język, którego tezą jest aksjomat ekstensjonalności.

Carnap: *MaN*; Church: *Math. log.*; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Grzegorczyk: *Log. mat*; Mostowski: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

ekwiwokacja. Błąd logiczny spowodowany wieloznacznością wyrażeń, popełniany wtedy, gdy w danym kontekście to samo wyrażenie użyte jest dwukrotnie, za każdym razem w innym znaczeniu, choć poprawność wymaga użycia tego wyrażenia w tym samym znaczeniu w obydwu przypadkach.

Przykład: Logika zajmuje się badaniem rozumowań. Rozumowania są to procesy psychiczne pewnego rodzaju. Wobec tego logika zajmuje się procesami psychicznymi pewnego rodzaju. W drugiej przesłance – termin „rozumowanie" oznacza pewnego rodzaju procesy psychiczne, natomiast w pierwszej – wytwór tego procesu myślowego w postaci układu zdań. Wskutek tej dwuznaczności, wnioskowanie to prowadzi od prawdziwych przesłanek do fałszywego wniosku.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki.*

M. P.

element zbioru. Zwrot „x jest elementem zbioru X", zapisujemy skrótowo: $x \in X$. Bycie elementem można scharakteryzować w sposób następujący: x jest elementem zbioru M-ów wtedy i tylko, gdy x jest M-em, np. Paryż ∈ zbiór miast wtedy i tylko, gdy Paryż jest miastem; $x \in$ zbiór liczb parzystych $\equiv x$ jest liczbą parzystą.

Suszko: *Wykłady.*

K. Cz.

entymemat (z gr. $\xi v\ \vartheta v \mu \tilde{\omega}$ – w umyśle). Wnioskowanie dedukcyjne, w którym jakaś przesłanka została przemilczana, najczęściej ze względu na jej oczywistość. Przykład: Każdy człowiek jest odpowiedzialny za swoje czyny, a więc Jan jest odpowiedzialny za swoje czyny. Przesłanką przemilczaną, czyli entymematyczną jest tu zdanie: Jan jest człowiekiem. Z samej wyraźnie wymienionej przesłanki (Każdy człowiek jest odpowiedzialny za swoje czyny) nie wynika logicznie wniosek (Jan jest odpowiedzialny za swoje czyny). W takim przypadku mówi się, że wniosek wynika entymematycznie. Dopiero z łącznie wziętych przesłanek: wypowiedzianej i domyślnej (Każdy człowiek jest odpowiedzialny za swoje czyny i Jan jest człowiekiem) wynika logicznie wniosek (Jan jest odpowiedzialny za swoje czyny).

Przesłanka entymematyczna, tj. niewypowiedziana w słowach, bywa niekiedy zdaniem, którego wnioskujący nie uświadamia sobie aktualnie. Zdarza się, że jest to zdanie fałszywe lub bezpodstawnie przyjęte. Stąd ujawnianie przesłanek entymematycznych jest jednym ze sposobów wykrywania błędów logicznych.

Ajdukiewicz: *Zarys*; Z. Czerwiński: *O pojęciu wnioskowania dedukcyjnego.* „St. Filoz." 1960 4 z. 2; Kotarbiński: *Kurs logiki.*

M. P.

epichejremat. Termin z logiki tradycyjnej oznaczający schemat wnioskowania, które stanowi układ sylogizmów tak uporządkowanych, że przesłanki pierwszego sylogizmu są wnioskami dwu innych sylogizmów, zaś przesłanki tamtych sylogizmów są ewentualnie wnioskami innych sylogizmów itd:

Przykład:

MaP każde *M* jest *P*
SiM pewne *S* jest *M*

SiP pewne *S* jest *P*

NaP każde *N* jest *P*
MaN każde *M* jest *N*

MaP każde *M* jest *P*

RaM każde *R* jest *M*
SiR pewne *S* jest *R*

SiM pewne *S* jest *M*

Epichejrematem bywa nazywany zarówno przedstawiony wyżej schemat wnioskowania, jak i samo wnioskowanie przebiegające według tego schematu.

M. Kowalewski: *Logika.* 1959.

M. P.

erystyka (z gr. $\xi \varrho \iota \zeta$ – spór). Sztuka prowadzenia sporów obejmująca zarówno umiejętność przekonywania innych o prawdziwości podawanych im poglądów, jak i umiejęt-

ność nakłaniania innych do zalecanego im postępowania. Rozumowania stosowane w erystyce mają nieraz pozory poprawności logicznej, będąc w gruncie rzeczy błędne.

Z erystyki zasłynęła w starożytności szkoła megarejska (IV w. pne.), od której pochodzą pewne *antynomie (trudności logiczno-językowe) aktualne po dziś dzień. Przykładem jest pochodząca od Eubulidesa antynomia kłamcy: jeżeli kłamca mówi, że kłamie, to zarazem kłamie i mówi prawdę. Również i sofiści (IV w. pne.) zajmowali się erystyką, nadając jej z czasem charakter sztuki stwarzania pozorów prawdziwości. Stąd tego rodzaju rozumowania przyjęło się nazywać sofizmatami, a termin „sofistyka" stał się synonimem terminu „erystyka".

Wielu wypracowanym w erystyce sposobom przekonywania nadano łacińskie nazwy. Oto najbardziej znane spośród nich:

Argumentum ad auditorem (łac.; argument [odwołujący się] do słuchacza). Przykład: w dyskusji na temat teorii Darwina o pochodzeniu gatunków jeden z oponentów zwraca się do osób przysłuchujących się dyskusji z pytaniem, czy ich przodkowie byli małpami. Jest to sposób argumentowania polegający na tym, że posługujący się nim zwraca się nie do swego partnera w dyskusji, lecz do współuczestników lub nawet do biernych słuchaczy w celu pozyskania ich sobie, i to nie przez podanie logicznych racji stanowiących uzasadnienie głoszonej tezy, lecz w jakiś inny sposób, np odwołując się do ich uczuć.

Argumentum ad baculum (łac.; argument [odwołujący się] do kija). Przykład: W sporze o graniczne terytoria przedstawiciel jednej ze stron grozi użyciem siły militarnej, o ile jej żądania nie zostaną spełnione. Inny przykład: Ojciec ucznia, zaniedbującego się w nauce, wymierza mu karę fizyczną w celu nakłonienia go do pilności. Jest to sposób argumentowania polegający bądź na grożeniu przykrymi konsekwencjami w przypadku niewyrażenia zgody na postawione żądania, bądź na aktualnym użyciu jakichś środków przymusu, np. siły, w celu nakłonienia drugiej strony do spełnienia określonych żądań.

Argumentum ad hominem (łac.; argument [dostosowany] do człowieka; argumentum ex concesso – łac.; argument z uznanego [przez stronę przeciwną]). Przykład: Uczniowie proszą nauczyciela botaniki, miłośnika przyrody, o urządzenie wycieczki do lasu. W uzasadnieniu tej prośby powołują się na wypowiedzi tego nauczyciela, w których mówi on o potrzebie bezpośredniego kontaktu z przyrodą w celu lepszego poznania jej tajemnic. Jest to sposób argumentowania, w którym na poparcie swego stanowiska przytacza się racje przyjęte przez stronę przeciwną albo wynikające z założeń przyjętych przez stronę przeciwną. Argumentum ad hominem jest lojalnym chwytem erystycznym, jeżeli posługujący się nim jest przekonany o prawdziwości tych racji, na które się powołuje. (W powyższym przykładzie, jeżeli uczniowie rzeczywiście odczuwają potrzebę bezpośredniego kontaktu z przyrodą dla lepszego poznania jej tajemnic). W przeciwnym przypadku jest to nielojalny chwyt erystyczny.

W niektórych podręcznikach logiki przez argumentum ad hominem rozumie się to, co przedstawiono niżej jako argumentum ad personam.

Argumentum ad ignorantiam (łac.; argument [odwołujący się] do niewiedzy). Przykład: „Czy potrafisz udowodnić, że duchy nie istnieją? – Nie potrafię. – Wobec tego powinieneś uznać istnienie duchów". Istota takiej argumentacji polega na stwierdzeniu, że przeciwnik dyskusji nie potrafi podać kontrdowodu dla tezy, którą mu się chce narzucić. Fakt, że dyskutant nie potrafi wykazać fałszywości danej tezy (a tym bardziej, jeżeli nikt tego nie potrafi uczynić), traktuje się jako dowód prawdziwości tej tezy.

Argumentum ad ignorantiam przybiera również inne postacie. Może polegać np. na odwoływaniu się do rzekomych faktów, których druga strona dyskusji nie zna i nie jest w stanie sprawdzić. W innym przypadku jest to powoływanie się na nie znane drugiej stronie jakieś prawa, np. prawa logiki. Wspólną cechą różnych odmian tego rodzaju argumentacji jest wykorzystywanie niewiedzy przeciwnika w dyskusji.

Argumentum ad misericordiam (łac.; argument [odwołujący się] do litości). Przykład: Student, który nie zdał egzaminu, prosi profesora o niestawianie mu niedostatecznej oceny, gdyż wtedy straciłby stypendium, czułby się nieszczęśliwy, itp. Jest to sposób argumentowania polegający na wzbudzeniu w drugiej osobie uczuć litości i współczucia w celu zjednania sobie tej osoby.

Argumentum ad personam (łac.; argument [skierowany] do osoby). Postępowanie w dyskusji polegające na przypisywaniu przeciwnikowi szeregu wad, zgodnie lub niezgodnie z prawdą, na ośmieszaniu, a nawet na lżeniu przeciwnika, aby w ten sposób wmówić słuchaczom, a niekiedy nawet i samemu przeciwnikowi, że jego poglądy są fałszywe. Ten sposób przekonywania określany jest niekiedy jako argumentum ad hominem.

Argumentum ad populum (łac.; argument [odwołujący się] do upodobań ludu; demagogia). Argumentacja polegająca na rozbudzeniu podniecenia uczuciowego słuchaczy przez odwoływanie się do ich dumy, egoizmu narodowego lub rasowego, do instynktów i przesądów, w celu pozyskania słuchaczy dla swych poglądów lub postaw.

Argumentum ad vanitatem (łac.; argument [odwołujący się] do próżności). Przykład: W dyskusji padają takie zwroty: „nie ulega najmniejszej wątpliwości pana głęboka znajomość rzeczy...", „pan jako fachowiec doskonale wie, że...", „...jako człowiek inteligentny, rozumie pan,

że...". Po tym przygotowaniu wypowiada się własny pogląd w nadziei, że zjednany komplementami dyskutant uzna ten pogląd za słuszny. Jest to sposób argumentowania zmierzający do wykorzystania próżności drugiej strony.

Argumentum ad veracundiam (łac.; argument [odwołujący się] do nieśmiałości). Przykład: W dyskusji na tematy światopoglądowe jedna strona powołuje się na autorytety wielkich uczonych: fizyków, matematyków, chemików. Strona przeciwna czuje się skrępowana obawą, że kwestionując autorytety (które są – ściśle biorąc – autorytetami w dziedzinie fizyki, matematyki i chemii, nie zaś w dziedzinie problematyki światopoglądowej), narazi się na zarzut w rodzaju: jesteś zarozumiały, uważasz sie za mądrzejszego od takich a takich uczonych. Argumentum ad verecundiam jest to sposób przekonywania polegający na powoływaniu się na jakiś autorytet, którego wprawdzie druga strona nie uznaje, ale też i nie może go zakwestionować, będąc skrępowana uczuciami czci i szacunku lub nieśmiałością, obawą narażenia się na zarzut zarozumiałości.

T. Czeżowski: *O dyskusji i dyskutowaniu* [W:] – – *Odczyty filozoficzne*. 1958; M. Dobrosielski: *Logika a retoryka*. 1957; K o t a r b i ń s k i: *Kurs logiki*; – – *O sposobach prowadzenia sporów*. [W:] – – Wybór pism. T. 1. 1957; J. Locke: *Rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*. T. 2. 1955; N. Łubnicki: *Nauka poprawnego myślenia*. 1963; W. M a r c i s z e w s k i: *Sztuka dyskutowania*. 1971; T. Pszczołowski: *Umiejętność przekonywania i dyskusji*. 1962; A. Schopenhauer: *Sztuka prowadzenia sporów*. 1902; W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii*. T. 1. 1948; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

F

falsyfikacja. Postępowanie prowadzące do wykazania, że jakieś zdanie jest fałszywe. Falsyfikacja empiryczna – rozstrzyganie o fałszywości pewnych zdań na tej podstawie, że ich negacja wynika z przyjętych zdań obserwacyjnych. Podatność na falsyfikację empiryczną (falsyfikowalność) stanowi dla zdania jedno z kryteriów jego empiryczności.

Zob. też **zdanie empiryczne.**

Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

figury sylogizmu. Rodzaje trybów sylogistycznych wyróżnione ze względu na sposób rozmieszczenia w nich terminu średniego. Figury sologistyczne przedstawia się zwykle w postaci następujących schematów:

Figura I	Figura II	Figura III	Figura IV
MP	*PM*	*MP*	*PM*
SM	*SM*	*MS*	*MS*
SP	*SP*	*SP*	*SP*

Zob. też **sylogistyka zdań asertorycznych.**

M. P.

filozofia nauki. Nazwą tą obejmuje się w literaturze anglosaskiej badania dotyczące metod i podstawowych pojęć nauk empirycznych. Pokrywa się to w przybliżeniu z tym obszarem badań, które w piśmiennictwie polskim uprawia się w dwóch osobnych działach i pod dwiema nazwami: *metodologia nauk empirycznych i filozofia przyrody, pojmowana jako analiza podstawowych pojęć przyrodoznawstwa (pojęcie przyczyny, czasu, przestrzeni etc.) Niekiedy w miejsce terminu „filozofia nauki" występuje termin „filozofia naukowa" (ang. scientific philosophy). Związek tej dziedziny z logiką znalazł wyraz w nazwie międzynarodowego stowarzyszenia instytucji logicznych, działającego pod patronatem UNESCO jako Sekcja Logiki, Metodologii i Filozofii Nauki w ramach Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauki. Problematyka filozofii nauki znajduje miejsce w przeważającej większości czasopism filozoficznych, w szczególności zaś w: „Philosophy of Science", „British Journal for Philosophy of Science" i „Synthese" (organ sekcji).

Beth: *Foundations*; Ph. Frank: *Philosophy of science. The link between science and philosophy*. 1957; H. Reichenbach: *The rise of scientific philosophy*. 1951 (polski przekł.: *Powstanie i rozwój filozofii naukowej*. 1960); H. Weyl: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. 1927.

W. M.

formalizm. Zainicjowany przez Hilberta kierunek w zakresie podstaw matematyki, traktujący teorie matematyczne jako niezinterpretowane systemy (rachunki) aksjomatyczno-formalne.

Formalizm jest właściwie stanowiskiem metodologicznym. U jego źródeł leżało dążenie do uniezależnienia konstrukcji matematycznych od strony znaczeniowej (treściowej) pojęć matematycznych, a punktem wyjścia było przekonanie, że podstawowe teorie matematyczne powstają poprzez uogólnienie obserwacji wyekstrapolowanych z teorii zbiorów skończonych. Skończoność jest więc zawarta implicite w tych teoriach, stąd oczekiwać można, że metody finitystyczne wystarczą do ich ugruntowania. Z drugiej strony podnoszono, że finitystyczność i schematyczność dowodów z pewnością zagwarantują ich weryfikowalność. Stanowisko formalistyczne wykazuje wiele analogii ze stanowiskiem *logicyzmu, szczególnie jeśli chodzi o metody budowania teorii matematycznych. Formaliści położyli wielkie zasługi w rozwinięciu matematycznych badań nad podstawami matematyki oraz w rozwinięciu ścisłej teorii dowodu. Celem Hilberta było usprawiedliwienie używania pojęć i metod abstrakcyjnych w matematyce klasycznej oraz wykazanie jej niesprzeczności i rozstrzygalności. Badania Hilberta były reakcją na rozpowszechniony w początkowych latach jego kariery (1890–1910) pogląd, że różnego rodzaju trudności teoretyczne dotykające szczególnie nowe działy matematyki (np. teorii mnogości) są rezultatem nadużywania w tych działach technik abstrakcyjnych, tj. pojęć abstrakcyjnych (idealnych – w terminologii Hilberta) oraz nieefektywnych (wzgl. niekonstruowalnych) metod dowodzenia. Pojęcia abstrakcyjne przeciwstawiano pojęciom konkretnym (resp. finitystycznym, bądź w terminologii Hilberta – realnym), czyli pojęciom oznaczającym obiekty otrzymane z wyjściowej grupy obiektów prostych poprzez iterowanie operacji branych z pewnej wyselekcjonowanej rodziny operacji „finitystycznych". Hilbert nigdy nie określił dokładnie tych pojęć. Jednakże pamiętając, że akceptował w pełni program arytmetyzacji matematyki klasycznej, czyli zredukowania jej do arytmetyki liczb naturalnych oraz opierając się na licznych przykładach wziętych z prac Hilberta przyjąć można, że do obiektów prostych zaliczał on liczby naturalne, a przez operacje finitystyczne rozumiał operacje wyrażalne w arytmetyce, w szczególności operacje kombinatoryczne.

Hilbert dążył do usprawiedliwienia użycia technik abstrakcyjnych w matematyce klasycznej poprzez pokazanie, że klasyczne teorie matematyczne są konserwatywne,

tj. do wykazania, że każde dowiedlne z pomocą technik abstrakcyjnych konkretne stwierdzenie matematyczne może być udowodnione bez użycia tych technik. Wynikałaby stąd eliminowalność technik abstrakcyjnych z matematyki, ich wyłącznie pomocniczy charakter. Kluczowym punktem w zarysowanym wyżej programie badawczym było sprowadzenie zwykłych teorii matematycznych do ich sformalizowanych, finitystycznych analogonów oraz wykazanie niesprzeczności tych teorii formalnych. Wynikałaby stąd nie tylko konserwatywność teorii wyjściowych, lecz także ich niesprzeczność. Poza tym Hilbert sądził, że każdy problem matematyczny jest rozwiązalny, co prowadziło do wiary w to, że podstawowe sformalizowane teorie matematyczne są rozstrzygalne.

Aby to wszystko wykazać, traktował Hilbert teorie matematyczne jako niezinterpretowane systemy aksjomatyczno-formalne, których badania prowadzono w „treściowej" metateorii, zwanej metamatematyką. Symbole oraz napisy z rozważanego języka systemu formalnego nie posiadają – w ramach tego systemu – żadnej interpretacji, podlegając jedynie manipulacjom dozwolonym przez przyjęte reguły dedukcji. Wszelkie interpretacje są wyłącznie środkiem heurystycznym, a „sens" symboli występujących w aksjomatach wyznaczony jest jedynie przez ich spełnianie we wszystkich modelach. Biorąc pod uwagę brak uprawnionych sposobów wyróżniania modeli oczekiwanych (standardowych, resp. absolutnych) otrzymujemy, iż pojęcia opisywane w teoriach aksjomatyczno-formalnych są pojęciami relatywnymi. Ten relatywizm pojęć z jednej strony pozwala na przeprowadzenie wielu subtelnych badań dotyczących stosunków logicznych między poszczególnymi formułami badanych teorii, a z drugiej strony prowadzi do konsekwencji niepożądanych z intuicyjnego punktu widzenia.

Program Hilberta opierał się na dwu podstawowych przeświadczeniach: że cała matematyka (a przynajmniej teorie podstawowe, do których redukowalne byłyby wszystkie inne teorie matematyczne) może być sformalizowana tworząc jeden system aksjomatyczno-formalny oraz, że niesprzeczność tego systemu może być wykazana metodami elementarnymi i niekwestionowalnymi. W badaniach metamatematycznych dopuszczał Hilbert jedynie tzw. metody finitystyczne, najczęściej różne metody kombinatoryczne. Hilbert dążył do podania absolutnych dowodów *niesprzeczności, tj. dowodów nie polegających na podaniu interpretacji w innych teoriach; dlatego chciał wykazać zarazem niesprzeczność matematyki i logiki.

Przekonanie formalistów, że cała matematyka winna być zaksjomatyzowana wzbudziło obiekcje filozoficzne z uwagi na nieuniknioną arbitralność aksjomatów.

Prace nad wykonaniem programu Hilberta prowadzono intensywnie do 1931 r. W roku tym K. Gödel wykazał niezupełność ciekawszych teorii matematycznych, tj. teorii zawierających istotny fragment arytmetyki liczb naturalnych, oraz udowodnił, iż jest rzeczą niemożliwą podanie absolutnych dowodów niesprzeczności ciekawszych, standardowo sformalizowanych teorii; dowody niesprzeczności podawać można jedynie na terenie teorii bogatszych, w których rozważana teoria jest interpretowalna (*Twierdzenie Gödla). W 1936 r. A. Church wykazał, że już węższy rachunek predykatów jest teorią nierozstrzygalną.

W dyskusji nad programem formalistycznym wielką rolę odegrały także, pochodzące z początku lat 30-tych XX w., prace A. Tarskiego dotyczące pojęcia prawdy w językach nauk dedukcyjnych. W pracach tych A. Tarski z jednej strony pokazał możliwość opracowania z całą wymaganą ścisłością zagadnień semantycznych; z drugiej zaś strony wykazał niedefiniowalność podstawowego pojęcia semantycznego – pojęcia prawdy w językach bogatszych teorii dedukcyjnych, wskazując w ten sposób (wbrew twierdzeniom formalistów) na priorytet semantyki w stosunku do syntaksy. Wyniki te doprowadziły do upadku programu formalistycznego w sformułowaniu Hilberta; okazało się, że nie sposób prostymi, postulowanymi przez Hilberta metodami wykonać programu formalistycznego. Doprowadziło to do zarzucenia oryginalnego programu Hilberta, trwają jednak do dzisiaj prace nad wykonaniem fragmentów tego programu. Nadal poszukuje się (nieabsolutnych) dowodów niesprzeczności, wykazano np. że arytmetyka klasyczna jest niesprzeczna, o ile niesprzeczna jest arytmetyka intuicjonistyczna. G. Gentzen podał dowód niesprzeczności arytmetyki klasycznej stosując w dowodzie mocniejszą od przyjmowanej w arytmetyce zasady indukcji matematycznej, tzw. zasadę indukcji pozaskończonej. Prowadzi się też nadal intensywne badania nad rozstrzygalnością poszczególnych teorii matematycznych; badania te w sposób istotny związane są z badaniami w zakresie teorii *funkcji rekurencyjnych. Formalizm zrodził i doprowadził do rozkwitu tzw. teorię dowodu. Formalizm wywarł wielki wpływ na wiele stanowisk w podstawach matematyki. We współczesnej filozofii matematyki najbliższą formalizmu jest orientacja metamatematyczna. Wiele z formalizmu przejęli także kontynuatorzy stanowiska logicystycznego – przedstawiciele orientacji teoriomnogościowej w podstawach matematyki.

P. J. Cohen: *Comments on the foundations of set theory*. [W:] *Proc. of symp. in pure math*. Vol. 13 1971 part I; H. Curry: *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. 1951; G. Kreisel: *Hilbert's Programme*. „Dialectica" XII 1958; – – *What have we learnt from Hilbert's second problem*. [W:] *Proc. of symp. in pure math*. Vol. 28 1976; G. Kreisel, J. L. Krivine: *Elements of mathematical logic*. 1967. Append. II: Foundations of mathematics. Part B: Combinatorial foundations; H. Mehlberg: *The present situation in the philosophy of mathematics*. [W:] *Logic and language*. 1962; J. v. Neumann: *Die formalistische Grundlegung der Mathematik*. „Erkenntnis" II 1931; A. Robinson: *Formalism* 1964. [W:] *Logic, methodology and philosophy of science*. Ed. Y. Bar-Hillel. 1965; C. Smoryński: *The incompleteness theorems*. [W:] *Handbook of mathematical logic*. 1977.

J. P.

formuła.
(1) Wyrażenie zawierające *zmienne wolne. Jeśli dana formuła po podstawieniu stałych za wszystkie zmienne przechodzi w zdanie, nazywa się formułą zdaniową; jeśli zaś w wyniku operacji podstawiania przechodzi w nazwę, nazywa się formułą nazwową. Niekiedy zamiast słowa „formuła" używa się słów „funkcja" lub „funkcja wyrażeniowa", ale taki sposób mówienia zaciera różnicę między wyrażeniem, jakim jest formuła, a opisywanym przez nią przedmiotem, jakim jest funkcja. W celu zdania sprawy z powyższej różnicy w niektórych systemach logiki wprowadza się tzw. λ-operator (*Lambda-operator).
(2) W szerszym znaczeniu, słowem „formuła" obejmuje się wszystkie wyrażenia zawierające zmienne, także te, które nie zawierają zmiennych wolnych, a jedynie zmienne związane (por. np. Hilbert i Bernays *Grundlagen*. T. 1, § 4).

Church: *Math. log.*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*.

W. M.

formuła atomiczna (f. atomowa). Formuła, której żadna część nie jest formułą. Formuła atomiczna składa się z n zmiennych oraz wyrażenia symbolizującego predykat n-argumentowy, np.: $P(x)$, $R(x, y)$ itd. Po podstawieniu za zmienne formuła atomiczna przechodzi w *zdanie atomowe.

Grzegorczyk: *Log. mat.*; Quine: *ML*.

W. M.

Frege Gottlob Friedrich Ludwig (1848–1925; Niemcy). Docent matematyki (1879–1896), następnie profesor nadzwyczajny (1896–1918) uniw. w Jenie.
Frege należy do twórców współczesnej *logiki formalnej. Jest także autorem programu ugruntowania matematyki w logice zwanego *logicyzmem. Istotnym krokiem w realizacji tego programu była definicja *liczby kardynalnej (*Teoria mocy). Idee semantyczne Fregego, związane z konstrukcją języka logiki, pozostają aktualne do dziś, kontynuowane przede wszystkim przez Churcha (*Znaczenie, *Intensjonalność, *Asercja). Pod koniec życia Frege odstąpił od programu logicyzmu; prawdy matematyczne traktował nie jako *zdania analityczne, lecz jako syntetyczne *a priori, zaś podstawową naukę matematyczną upatrywał w geometrii.
Do najbardziej znanych dzieł Fregego należą: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachbildete Formelsprache des reinen Denkens* 1879; *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* 1884; *Funktion und Begriff* 1891; *Über Sinn und Bedeutung*. „Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik" vol. 100 (1892); *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* 2 tomy 1893–1903.

W. M

funkcja. Szczególnego rodzaju relacja, zachodząca między elementami dwóch zbiorów (niekoniecznie różnych); mianowicie funkcją określoną na elementach zbioru X i o wartościach ze zbioru Y nazywamy każdą *relację jednoznaczną, której dziedzinę stanowi zbiór X, a przeciwdziedzina jest zawarta w zbiorze Y. Np. relacja zachodząca między liczbami x i y wtedy i tylko, gdy $y = x^2$, jest funkcją określoną na elementach zbioru liczb rzeczywistych i o wartościach należących również do tego zbioru; relacja, która zachodzi między osobami x i y wtedy i tylko, gdy y jest matką x, jest funkcją określoną na elementach zbioru ludzi i o wartościach należących do zbioru kobiet.
O funkcji określonej na elementach zbioru X i o wartościach należących do zbioru Y mówimy, że przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru X pewien (dokładnie jeden, zgodnie z definicją relacji jednoznacznej) element zbioru Y, lub że przekształca (odwzorowuje) zbiór X w zbiór Y. Np. funkcja $y = 2x$ odwzorowuje zbiór liczb całkowitych w zbiór liczb parzystych.
Podane wyżej przykłady funkcji są tzw. funkcjami jednoargumentowymi. Funkcją dwuargumentową jest np. relacja zachodząca między *parą uprządkowaną liczb $\langle x, z\rangle$ i liczbą y wtedy i tylko, gdy $y = x+z$. Ogólnie: funkcją n-argumentową ($n > 1$) jest każda relacja jednoznaczna, której dziedziną jest zbiór n-tek uporządkowanych (n-elementowych ciągów przedmiotów, zwanych argumentami tej funkcji). Utożsamiając ciąg jednoelementowy z jego jedynym elementem obejmujemy tą definicją także funkcje jednoargumentowe.
Pojęcie funkcji, którym w matematyce posługiwano się od kilku stuleci, podlegało długotrwałemu procesowi precyzacji; koncepcja funkcji jako szczególnego rodzaju relacji, pochodząca od G. Peano, jest ostatnim stadium tego procesu.
Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

funkcja deskryptywna. *Deskrypcja postaci $(\eta y)R(y, b)$, gdzie R jest symbolem określonej relacji, zaś b jakąś stałą indywiduową; np.: jedyny taki y, który jest ojcem Aleksandra Wielkiego (R – jest ojcem, b – Aleksandrem W.). Deskrypcje rozważane przykładowo w haśle Deskrypcja nie są funkcjami deskryptywnymi, ponieważ występujące w nich predykaty należą do jednoargumentowych, czyli nierelatywnych. Słowo „funkcja" bywa rozumiane w ten sposób, że oznacza bądź *relację jednoznaczną, bądź formułę opisującą taką relację. Połączone z przymiotnikiem „deskryptywna" ma tylko drugie z tych znaczeń, odnoszące się wyłącznie do formuł. Przymiotnik ten zwykle się opuszcza, a używa się go tylko tam, gdzie nawiązuje się do pojęcia deskrypcji, definiując np. przy jego pomocy pojęcie *funkcji.
Notacja. Jako skrótu dla $(\eta y)R(y, b)$ używa się często

napisu z apostrofem: $R'b$ (*Principia*, Carnap i in.). Ponieważ $R'b$ jest to ten jedyny y, który pozostaje w stosunku R do b, $R'b = (\eta y)R(y, b)$ można przepisać jako: $y = R'b$. Jeśli zamiast symbolu relacji umieści się np. literę f, zaś w miejscu stałej b wpisze się zmienną, np. x, otrzyma się dobrze znany zapis formuły funkcyjnej: $y = f(x)$. W terminologii angielskiej obok terminu „descriptive function" istnieje równoznaczny z nim zwrot „relational description".

Carnap: *Symb. log.*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; *Principia*; Reichenbach: *Elements*.

W. M.

funkcja prawdziwościowa. *funkcja zdaniowa, utworzona ze zmiennych zdaniowych oraz *funktorów prawdziwościowych, czyli ekstensjonalnych.

W. M.

funkcja propozycjonalna. *Funkcja zdaniowa, mająca jako swe argumenty wyrażenia nazwowe.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

funkcja semiotyczna. Stosunek wyrażenia bądź 1° do jakichś elementów rzeczywistości pozajęzykowej (indywidua, cechy, klasy, relacje), bądź 2° do osób posługujących się danym wyrażeniem, bądź 3° do innych wyrażeń języka. W przypadku 1° jest to funkcja semantyczna, jak: *oznaczanie, *konotowanie, denotowanie i in. W przypadku 2° funkcja pragmatyczna: *wyrażanie, komunikowanie, rozumienie, *uznawanie i in. W przypadku 3° funkcja syntaktyczna: *wynikanie zdań ze zdań, *reprezentowanie wyrażeń stałych przez zmienne, i in. Zob. też **semiotyka.**

W. M.

funkcja zdaniowa (formuła zdaniowa). Wyrażenie zawierające zmienne wolne, które w wyniku podstawienia za zmienne lub związania ich kwantyfikatorami przechodzi w zdanie. Zmienne występujące w funkcji zdaniowej mogą być zdaniowe, jak w formule $p \vee \sim p$, lub nazwowe, jak w formule $x = y$, lub jeszcze inne. Formuła ze zmiennymi przechodzi w zdanie (prawdziwe lub fałszywe) bądź w wyniku podstawienia (tak $x = y$ przechodzi np. w $5 = {}^{10}/_{2}$), bądź w wyniku poprzedzenia jej kwantyfikatorami obejmującymi swym zasięgiem każdą ze zmiennych. np. $\vee x \vee y(x = y)$.

W. M

funkcje rekurencyjne. Badania nad *rozstrzygalnością i *zupełnością teorii aksjomatycznych prowadzone są za pomocą aparatu funkcji rekurencyjnych, czyli obliczalnych. Funkcje te określone są na zbiorze liczb naturalnych i przyjmują wartości będące liczbami naturalnymi.

definicja: Klasa funkcji obliczalnych **obl** jest to najmniejsza klasa **K** spełniająca następujące warunki (innymi słowy, część wspólna wszystkich klas **K** spełniających te warunki):

1° do klasy **K** należą funkcje $0(x) = 0$, tj. funkcja przyjmująca wartość zero dla wszystkich liczb naturalnych, $S(x) = x+1$, tj. funkcja przyporządkowująca liczbie x jej następnik, $U_k(x_1, ..., x_k, ..., x_m) = x_k$, tj. funkcje równe swemu k-temu argumentowi:

2° klasa **K** jest zamknięta ze względu na superpozycję, tj. jeśli funkcje $f(x_0, ..., x_n)$, $g(x_0, ..., x_n)$ należą do klasy **K**, to także funkcja $h(x_0, ..., x_{m-1}, x_{m+1}, ..., x_k, y_0, ..., y_n)$ zdefiniowana wzorem

$$h(x_0, ..., x_{m-1}, x_{m+1}, ..., x_k, y_0, ..., y_n) = f(x_0, ..., x_{m-1}, g(y_0, ..., y_n), x_{m+1}, ..., x_k)$$

należy do klasy **K**;

3° klasa **K** jest zamknięta ze względu na utożsamianie oraz permutacje zmiennych, tj. jeśli funkcja $f(x_0, ..., x_k)$ należy do klasy **K**, to funkcje $g(x_0, ..., x_{k-1})$ oraz $h(x_0, ..., x_k)$ określone wzorami

$$g(x_0, ..., x_{k-1}) = f(x_0, ..., x_{k-1}, x_0),$$
$$h(x_0, ..., x_i, ..., x_m, ..., x_k) = f(x_0, ..., x_m, ..., x_i, ..., x_k)$$

należą do klasy **K**;

4° jeśli funkcje $f(x, x_0, ..., x_n)$ oraz $g(x, y, z, x_0, ..., x_n)$ należą do klasy **K**, to funkcja $h(t, x, x_0, ..., x_n)$ zdefiniowana jak następuje

$$h(0, x, x_0, ..., x_n) = f(x, x_0, ..., x_n),$$
$$h(S(n), x, x_0, ..., x_n) = g(x, n, h(n, x, x_0, ..., x_n)x_0, ..., x_n)$$

należy do klasy **K**;

5° jeśli funkcja $f(u, x, x_0, ..., x_n)$ należy do klasy **K** i spełnia warunek efektywności:

$$\wedge x_0 ... x_n \wedge u \vee x f(u, x, x_0, ..., x_n) = 0,$$

to funkcja $h(u, x_0, ..., x_n)$ zdefiniowana za pomocą operacji minimum

$$h(u, x_0, ..., x_n) = \mu x[f(u, x, x_0, ..., x_n) = 0]$$ należy do klasy **K**.

Tu $\mu x \Phi(x)$ oznacza: najmniejsza liczba naturalna x taka, że $\Phi(x)$ lub 0, o ile nie ma takiej liczby. Metoda definiowana opisana w punkcie 4° nazywa się rekursją prostą. Oprócz klasy funkcji obliczalnych (zwanej też czasem ogólnie rekurencyjnymi lub krótko: rekurencyjnymi) **Obl** rozważa się też węższe lub szersze klasy funkcji. Wprowadza się w tym celu pewne inne operacje, np. operację minimum ograniczonego albo ograniczenia na rozważane funkcje. Najczęściej rozważaną podklasą klasy **Obl** jest klasa **Prek** funkcji pierwotnie rekurencyjnych. Jest to klasa zdefiniowana podobnie jak klasa **Obl** z tym, że w definicji opuszczamy punkt 5°.

Relację $R(x_0, ..., x_n)$ (pomiędzy liczbami naturalnymi) na-

zywamy obliczalną (pierwotnie rekurencyjną), jeśli jej funkcja charakterystyczna $f(x_0, ..., x_n)$ określona wzorem:

$$f(x_0, ..., x_n) = 0 \text{ jeśli } R(x_0, ..., x_n)$$

oraz

$$f(x_0, ..., x_n) = 1 \text{ jeśli } \sim R(x_0, ..., x_n)$$

jest obliczalna (odpowiednio pierwotnie rekurencyjna). Ponieważ podzbiór zbioru liczb naturalnych możemy traktować jako relację jednoargumentową określoną na zbiorze liczb naturalnych, otrzymujemy w ten sposób definicje zbiorów obliczalnych oraz pierwotnie rekurencyjnych.

Relację $P(x_0, ..., x_n)$ nazywamy rekurencyjnie przeliczalną, jeśli jest ona rzutem relacji obliczalnej tzn. istnieje relacja obliczalna $R(x_0, ..., x_n, y)$ taka, że

$$P(x_0, ..., x_n) \equiv \vee\, yR(x_0, ..., x_n, y).$$

Podobnie definiujemy klasę **RP** zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych.

Klasa **RP** zawiera oczywiście klasę zbiorów obliczalnych. Jeśli zbiór X należy do klasy **RP** oraz jego uzupełnienie $N-X$ należy do tej klasy, to zbiór X jest obliczalny. Każdy zbiór rekurencyjnie przeliczalny niepusty może być przedstawiony jako zbiór wartości funkcji pierwotnie rekurencyjnej.

Wprowadzona przez K. Gödla metoda arytmetyzacji języka, tzn. reprezentacji formuł języka *rachunku kwantyfikatorów w arytmetyce liczb naturalnych, umożliwiła następującą definicję rozstrzygalności: Teoria T jest rozstrzygalna, jeśli zbiór *numerów Gödla jej twierdzeń jest obliczalny. Okazuje się, że zbiór numerów twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych **Ar** jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest obliczalny, co jest istotą twierdzenia Gödla o nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych. Wszystkie zbiory rekurencyjnie przeliczalne nie będące obliczalnymi są doń rekurencyjnie sprowadzalne, tj. dla każdego zbioru niepustego X należącego do klasy **RP** istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna f_X taka, że $f_X(X) =$ **Ar** w intuicyjnym znaczeniu. Klasa funkcji obliczalnych składa się z wszystkich funkcji, dla których potrafimy wskazać metodę obliczania wartości. Podobnie zbiory obliczalne są to zbiory, których elementy potrafimy wskazać w sposób efektywny. Stąd też zbiory i funkcje obliczalne stanowią najbardziej 'konkretne' twory matematyczne. Klasa funkcji i zbiorów obliczalnych stanowi punkt wyjścia do klasyfikacji wprowadzonej przez Kleenego i Mostowskiego zbiorów liczb naturalnych oraz funkcji określonych na liczbach naturalnych. Hierarchia ta klasyfikuje zbiory i funkcje według ich efektywności, badając ich definicje.

Teoria funkcji rekurencyjnych rozwijana jest także za pomocą odmiennej pozornie aparatury takiej, jak algorytmy Markowa, systemy produkcji Posta, maszyny Turinga etc.

Grzegorczyk: *Log. mat.*; S. C. Kleene: *Introduction into metamathematics.* 1952.

W. M.

funktor. Na gruncie teorii *kategorii semantycznych funktorem nazywa się każde wyrażenie nie będące zdaniem ani nazwą, służące natomiast do konstruowania zdań lub nazw, lub innych (bardziej złożonych) funktorów. Wyrażenie, w którym funktor tworzy nowy, bardziej złożony zwrot nazywa się argumentem owego funktora. Jeśli funktor wraz ze swymi argumentami tworzy zdanie, nazywa się on funktorem zdaniotwórczym; np. słowo „jest" tworzy zdanie, gdy połączy się je z dwoma argumentami nazwowymi: jedna nazwa w roli orzecznika, druga podmiotu (np. „Newton jest fizykiem"). Jeśli funktor tworzy z argumentami nazwę, należy do nazwotwórczych; np. „żołnierz i poeta" jest nazwą złożoną z funktora „i" oraz z dwóch argumentów (nazwowych). Jeśli funktor tworzy ze swymi argumentami wyrażenie będące znowu funktorem, nazywa się go funktorotwórczym; np. w zwrocie „grzeje mocno", stanowiącym funktor zdaniotwórczy (ponieważ tworzy zdanie po dołączeniu doń jakiejś nazwy, np. „słońce"), słowo „mocno" jest funktorem funktorotwórczym.

Uzupełniający do powyższego podział funktorów uwzględnia rodzaj i liczbę argumentów, niezbędnych do tego by funktor tworzył z nimi wyrażenie złożone. Są więc funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu nazwowego („grzeje"), od dwóch argumentów nazwowych („jest") itd. Są funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu zdaniowego („nieprawda że"), od dwóch argumentów nazwowych („i", „lub" etc.). Są funktory nazwotwórcze od jednego lub więcej argumentów nazwowych (np. „i" w roli spójnika międzynazwowego), nazwotwórcze od argumentów zdaniowych (np. „to że" w zwrocie „to, że słońce grzeje"), funktory funktorotwórcze od jednego lub więcej argumentów funktorowych, itd.

Termin „funktor" w powyższym znaczeniu przyjął się, za S. Leśniewskim i T. Kotarbińskim, w piśmiennictwie polskim, a także w nawiązujących do niego pracach w języku ang. (Bar-Hillel). W innych tekstach ang. lub niem. (Carnap, Reichenbach) słowo „funktor" występuje w węższym znaczeniu, które w przybliżeniu odpowiada funktorom nazwotwórczym (ang. name-forming functors) od argumentów nazwowych. Związane jest wówczas z pojęciem *funkcji i w symbolicznym zapisie funkcji $y = f(x)$ figuruje na miejscu symbolu f. Funktorem więc jest zwrot „ojciec" w funkcji $y =$ ojciec $x-$a, znak sumy w formule $y = x+z$ (gdzie $+$ jest funktorem dwuargumentowym) itp.

K. Ajdukiewicz: *O spójności syndaktycznej.* [W:] *JiP.* T. 1; Y. Bar-Hillel:

On syntactical categories. „JSL" XV; Carnap: *Symb. log.*; — — *Syntax*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Kotarbiński: *Elementy*; Reichenbach: *Elements.*

W. M.

funktor ekstensjonalny. *Funktor, który tworzy wraz ze swymi argumentami wyrażenie ekstensjonalne, tj. takie, że denotacja (łac. denotatio lub extensio) całego wyrażenia zależy wyłącznie od denotacji wyrażeń składowych (*Denotacja – (3)). Jeśli wyrażeniem utworzonym przez funktor jest zdanie złożone, a denotacją zdania jest wartość logiczna (prawdziwość lub fałszywość), to funktor jest wówczas ekstensjonalny, gdy wartość logiczna zdania zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań składowych, a nie zależy np. od ich treści. Taki funktor ekstensjonalny nazywa się też prawdziwościowym z racji zależności pomiędzy prawdziwością argumentów a prawdziwością całego zdania złożonego. Funktorami prawdziwościowymi są wszystkie spójniki klasycznego *rachunku zdań, jak symbol negacji, implikacji, koniunkcji etc. Zależność wartości logicznej zdania złożonego od wartości logicznej zdań składowych (argumentów) przedstawia się w tzw. matrycach (tabelach) rachunku zdań.
Zob. też **ekstensjonalność.**

W. M.

funktor intensjonalny. Funktor nie będący ekstensjonalnym, a więc tworzący wyrażenie nie-ekstensjonalne. I tak „myślę, że" należy do funktorów intensjonalnych, bo prawdziwość zdania „Myślę, że teraz pada", nie zależy od prawdziwości argumentu „teraz pada"; może być prawdą, iż myślę, że pada, zarówno wtedy, gdy pada, jak i wtedy, gdy nie pada.
Zob. też **intensjonalność.**

W. M.

G

Gentzen Gerhard (1909–1945). Logik i matematyk niemiecki, którego prace były zorientowane przede wszystkim na realizację programu Hilberta, tj. dostarczenie dowodu niesprzeczności matematyki przez udowodnienie niesprzeczności *arytmetyki liczb naturalnych. Gentzen zmierzał do tego celu przez stworzenie nowych metod dowodowych. Opracowane przez niego metody, *dedukcja naturalna i rachunek sekwencji zostały przedstawione w studium *Untersuchungen über das logische Schliessen* („Mathematische Zeitschrift" 1934–1935). Ta sama praca zawiera szereg innych wyników matematycznych: niesprzeczność klasycznego oraz intuicjonistycznego rachunku kwantyfikatorów, rozstrzygalność intuicjonistycznego rachunku zdań, a w szczególności, będący głównym celem pracy, dowód niesprzeczności sformalizowanej arytmetyki liczb naturalnych bez aksjomatu indukcji. Niesprzeczność arytmetyki z aksjomatem indukcji jest przedmiotem pracy *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, („Mathematische Annalen" 1936), gdzie w dowodzie stosuje się zasadę indukcji pozaskończonej, tj. zasadę *indukcji matematycznej uogólnioną na dowolne zbiory dobrze uporządkowane. Zgodnie więc z drugim *twierdzeniem Gödla, zachodzi konieczność stosowania środków innych niż środki dowodowe mające reprezentację (za pomocą *numerów Gödla) w arytmetyce liczb naturalnych, której niesprzeczności się dowodzi; są to, w tym przypadku, środki należące do teorii mnogości, co jest o tyle naturalne, że teoria mnogości została stworzona m. in. w celu uchronienia matematyki przed sprzecznością. Środki te przy tym nie wykraczają poza repertuar dozwolony przez intuicjonistyczną teorię dowodu, a więc mieszczą się w zliberalizowanym programie Hilberta.

Inne prace Gentzena: *Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik*, „Mathematische Zeitschrift" 1936; *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.* „Forschung" 1938; *Neue Fassung der Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* „Forschung" 1938. Dorobek Gentzena zebrany został w dziele *The collected papers by Gerhard Gentzen*, wydanym przez M. E. Szabo, Amsterdam 1969.

W. M.

genus proximum (łac.; najbliższy rodzaj). Klasa nadrzędna względem jakiejś innej rozważanej klasy, zwanej wówczas gatunkiem (łac. species). Np. klasa zwierząt stanowi rodzaj w stosunku do klasy ludzi. Nie zawsze jest to rodzaj dosłownie najbliższy, tzn. najmniejszy zbiór zawierający rozważany gatunek. W stosunku do gatunku ludzi bliższym jeszcze rodzajem niż klasa zwierząt byłaby np. klasa ssaków. Chodzi raczej o taki najbliższy rodzaj, który jest ważny ze względu na zamierzoną definicję pojęcia gatunkowego.

Zob. też **definicja klasyczna.**

W. M.

Gödel Kurt (1906–1978). Ur. w Brnie, w Czechosłowacji. Studia matematyczne odbywał w Wiedniu. Docent prywatny uniw. w Wiedniu (1933–1938); profesor w Institute for Advanced Study w Princeton od 1941 i członek rzeczywisty tejże instytucji od 1946.

Gödel jest autorem wielu szczególnie doniosłych twierdzeń dotyczących matematyki i logiki, a także autorem pewnego ujęcia teorii mnogości (*Teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla). Do najbardziej znanych wyników matematycznych Gödla należą: twierdzenie o niepełności bogatszych systemów dedukcyjnych wraz z twierdzeniem, że nie jest możliwy dowód niesprzeczności tego rodzaju systemów za pomocą środków tych systemów. (*Twierdzenie Gödla); metoda zwana *arytmetyzacją składni; twierdzenie o pełności *rachunku kwantyfikatorów pierwszego rzędu. Inne rezultaty odnoszą się do intuicjonistycznego rachunku zdań, *pewnika wyboru, *hipotezy continuum.

Wyniki te zawarte są m. in. w pracach: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* „MMP" vol 37 (1930); *Über formal unentscheibare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I. „MMP" vol 38 (1931); *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.* „Ergebnisse math. Koll." IV 1933; *The consistency o the axiom of choice and of generalized continuum hypothesis. With the axioms of set theory.* „Annals of Mathematical Studies" 3. Princeton 1940 (wznow. 1951).

W. M.

H

Hilbert David (1862–1943). Ur. w Królewcu. Studiował w Heidelbergu, Królewcu, Lipsku i Paryżu. Docent prywatny od 1866; profesor matematyki w Królewcu (od 1892), następnie w Getyndze (od 1895).

Szkoła matematyczna, którą Hilbert stworzył w Getyndze, była jednym z głównych światowych ośrodków matematyki do lat trzydziestych (schyłek nastąpił w wyniku zdarzeń politycznych w ówczesnych Niemczech). Hilbert wywarł wielki wpływ na rozwój matematyki na różnych polach: algebry, teorii liczb, geometrii, równań całkowych, rachunku wariacyjnego, fizyki teoretycznej, logiki. W związku z badaniami logicznymi zajął też ważną pozycję w filozofii matematyki, tj. dyscyplinie, w której rozważa się, jako tematy podstawowe, naturę poznania matematycznego i sposób istnienia przedmiotów matematycznych (różnymi stanowiskami w filozofii matematyki są: *intuicjonizm, *logicyzm, *nominalizm i in.). Szkoła Hilberta jest określeniem dla kręgu autorów, którzy wspólnie z Hilbertem pracowali nad podstawami matematyki, tj. badaniami powiązanymi blisko z filozofią matematyki i logiką, których celem jest maksymalne sprecyzowanie podstawowych pojęć i metod matematycznych (liczba, zbiór, zbiór nieskończony, continuum, dowód, definicja etc.) robione, w szczególności, z myślą o uchronieniu matematyki przed *antynomiami, a więc przed sprzecznością. Ukształtowany w tej szkole kierunek badań jest określany jako Program Hilberta.

Pierwszą zapowiedzią tego programu było sformułowanie w roku 1900, na kongresie matematyków w Paryżu, wśród 23 problemów, które postawił Hilbert przed matematykami XX wieku, problemu udowodnienia niesprzeczności arytmetyki (drugi problem Hilberta). Rok wcześniej ukazało się dzieło Hilberta *Grundlagen der Geometrie* zawierające dowód niesprzeczności geometrii przez odwzorowanie jej w arytmetyce liczb rzeczywistych; a więc dowód niesprzeczności arytmetyki gwarantowałby też niesprzeczność geometrii; dzieło to dostarczyło zarazem metodologicznego wzorca aksjomatyzacji.

Pełniejsze sformułowanie programu nastąpiło w 1904 w odczycie *Über die Grundlagen der Logik und Mathematik* na kongresie matematyków w Heidelbergu, a intensywniejsze prace nad jego realizacją datują się od 1917. Kolejne sprecyzowania zawarte są m. in. w *Die logische Grundlagen der Mathematik* („Math. Annalen " 1923) i w *Über das Unendliche* („Math. Annalen" 1926). Pierwsze dowody niesprzeczności arytmetyki bez aksjomatu indukcji podali W. Ackermann („Math. Annalen" 1925) i J. von Neumann („Math. Zeitschrift" 1927). Artykuł von Neumanna *Zur Hilbertschen Beweistheorie* posługuje się w tytule określeniem teoria dowodu, które przyjęło się jako nazwa teorii mającej być realizacją programu Hilberta, zwanej też metamatematyką (w węższym niż obecnie rozumieniu tego słowa). Główną ideę tej teorii wyjaśnia von Neumann następująco, ujmując zarazem jej stosunek do *intuicjonizmu Brouwera. Odróżnia się dowody w samej matematyce, które poddają się formalizacji (za pomocą klasycznego *rachunku kwantyfikatorów) od intuicyjnych dowodów metamatematycznych (tj. o matematyce), stawiając tym drugim pewne ograniczające warunki biorące się z postulatu zgodności z intuicją, które to warunki wysuwa także program Brouwera. Gdyby na tej intuicjonistycznej podstawie dało się ugruntować matematykę klasyczną, a więc bogatszą od tej, którą dopuszcza intuicjonizm, wykazałoby to bezzasadność ograniczeń intuicjonistycznych dotyczących samej matematyki. Przyjąwszy natomiast ograniczenia intuicjonistyczne w teorii dowodu, stał się Hilbert na równi z Brouwerem twórcą metod dowodowych charakterystycznych dla tego kierunku, który w wersji Hilbertowskiej został nazwany finityzmem – od terminów „das finite Schliessen" i „der finite Standpunkt". U samego Hilberta nie znajdujemy pełnej kodyfikacji postulatów finityzmu. Idąc za charakterystyką podaną przez J. Herbranda w *Sur la non-contradiction de l'arithmetique* („Journal f. Reine u. Angewandte Math." 1932), można wymienić (przykładowo) takie elementy finityzmu, jak postulat, żeby nie rozważać zbiorów przedmiotów z jakiejś nieskończonej (aktualnie) całości, żeby nie stwierdzać istnienia przedmiotu bez wskazania metody jego konstrukcji, żeby nie posługiwać się prawem wyłączonego środka, itp. Co się tyczy terminu „formalizm" stosowanego czasem na określenie stanowiska Hilberta, to ma on podstawy w terminie „formale Axiomatik", używanego w przeciwstawieniu do „inhaltliche Axiomatik" w takim kontekście, że aksjomatyka formalna, tj. abstrahująca od intuicyjnej treści pojęć występujących w aksjomatach, ma cechować teorie poddawane badaniom metamatematycznym; błędne jest jednak pojawiające się czasem w rozważaniach o Hilbercie utożsamianie tak pojętego formalizmu z nominalizmem.

Środki dowodowe potrzebne do realizacji programu Hilberta zostały częściowo przedstawione w *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928, wspólnie z W. Ackermannem), a w sposób pełny w *Grundlagen der Mathematik* (t. 1 1934, t. 2 1939, wspólnie z P. Bernaysem). W *Grundlagen* są też zreferowane (w t. 2) *twierdzenia Gödla wykazujące nie-

uniknione ograniczenia, na które musi napotykać realizacja programu Hilberta, a także zliberalizowana wersja teorii dowodu (nadal jednak utrzymana w granicach wymagań intuicjonistycznych), przy której okazał się możliwy dowód niesprzeczności całej arytmetyki liczb naturalnych, tj. łącznie z aksjomatem indukcji (*Gentzen).

Cennym i obszernym źródłem danych o Hilbercie i jego dorobku jest artykuł P. Bernaysa pt. *Hilbert w The encyclopedia of philosophy* 1967, wyd. przez P. Edwardsa.

W. M.

hipoteza.

(1) Zdanie nie poddane wystarczającemu sprawdzeniu, przyjęte prowizorycznie.

(2) Zdanie empiryczne zawierające przynajmniej jeden termin nie obserwacyjny, czyli teoretyczny.

(3) Wszelkie zdanie empiryczne nie będące spostrzeżeniowym.

Rozumienie (1), częste w praktyce naukowej, pozwala odróżnić twierdzenia, które – na danym etapie wiedzy – nie podlegają dyskusji od twierdzeń przyjętych na próbę, jako tzw. hipotezy robocze. Taka hipotetyczność nie jest własnością syntaktyczną ani semantyczną zdania, lecz stosunkiem badaczy do danego zdania, a więc własnością pragmatyczną. W miarę rozwoju wiedzy zdanie takie może przestać być hipotezą bądź dlatego, że zostanie obalone, bądź dlatego, że zostanie na tyle potwierdzone, aby stać się bezdyskusyjne, uzyskując rangę prawa lub zasady. „Kiedy zaczynamy hipotezę brać na serio, nazywamy ją zasadą" (Frank s. 23).

Określenie (2) wyraża myśl, że hipoteza: 1° dotyczy czegoś, co nie jest bezpośrednio obserwowalne; 2° pozwala wyjaśnić rezultaty pewnych obserwacji. Terminy teoretyczne bowiem służą do konstruowania twierdzeń służących do wyjaśniania zjawisk obserwowalnych. Nie wszystkie zdania wyjaśniające są hipotezami w sensie (2). Istnieją uogólnienia (a więc zdania pozostające w stosunku tłumaczenia do pewnych zdań obserwacyjnych), które nie zawierają terminów teoretycznych, np. zdanie „Wszystkie kruki są czarne". Terminy „kruk" i „czarny" wolno zaliczyć do obserwacyjnych, ponieważ mogą wystąpić w atomowych zdaniach spostrzeżeniowych: „To jest kruk", „To jest czarne." Zdanie „Wszystkie kruki są czarne" nie jest więc hipotezą (2). Jest natomiast hipotezą w sensie (3), ponieważ będąc empiryczne, nie jest spostrzeżeniowe. Spostrzeżeniowe nie jest zaś dlatego, że odnosi się do całego zbioru (kruków), który nie jest nigdy dany w obserwacji, choć elementy tego zbioru są obserwowalne.

Klasa hipotez (2) zawiera się w klasie hipotez (3) jako nadrzędnej zakresowo. Klasa (1) znajduje się w stosunku krzyżowania względem pozostałych.

Ph. Frank: *Philosophy of science.* 1957; J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia.* 1964; Kotarbiński: *Elementy*; Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

hipoteza continuum. G. Cantor sformułował zagadnienie continuum: czy $\mathfrak{c}$ – moc zbioru liczb rzeczywistych jest równa liczbie kardynalnej $\aleph_1$, tj. mocy typu porządkowego ω_1, który z kolei jest najmniejszą liczbą porządkową spośród tych, których moc jest większa od $\aleph_0$. Pozytywna odpowiedź na to zagadnienie nazwana została hipotezą continuum. Hipotezę tę można po prostu wypowiedzieć następująco: moc zbioru liczb rzeczywistych jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od $\aleph_0$ – czyli od mocy zbioru liczb naturalnych. Ponieważ $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, hipotezie continuum równoważne jest przypuszczenie, że nie istnieje żadna liczba kardynalna zawarta między liczbami $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$, różna od $\aleph_0$ oraz od $2^{\aleph_0}$.

Uogólniona hipoteza continuum głosi, że dla dowolnej pozaskończonej liczby kardynalnej α (tj. większej lub równej od $\aleph_0$) nie istnieje liczba kardynalna β taka, że $\alpha < \beta < 2^{\alpha}$. Uogólniona hipoteza continuum pociąga za sobą *pewnik wyboru. Hipoteza continuum okazała się niezależna od aksjomatyki teorii mnogości.

Zob. też **teoria zbiorów uporządkowanych.**

P. J. Cohen: *Set theory and the continuum hypothesis.* 1966; K. Gödel: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory.* 1940; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości.* 1966; W. Marek: *Niezależność hipotezy kontinuum a poglądy filozoficzne w podstawach matematyki.* „St. Filoz." 1967, nr 3; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

K. Cz.

homomorfizm relacji. Pojęcie homomorfizmu relacji jest uogólnieniem pojęcia *izomorfizmu relacji. Relacja R ustala homomorfizm relacji S i T (odwzorowuje homomorficznie relację S na relacji T) wtedy i tylko, gdy spełnione są następujące warunki: 1^0 R jest *relacją jednoznaczną, 2^0 *pole relacji S zawiera się w *dziedzinie relacji R, 3^0 pole relacji T zawiera się w *przeciwdziedzinie relacji R oraz 4° jeżeli R zachodzi między x_1 i x_2 oraz między y_1 i y_2, to S zachodzi między x_1 i y_1 wtedy i tylko, gdy T zachodzi między x_2 i y_2. Jeżeli istnieje relacja odwzorowująca homomorficznie relację S na relacji T, to mówimy, że S jest homomorficzna z T. Przykład: relacja przyporządkowująca poszczególnym ludziom liczby przeżytych przez nich lat odwzorowuje homomorficznie relację starszeństwa między ludźmi na relacji większości między liczbami (ograniczonej do pewnego ich podzbioru); starszeństwo między ludźmi jest więc homomorficzne z relacją większości zachodzącą między liczbami.

B. S.

Husserl Edmund (1859–1938; Niemcy). Studiował filozofię pod kierunkiem F. Brentana na uniw. wiedeńskim do 1886. Docent filozofii uniw. w Halle (1887–1901); profesor filozofii uniw. w Getyndze (1901–1916) i we Fryburgu Badeńskim (1916–1928). Ukończył również studia matematyczne i był asystentem słynnego matematyka K. T. Weierstrassa. Potem jednak poświęcił się wyłącznie filo-

zofii, stając się główną postacią w ruchu fenomenologicznym.

Wkładem Husserla do semantyki logicznej jest idea *kategorii semantycznych (rozwijana przez Leśniewskiego i Ajdukiewicza), teoria *znaczenia związana z pojęcier *intencjonalności, pewna koncepcja *wyrażeń okazjonalnych i in. Na polu filozofii matematyki i logiki Husserl podjął polemikę z *psychologizmem, cechującym wiele prac logicznych w XIX w. Zagadnienia te rozważane są w *Logische Untersuchungen* (1900–1901).

W. M.

identyczność (tożsamość). *Relacja dwuczłonowa oznaczana zwykle symbolem „=”), która zachodzi między każdym przedmiotem a nim samym, i nigdy nie zachodzi między dwoma różnymi przedmiotami. Pierwsza definicja identyczności pochodzi od Leibniza i znana jest jako zasada identyczności przedmiotów nieodróżnialnych (*Principium identitatis indiscernibilium). W myśl tej definicji dwa przedmioty są identyczne zawsze i tylko, gdy każda własność przysługująca pierwszemu z nich przysługuje też drugiemu, i odwrotnie. W symbolice teorii mnogości (w której pojęciu własności odpowiada pojęcie zbioru) definicję tę zapisujemy w postaci: $x = y \equiv \wedge X(x \in X \equiv y \in X)$. Identyczność jest *relacją równoważnościową. Każdy przedmiot jest bowiem identyczny z samym sobą; jeżeli x jest identyczne z y, to y jest identyczne z x; nadto — każde dwa przedmioty identyczne z trzecim są identyczne między sobą.

B. S.

ignoratio elenchi (łac.; nieznajomość tezy dowodzonej). Błąd popełniany w dowodzeniu, polegający na tym, że dowodzi się czego innego niż to ma być udowodnione. Przykładem takiego błędu jest obrona oskarżonego przez wykazywanie, że oskarżyciel również nie jest człowiekiem nieposzlakowanym.

T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1959; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

ignotum per ignotum (łac.; nieznane przez nieznane). Błąd w definiowaniu popełniany wtedy, gdy wyraz niezrozumiały chce się uczynić zrozumiałym za pomocą definicji, w której występują wyrażenia również niezrozumiałe. Taki błąd popełniono, np. w definicji alternatywy: „Alternatywa jest to funktor dwuargumentowy od argumentów zdaniowych...”, jeżeli niezrozumiały jest nie tylko termin definiowany „alternatywa”, ale również i terminy użyte do zdefiniowania tamtego, np. „funktor dwuargumentowy” albo „argument zdaniowy”.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; — — *Zarys logiki*; Kotarbiński: *Kurs logiki.*

M. P.

iloczyn kartezjański zbiorów (produkt zbiorów). Iloczynem kartezjańskim zbiorów X, Y nazywamy zbiór wszystkich *par uporządkowanych, których pierwsze elementy należą do zbioru X, drugie zaś — do zbioru Y. Oznaczając iloczyn kartezjański zbiorów X, Y symbolem $X \times Y$ zapisujemy tę definicję w postaci: $\langle x, y \rangle \in X \times Y \equiv \equiv x \in X \wedge y \in Y$. Analogicznie, iloczynem kartezjańskim trzech zbiorów X, Y, Z jest zbiór $X \times Y \times Z$ uporządkowanych trójek, których pierwsze elementy należą do X, drugie do Y, trzecie do Z. Ogólnie, iloczynem kartezjańskim n zbiorów $X_1, X_2, ..., X_n$ jest zbiór takich n-tek uporządkowanych $\langle x_1, x_2, ... x_n \rangle$, że $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$. Iloczyn kartezjański $X \times X$ nazywamy kwadratem zbioru X i oznaczamy symbolem X^2.

B. S.

iloczyn względny relacji (złożenie relacji, superpozycja relacji). Iloczynem względnym relacji R, S nazywamy relację, która zachodzi między przedmiotami x i y zawsze i tylko, gdy istnieje taki przedmiot z, że między x i z zachodzi relacja R, zaś między z i y zachodzi relacja S. Oznaczając iloczyn względny relacji R, S symbolem $R; S$ zapisujemy tę definicję w postaci: $xR; Sy = \vee z(xRz \wedge zSy)$. Przykład: iloczynem względnym relacji bycia synem i relacji bycia dzieckiem jest relacja bycia wnukiem, bowiem x jest wnukiem y wtedy i tylko, gdy istnieje taka osoba z, że x jest synem z a z jest dzieckiem (synem lub córką) y.
Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

imię własne.
(1) N jest imieniem własnym, gdy N pełni funkcję nazywania lub wskazywania jakiegoś indywiduum, w celu wyróżnienia go spośród innych. Imię własne nie konotuje i nie denotuje (w sensie: nie posiada zakresu, czyli *denotacji — (1)). Imionami własnymi są *wyrażenia okazjonalne, jak np. zaimki wskazujące „ten”, „to”, „tamto” oraz takie wyrażenia, jak „Jan”, „Wiśniewski”, „Platon”, o ile stosuje się je do jednej tylko osoby i nie wiąże się z nimi żadnej treści. Jest to najczęściej spotykana w logice koncepcja imion własnych (Mill, Russell, Dąmbska i in.). Tak pojęte imiona własne pokrywają się zakresowo z klasą wyrażeń określaną jako *nazwy indywidualne.
(2) N jest imieniem własnym, gdy spełnia warunki wymienione pod (1), nie będąc jednak wyrażeniem okazjonalnym, od którego tym się różni, że jest bardziej trwale przyporządkowane określonej rzeczy lub osobie (Czeżowski).
(3) N jest imieniem własnym, gdy jest nazwą konotującą cechę posiadania imienia tak właśnie brzmiącego, jak N. Np. „Kowalski” konotuje cechę posiadania nazwiska o brzmieniu „Kowalski”. Tym samym imię własne posiada zakres złożony z przedmiotów o powyższej własności. Do

tak pojętych imion własnych nie należą więc wyrażenia okazjonalne. Wśród logików taką koncepcję imion własnych sformułował S. Leśniewski.

Oprócz tych różnic terminologicznych zachodzą w kwestii imion własnych różnice merytoryczne, dotyczące ich funkcji semantycznych i syntaktycznych, ich stosunku do *deskrypcji, możliwości wyeliminowania ich z języka. Czy imię własne, w trakcie używania, nie nabiera znaczenia przez powiązanie z cechami osoby lub rzeczy nazywanej? Czy nadaje się ono tylko na podmiot, czy też i na orzecznik zdania? Czy nie można by zastąpić wszystkich imion własnych deskrypcjami? Czy istnieje ostra granica między zbiorem imion własnych i zbiorem deskrypcji, skoro pewne imiona własne zastępuje się deskrypcjami, pewne mają w swej etymologii jakąś deskrypcję (np. „Nowy Targ", „Poznań" – w sensie „Gród Poznana") itd.? Brak wyraźnej linii demarkacyjnej między wyrażeniami uważanymi za imiona własne, a innymi rodzajami wyrażeń (np. deskrypcjami) skłania do poglądu, że cecha bycia imieniem własnym jest stopniowalna i że to samo wyrażenie raz może funkcjonować jako imię własne, innym zaś razem jako deskrypcja (Pelc).

A. J. Ayer: *Imiona własne a deskrypcje* (przekł. z ang.). „St. Filoz." 1960 nr 5; Church: *Math. log.*; T. Czeżowski: *Nazwy okazjonalne oraz imiona własne.* [W:] – – *Odczyty filozoficzne.* 1958 (także w *Sem. pol.*); I. Dąmbska: *Z filozofii imion własnych.* „Kwart. Filoz." XVIII 1949 z. 3–4 (także w *Sem. log.*); Kotarbiński: *Elementy*; S. Leśniewski: *Przyczynek do analizy zdań egzystencjonalnych.* „Przegl. Filoz." 1911 z. 3; Mill: *Syst. log.*; J. Pelc: *Imiona własne w języku naturalnym. Prolegomena do teorii.* [W:] *Fragmenty filozoficzne.* Ser. 3. 1967; *Principia.* Intr. rozdz. 3; B. Russell: *Human knowledge.* 1948, rozdz. Proper names.

W. M.

implikacja. Jeden z rodzajów zdań złożonych rozważanych w *rachunku zdań, przypominający pod pewnymi względami okres warunkowy w językach naturalnych. Z tego względu symbol implikacji „→" odczytuje się za pomocą spójnika „jeśli..., to", np. „$p \rightarrow q$" czyta się „Jeśli p, to q".

Odróżnia się m. in. implikację materialną, formalną i ścisłą; podstawowe, bo służące do zdefiniowania pozostałych jest pierwsze z tych pojęć. Implikacja materialna (ang. material implication) „$p \rightarrow q$" jest zdaniem prawdziwym wówczas, gdy nie jest tak, że pierwszy człon (poprzednik) jest prawdą, a drugi (następnik) fałszem. Wyraża to następująca tabelka, w której symbole „1", „0" oznaczają, odpowiednio, prawdę i fałsz.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja formalna (generalna) zachodzi między *funkcjami propozycjalnymi, wg schematu: $\wedge x[f(x) \rightarrow g(x)]$.

Implikacją ścisłą nazywa się implikację, w której nie może być tak, by poprzednik był prawdą, a następnik fałszem. Implikacja ścisła rozpatrywana jest w modalnym rachunku zdań Lewisa (*Logika modalna – 2).

Wobec rozbieżności między sensem implikacji materialnej a sensem potocznego okresu warunkowego powstaje pytanie, czy właściwe jest analizowanie rozumowań z języka potocznego za pomocą implikacji. Problem ten występuje pod nazwą *paradoksu implikacji. Jedną z prób przybliżenia implikacji do języka naturalnego jest koncepcja implikacji ścisłej; dokładniejsze przybliżenie stanowi *implikacja relewantna.

W. M.

implikacja relewantna. Rozbieżności między sensem spójnika „jeśli... to" a sensem symbolu *implikacji materialnej, określane jako *paradoks implikacji, stały się powodem konstruowania systemów logicznych, w których funktor zdania warunkowego uzyskuje znaczenie bliższe okresowi warunkowemu języków naturalnych. Jedną z prób w tym kierunku jest implikacja ścisła, zdefiniowana w *logice modalnej Lewisa jako taka implikacja, w której następnik musi wynikać z poprzednika; A implikuje ściśle B, to tyle co: nie jest możliwe żeby A było prawdą, a B fałszem. Ale implikacja ścisła również ma pewną własność paradoksalną, mianowicie: ze zdania niemożliwego, czyli sprzeczności wynika wszystko, zaś zdanie konieczne, jak tautologia, wynika ze wszystkiego. Toteż implikacja ścisła może zachodzić między zdaniami pozbawionymi jakiegokolwiek związku znaczeniowego.

Intuicyjny postulat, żeby poprzednik i następnik prawdziwego zdania warunkowego miały jakąś treść wspólną, został nazwany w piśmiennictwie angielskim „relevance principle", co oddawałby zwrot: zasada powiązania (znaczeniowego). Implikację spełniającą ten warunek nazwano relevant implication, co najwłaściwiej będzie oddać za pomocą neologizmu „implikacja relewantna", gdyż próby adaptacji istniejących już terminów niosłyby ze sobą uboczne odcienie znaczeniowe.

Implikacja relewantna spełniać ma jeszcze jeden postulat: aby zdanie warunkowe było prawdziwe, jego poprzednik musi nadawać się na przesłankę dla następnika we wnioskowaniu dedukcyjnym.

Oba warunki spełnia system „strenge implikation" Ackermanna (1956). Warunek relewancji zinterpretowany jest w nim w ten sposób, że treść następnika ma być składnikiem treści poprzednika, przy czym prawdziwość zdania warunkowego nie zależy od wartości logicznej jego składników. Aksjomaty i reguły systemu są tak dobrane, że następujące tezy klasycznego rachunku zdań nie

są twierdzeniami systemu Ackermanna: $A \to (B \to A)$, $A \to (B \to A.B)$, $A \to (\sim A \to B)$, $A. \sim A \to B$, $A \to ((A \to B) \to B)$, $B \to (A \to A)$.

Belnap (1960) formułuje warunek relewancji w sposób następujący: aby zdanie A było relewantne względem zdania B, konieczne jest, żeby A i B miały wspólne zmienne. Nie spełnia tego warunku np. formuła $A. \sim A \to B$, należąca zarówno do klasycznego rachunku, jak i do systemu implikacji ścisłej. Spełnia go natomiast system Andersona i Belnapa (1959), nazwany R, i inne systemy, będące modyfikacjami R.

System implikacji relewantnej uzupełniony w pewien sposób o pojęcia modalne charakteryzuje relację zwaną w piśmiennictwie angielskim entailment, co można przetłumaczyć zwrotem: wynikanie konieczne. Implikacja relewantna zyskuje wtedy pewne dodatkowe cechy zbliżające ją do implikacji ścisłej, lecz bez paradoksalnych rysów tej ostatniej. Znany system E wynikania koniecznego stanowi rozszerzenie wyżej wspomnianego systemu R o funktory modalne, wprowadzone analogicznie jak u Ackermanna 1956. Ackermann wprowadza wpierw aksjomatycznie stałą 0, którą można interpretować jako absurd (np. $B. \sim B$), po czym definiuje zdanie konieczne A jako równoważne z $\sim A \underset{r}{\to} 0$, zdanie możliwe jako równoważne z $(A \underset{r}{\to} 0)$, niemożliwe jako równoważne z $A \underset{r}{\to} 0$ (znak $\underset{r}{\to}$ jest użyty w roli symbolu implikacji relewantnej). W tak skonstruowanych systemach „entailment" nie jest dowodliwe ani to, że ze zdania niemożliwego wynika wszystko, ani to że zdanie konieczne wynika ze wszystkiego; rysem tym, biorącym się z właściwości implikacji relewantnej, różnią się one od systemów implikacji ścisłej.

W. Ackermann: *Begründung einer strenger Implikation*. „JSL" XXI 1956; A. R. Anderson, N. D. Belnap, Jr: *A modification of Ackermann's „rigorous implication"*. „JSL" XXIII 1958; – – *The pure calculus of entailment*. „JSL" XXVII 1962; – – *Entailment. The logic of relevance and necessity. Dedicated to the memory of W. Ackermann* (1896–1962). T. 1. 1975; N. D. Belnap, Jr: *Entailment and relevance*. „JSL" XXV 1960; A. Church: *The weak theory of implication*. [W]: A. Menne et al. (red.): *Kontrolliertes Denken*. 1951; J. M. Dunn: *Algebraic completness results for R-mingle and its extensions*. „JSL" XXXV 1970; P. T. Geach: *Entailment*. „Aristotelian Soc. Suppl. Vol." XXXII 1958; R. K. Meyer: *Intuitionism, entailment, negation*. [W]: H. Leblanc (red): *Truth, syntax and modality*. 1973; G. Pottinger: *A new classical relevance logic*. „Journ. of Philos. Logic" VIII 1979; R. Routley, R. K. Meyer: *The semantics of entailment*. [W]: H. Leblanc (red.) – jak wyżej.

W. M.

indukcja eliminacyjna Milla. Teoria wnioskowania, której pierwszy systematyczny wykład dał Franciszek Bacon (początek XVII w.), a dokładnie rozwinął John Stuart Mill (połowa XIX w.), pozwalająca na podstawie jednostkowych obserwacji dojść do wniosku stwierdzającego związki przyczynowe. Przez „przyczynę" rozumie Mill zjawisko stale poprzedzające, a przez „skutek" – zjawisko stale następujące. Ze sformułowania powyższego wynikają dwa możliwe sposoby rozumienia terminu „przyczyna": 1. przyczyną zjawiska B jest takie zjawisko A, po którym B stale następuje (warunek dostateczny zajścia B: nie ma A bez B); 2. przyczyną zjawiska B jest takie zjawisko A, które stale poprzedza B (warunek konieczny zajścia B: nie ma B bez A). To pierwsze rozumienie przyczyny jako warunku dostatecznego jest zgodniejsze z dalszymi wywodami Milla. Poszukiwanie związków przyczynowych sprowadza się w sposób oczywisty bądź do poszukiwania przyczyn A dla zjawiska B, bądź do poszukiwania skutków B danego zjawiska A. Punktem wyjścia jest ustanowienie alternatywy wszystkich możliwych rozwiązań danego zagadnienia (z pominięciem tych, o których wiemy, że są fałszywe). W przypadku poszukiwania przyczyny A dla danego zjawiska B jest to wymienienie tych wszystkich okoliczności: $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, o których przypuszczamy, że są poszukiwaną przyczyną B. Analogicznie przy poszukiwaniu skutków danego zjawiska A: wyodrębnia się wszystkie te zjawiska $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$, które podejrzewamy, że są skutkiem A. Następnie wykazuje się fałszywość wszystkich członów powyższej alternatywy z wyjątkiem jednego, na podstawie odpowiednio dobranych obserwacji; tzn. wykazuje się, że wszystkie wymienione okoliczności z wyjątkiem jednej nie są poszukiwaną przyczyną (ewentualnie skutkiem). W wyniku tych eliminacji pozostały człon alternatywy przyjmuje się jako prawdziwe rozwiązanie postawionego na początku zagadnienia: zjawisko nie wyeliminowane spośród wymienionych na początku przyjmuje się jako poszukiwaną przyczynę (ewentualnie skutek). Indukcja eliminacyjna obejmuje pięć schematów wnioskowania, zwanych kanonami lub metodami Milla. Najważniejsze z nich to kanon jedynej zgodności, kanon jedynej różnicy i kanon zmian współtowarzyszących. Pozostałe dwa – to kanon połączonej metody zgodności i różnicy oraz kanon reszt.

Kanon jedynej zgodności: jeżeli jakaś okoliczność stale towarzyszy występowaniu badanego zjawiska, podczas gdy inne okoliczności ulegają zmianie, to okoliczność ta jest przyczyną albo skutkiem badanego zjawiska. W zależności od tego czy w wyniku wnioskowania znajduje się przyczynę (A) danego zjawiska (B), czy znajduje się skutek (B) danego zjawiska (A), kanon ten można ująć w jeden z następujących schematów wnioskowania (liczba trzech czynników w tabeli jest oczywiście przypadkowa):

I. $A_1, A_2, A_3,\ B,$	I. $A,\ B_1, B_2, B_3,$
II. $A_1, A_2, \overline{A_3},\ B,$	II. $A,\ B_1, B_2, \overline{B_3},$
III. $A_1, \overline{A_2}, A_3,\ B,$	III. $A,\ B_1, \overline{B_2}\ B_3,$
IV. $A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3},\ B,$	IV. $A,\ B_1, \overline{B_2}, \overline{B_3},$
Zatem A_1 jest przyczyną B	Zatem B_1 jest skutkiem A

(Uwaga: litery A, B oznaczają występowanie zjawisk A, B, zaś litery $\overline{A}, \overline{B}$ oznaczają niewystępowanie zjawisk A, B).

Uwzględniono tu sytuację, gdy wymienia się trzy zjawiska, wśród których poszukuje się przyczyny (ewentualnie skutku) badanego zjawiska. Przykład (pochodzący od Milla) na poszukiwanie przyczyny. Niech A_1 oznacza zetknięcie substancji zasadniczej z substancją oleistą, B powstanie mydła, pozostałe zaś litery – inne okoliczności rozważanego procesu. Jeśli obserwacje prowadzą do takich wyników, jakie przedstawia tabela po lewej stronie, to wolno stąd wywnioskować, że A_1 jest przyczyną B.

Kanon jedynej zgodności upoważnia do stwierdzeń dotyczących warunku koniecznego zjawiska B (tabela na lewo) lub zjawiska A (tabela na prawo). Stwierdzamy bowiem, np. w przypadku poszukiwania przyczyny dla B, że nie jest nigdy tak, by zachodziło B, a nie zachodziło A_1. Innymi słowy: zajście A_1 jest konieczne dla zajścia B. Jeśli więc mówi się, że kanon jedynej zgodności pozwala na wykrywanie przyczyny, to trzeba tu rozumieć przez przyczynę (lub, w niektórych przypadkach, składnik przyczyny) tylko warunek konieczny danego zjawiska; bądź też trzeba wzmocnić przesłanki rozumowania o pewne dodatkowe założenia dotyczące przyczynowości (zob. Ajdukiewicz).

Kanon jedynej różnicy: jeżeli jakaś okoliczność zachodzi, gdy dane zjawisko występuje, a nie zachodzi, gdy dane zjawisko nie występuje, podczas gdy wszystkie pozostałe okoliczności za każdym razem są te same, to okoliczność ta jest skutkiem albo przyczyną danego zjawiska. Odpowiednie schematy wnioskowania:

I. $A_1, A_2, A_3, B,$	I. $A, B_1, B_2, B_3,$
II. $\overline{A_1}, A_2, A_3, \overline{B},$	II. $\overline{A}, \overline{B_1}, B_2, B_3,$
Zatem: A_1 jest przyczyną B	Zatem: B_1 jest skutkiem A.

Przykład (na tabelę po lewej): W znanym doświadczeniu Oersteda stwierdza się wychylenie igły magnetycznej z jej zwykłego położenia dokonujące się w momencie, gdy przez drut umieszczony pod igłą przepływa prąd; następnie zaś stwierdza się, że gdy ustaje przepływ prądu (przy innych okolicznościach niezmienionych), igła wraca do poprzedniego położenia. Skoro więc jedyną różnicę stanowi przepływ prądu, to wystarcza on, by spowodować wychylenie igły. Stwierdza się tutaj, inaczej niż w kanonie jedynej zgodności, iż zachodzi warunek wystarczający lub składnik takiego warunku (zastrzeżenie, iż może to być składnik przyczyny bierze się stąd, że nie zawsze potrafimy ów składnik wyodrębnić; stwierdzamy np., że przyczyną wyleczenia jest zażycie pewnego lekarstwa, ale w istocie chodzi tu tylko o niektóre składniki tego lekarstwa).

Kanon zmian współtowarzyszących. Jeżeli jedno zjawisko zmienia się ze zmianą drugiego zjawiska, podczas gdy towarzyszące im okoliczności nie ulegają zmianie, to pomiędzy tymi zjawiskami zachodzi związek przyczynowy. Schematycznie:

I. $A_1, A_2, A_3, B,$	I. $A, B_1, B_2, B_3,$
II. zm. $A_1, A_2, A_3,$ zm. $B,$	II. zm. $A,$ zm. $B_1, B_2, B_3,$
Zatem: A_1 jest przyczyną B.	Zatem: B_1 jest skutkiem A.

Przykład: Badamy skutki ciepła. Nie możemy usunąć ciepła całkowicie z jakiegoś ciała, ale możemy je modyfikować co do ilości, ogrzewając lub oziębiając jakieś ciało. Obserwując to ciało stwierdzimy, że ze zmianą jego temperatury zmienia się jego objętość, ciało rozszerza się lub kurczy, gdy inne jego właściwości, np. barwa, kształt nie ulegają zmianie. Kanon ten stosuje się, gdy nie można stosować metod jedynej różnicy czy jedynej zgodności, gdyż nie sposób wyłączyć pewnych zjawisk lub spowodować, by one same były obecne, można jednak wywołać pewną modyfikację badanego zjawiska.

Kanon połączonych metod zgodności i różnicy. Jeśli dwa lub więcej przypadków, gdzie dane zjawisko zachodzi, ma tylko jedną wspólną okoliczność, podczas gdy dwa lub więcej przypadków, w których ono nie zachodzi, nie ma ze sobą nic wspólnego poza tym, że nie ma w nich tej okoliczności, to wówczas ta okoliczność, co do której jedynie te dwa zespoły przypadków się różnią, jest skutkiem albo przyczyną danego zjawiska. Schematycznie:

I. $A_1, A_2, \overline{A_3}, B$	I. $A, B_1, B_2, \overline{B_3},$
II. $A_1, \overline{A_2}, A_3, B$	II. $A, B_1, \overline{B_2}, B_3,$
III. $\overline{A_1}, A_2, \overline{A_3}, \overline{B}$	III. $\overline{A}, \overline{B_1}, B_2, \overline{B_3},$
IV. $\overline{A_1}, \overline{A_2}, A_3, \overline{B}$	IV. $\overline{A}, \overline{B_1}, \overline{B_2}, B_3,$
Zatem: A_1 jest przyczyną B.	Zatem: B_1 jest skutkiem A.

Kanon reszt. Gdy odejmiemy z jakiegoś zjawiska te jego składniki, które, jak wiemy z poprzednich wniosków indukcyjnych, są skutkiem pewnych określonych poprzedników, to reszta tego zjawiska jest skutkiem pozostałych poprzedników. Schematycznie: Jeżeli całość AB jest przyczyną całości ab, B zaś jest przyczyną B, to A jest przyczyną a.

Powyższe ujęcie indukcji eliminacyjnej Milla, pochodzące od różnych interpretatorów, różni się od dosłownego rozumienia jej oryginalnego wykładu, który zawiera nieścisłości, niewykonalne zalecenia i sposób sformułowania schematów wnioskowania nie zawsze gwarantujący im niezawodność. Nieścisłością jest np. nieprzestrzeganie jednego znaczenia terminu „przyczyna". Niewykonalne jest żądanie uwzględnienia wszystkich okoliczności towarzyszących badanemu zjawisku (w kanonie jedynej różnicy np. żąda się stwierdzenia, że w dwu przypadkach zachodzenia danego zjawiska wszystkie okoliczności z wyjątkiem jednej są te same).

Indukcja eliminacyjna różni się w sposób istotny od indukcji enumeracyjnej tym, że stanowi rozumowanie dedukcyjne, przebiegające zawsze wg schematu: $(H_1 \vee H_2 \vee \ldots H_k) \wedge (\sim H_2 \wedge \ldots \sim H_k) \rightarrow H_1$. Nazywanie tego rozumowania indukcją datuje się z okresu, gdy pojęcia dedukcji i indukcji nie były dostatecznie sprecyzowane (obecnie traktuje się indukcję w ścisłym sensie, tj. *indukcję enumeracyjną niezupełną, jako szczególny przypadek *rozumowania redukcyjnego). Można jednak zachować słowo „indukcja" także dla kanonów Milla, jeśli będzie się rozumieć to słowo dostatecznie szeroko, tj. obejmując nim wszystkie rozumowania, których wnioskami są jakieś uogólnienia, wśród przesłanek zaś znajduje się obserwacyjne zdanie jednostkowe.

Pomimo tego rodzaju analiz i wyjaśnień teoria indukcji eliminacyjnej wciąż pozostaje w stadium dyskusji, w której ścierają się różne interpretacje.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *O niektórych sposobach uzasadniania właściwych naukom empirycznym.* [W:] *JiP.* T. 1; – – *Zarys*; T. Czeżowski: *Logika.* 1949; H. Greniewski: *Elementy logiki indukcji.* 1955; – – *Milla kanon zmian towarzyszących.* „St. Log." 1957; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Wykłady*; N. Łubnicki: *Nauka poprawnego myślenia.* 1965; – – Mill: *Syst. log.*; K. Szaniawski: *O indukcji eliminacyjnej.* [W:] *Fragmenty filozoficzne.* Ser. 2 1959.

M. P.

indukcja enumeracyjna niezupełna. Wnioskowanie, w którym zdanie stwierdzające jakąś ogólną prawidłowość uznaje się jako wniosek na podstawie uznanych już zdań jednostkowych, stwierdzających poszczególne (lecz nie wszystkie) przypadki tej prawidłowości. Przykład: Turysta zwiedzający Warszawę wiele razy jeździł tramwajem i za każdym razem spotykał uprzejmego konduktora. Na tej podstawie doszedł on do wniosku, że każdy konduktor warszawski jest uprzejmy.

Wnioskowanie to przebiega według następującego schematu:

S_1 jest P, S_2 jest P, S_3 jest P, ..., S_n jest P,
$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ jest S.

Zatem: każde S jest P

Schemat ten dotyczy najprostszej postaci indukcji enumeracyjnej, mianowicie sytuacji, gdy przesłanki i wniosek są zdaniami kategorycznymi, podmiotowo-orzeczni-kowymi. Zdania występujące w indukcji enumeracyjnej (przesłanki, wniosek) mogą być inaczej zbudowane, np. w postaci okresu warunkowego. Schemat takiego wnioskowania będzie zawierał więcej zmiennych i będzie bardziej skomplikowany.

W indukcji enumeracyjnej wniosek nie wynika logicznie z przesłanek, lecz przesłanki wynikają z wniosku. Stąd indukcja enumeracyjna niezupełna należy do *wnioskowań redukcyjnych. Z tego też powodu wnioskowanie przez indukcję enumeracyjną nie jest niezawodne, tzn. prawdziwość przesłanek nie gwarantuje prawdziwości wniosku, tylko go uprawdopodobnia. Problem, w jaki sposób przesłanki uprawdopodobniają wniosek, rozpatrywany jest w tzw. *logice indukcji.

Zob. też **metodologia nauk empirycznych.**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; J. Giedymin: *Indukcjonizm i antyindukcjonizm.* [W:] *LTN*; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki.*

M. P.

indukcja matematyczna. Wnioskowanie, w którym pierwsza z dwu przesłanek stwierdza, iż pewna formuła $F(n)$ zawierająca zmienną n sprawdza się np. dla $n = 1$, druga zaś stwierdza, iż jeśli formuła $F(n)$ sprawdza się dla $n = k$ (k jest liczbą naturalną), to sprawdza się też dla $n = k+1$; stąd wyprowadza się wniosek, iż formuła $F(n)$ sprawdza się dla wszelkich liczb naturalnych n.

Tego rodzaju wnioskowanie znajduje zastosowanie w dowodzeniu wielu twierdzeń matematycznych. Przykład: Mamy udowodnić twierdzenie $F(n)$, głoszące, iż suma n kolejnych liczb nieparzystych poczynając od 1, równa się n^2, czyli że formuła:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

jest prawdziwa dla wszelkich liczb naturalnych n.

Należy wykazać najpierw, że $F(n)$ sprawdza się dla $n = 1$. Dla $n = 1$ formuła $F(n)$ przybiera postać $1 = 1^2$, co oczywiście jest prawdą. Następnie trzeba wykazać, że jeśli formuła $F(n)$ sprawdza się dla jakiejś liczby naturalnej, np. dla $n = k$, to sprawdza się też dla bezpośrednio następnej liczby naturalnej, tj. dla $n = k+1$. Mamy więc wykazać, że jeśli prawdziwa jest formuła

$$1+3+5\ldots+(2k-1) = k^2, \text{ tj. } F(k),$$

to musi być prawdziwa formuła:

$$1+3+5\ldots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2, \text{ tj. } F(k+1)$$

Lewa strona wzoru $F(k+1)$ jest sumą lewej strony wzoru $F(k)$ i wyrazu $(2k+1)$. Jeśli więc założymy, że wzór $F(k)$ jest prawdziwy, to wzór $F(k+1)$ będzie równoważny formule

$$k^2+(2k+1) = (k+1)^2$$

Ta formuła jest oczywiście prawdziwa, gdyż jej lewa strona jest rozwinięciem kwadratu dwumianu $(k+1)^2$, który stanowi prawą stronę tego wzoru.

Tym samym wykazaliśmy, że jeśli prawdziwy jest wzór $F(n)$ dla $n = k$, to musi on też być prawdziwy dla $n = k+1$. Ponieważ zostało wyżej wykazane, że $F(n)$ sprawdza się dla $n = 1$ i zostało wykazane, że jeżeli $F(n)$ sprawdza się dla $n = k$, to sprawdzi się też dla $n = k+1$, wnioskujemy, że $F(n)$ sprawdza się dla wszelkich liczb naturalnych n.

Ogólny schemat powyższego wnioskowania przez indukcję matematyczną:

$$F(1)$$
$$\text{Jeżeli } F(k), \text{ to } F(k+1)$$

Zatem: dla wszelkich naturalnych wartości zmiennej n, sprawdza się formuła $F(n)$. Czasem zamiast $F(1)$ bierze się $F(0)$.

Zob. też **arytmetyka** (aksjomat indukcji).

Ajdukiewicz: *Zarys*; I. M. Copi: *Symbolic logic*. 1961; S. Kamiński: *O początkach indukcji matematycznej*. „St. Log" VII, 1958; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1952.

M. P.

indukcja zupełna (i. wyczerpująca, i. enumeracyjna zupełna). Wnioskowanie, w którym zdanie stwierdzające jakąś ogólną prawidłowość uznaje się jako wniosek na podstawie uznanych już zdań jednostkowych, stwierdzających wszystkie poszczególne przypadki tej prawidłowości. Przykład: Nauczyciel czytając listę uczniów danej klasy, stwierdził kolejno obecność poszczególnych uczniów. A więc – stwierdził – wszyscy uczniowie są obecni. Schemat wnioskowania przez indukcję zupełną:

$$\frac{\begin{array}{c}S_1 \text{ jest } P,\ S_2 \text{ jest } P,\ S_3 \text{ jest } P,\ \ldots,\ S_n \text{ jest } P;\\ S_1 \text{ jest } S,\ S_2 \text{ jest } S,\ S_3 \text{ jest } S,\ \ldots,\ S_n \text{ jest } S;\\ \text{każde } S \text{ jest } S_1 \text{ albo } S_2, \text{ albo } S_3 \ldots \text{ albo } S_n\end{array}}{\text{Zatem: każde } S \text{ jest } P.}$$

Schemat ten dotyczy najprostszej postaci indukcji zupełnej, mianowicie sytuacji, gdy przesłanki i wniosek są zdaniami kategorycznymi podmiotowo orzecznikowymi. Zdania występujące w tego rodzaju wnioskowaniu mogą być inaczej zbudowane, np. w postaci okresu warunkowego. Schemat takiego wnioskowania będzie zawierał więcej zmiennych i będzie bardziej skomplikowany.

W indukcji zupełnej wniosek wynika logicznie z przesłanek (przesłanki też wynikają z wniosku), jest to zatem wnioskowanie dedukcyjne, a więc niezawodne. Znaczy to, że od prawdziwych przesłanek dochodzi się zawsze do prawdziwego wniosku.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*.

M. P.

indywiduum.

(1) Podstawowy element rozważanej dziedziny. Takie pojęcie indywiduum jest więc zrelatywizowane do dziedziny rozważań lub języka opisującego tę dziedzinę. I tak np. dla arytmetyki liczb naturalnych indywiduami są liczby naturalne, stanowiące dziedzinę tej teorii; dla astronomii indywiduami są ciała niebieskie, dla socjologii mogą to być grupy ludzkie etc. Indywidua są denotowane przez stałe indywiduowe (nazwy indywidualne) danego języka i, tym samym, są wartościami zmiennych indywiduowych tegoż języka. Określenie (1) rozpowszechnione jest w badaniach semantycznych. Oprócz niego występują w logice inne jeszcze określenia indywiduum.

(2) W *teorii typów indywidua to przedmioty najniższego typu logicznego. W *Principia* określa się indywiduum jako to, co nie jest ani sądem (ang. proposition), ani funkcją propozycjonalną (ang. propositional function), stanowi natomiast składnik sądu lub funkcji nie dający się z nich wyeliminować – w odróżnieniu od symboli klas i deskrypcji, czyli tzw. symboli niekompletnych (*Deskrypcja). Określenie to można też sformułować, unikając specyficznej terminologii *Principiów*, w sposób następujący: Indywiduum nie jest ani własnością czy relacją, ani klasą. Określenie to różni się od (1) tym, że nie występuje w nim wyraźna relatywizacja do dziedziny rozważań.

(3) W niektórych systemach teorii mnogości określa się indywiduum jako to, co nie jest zbiorem (zob. Słupecki, Borkowski cz. 2, rozdz. 1). W terminologii Zermelo tego rodzaju przedmioty noszą nazwę (niem.) Urelemente (zob. Fraenkel, Bar-Hillel). Na gruncie systemu Quine'a (*ML*) zwrot „y nie jest klasą", da się wyrazić wzorem: $\wedge\, x(x \in y \equiv \equiv x = y)$; przy tym ujęciu nie ma różnicy (inaczej niż w teorii typów) między indywiduum i klasą jednostkową.

Carnap: *MaN*; – – *Symb. log.*; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Quine: *ML* par. 22; *Principia*, Intr. rozdz. 2 odc. 5; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

intencjonalność. Pod wpływem teorii psychologicznej filozofa niem. F. Brentano (1838–1907), upatrującego cechę charakterystyczną aktów psychicznych w ich skierowaniu (łac. intentio) na pewien przedmiot (poznaje się coś, kocha się coś, itp.), wprowadzono to pojęcie również do filozofii języka i semantyki. Intencjonalność jest więc właściwością aktów językowych, polegającą na tym, że w trakcie używania słów myśl kieruje się ku przedmiotom, których one dotyczą, nie zaś ku samym słowom. To samo wyraża się też powiedzeniem, że wypowiedzi językowe są przezroczyste semantycznie, tzn. nie zatrzymują uwagi na sobie, lecz kierują ją ku rzeczywistości pozajęzykowej. Myśl tę podkreślano zwłaszcza w tzw. teorii intencji znaczeniowej, związanej z ideami E. Husserla.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. T. 1–2. 1913–1921; W. Marciszewski: *Problem istnienia przedmiotów intencjonalnych*. „St. Semiot". IV 1973.

W. M.

intensjonalność (z łac. intensio – treść). Własność orzekana bądź o wyrażeniach złożonych (zdaniowych lub nazwowych), bądź o całych językach.

Wyrażenie złożone W jest intensjonalne wtedy i tylko, gdy nie jest wyrażeniem ekstensjonalnym (*Ekstensjonalność), tzn. gdy nie jest tak, że *denotacja W zależy wyłącznie od denotacji wyrażeń składowych.

F jest funktorem intensjonalnym wtedy i tylko, gdy nie jest funktorem ekstensjonalnym, tzn. gdy nie jest tak, że *F* wraz ze swymi argumentami tworzy wyrażenie złożone ekstensjonalne.

J jest językiem intensjonalnym wtedy i tylko, gdy nie jest językiem ekstensjonalnym, tzn. gdy nie jest tak, że wszystkie wyrażenia w *J* są ekstensjonalne.

Przykładem zdania intensjonalnego: „Jan Śniadecki wiedział, że Mickiewicz jest autorem *Ballad i romansów*". Nazwa „autor *Ballad i romansów*" denotuje to samo, co „autor *Pana Tadeusza*", ale zamiana pierwszej na drugą prowadzi do przekształcenia powyższego prawdziwego zdania na zdanie fałszywe (Śniadecki, zmarły w 1830, nie mógł wiedzieć, kto jest autorem *Pana Tadeusza*). A zatem zdanie to nie jest ekstensjonalne. Do intensjonalnych należą nie tylko zdania o stanach umysłu (wierzeniu, myśleniu itp.), lecz również zdania modalne, np.: „Konieczne jest, że człowiek jest istotą rozumną." Równozakresowy z nazwą „człowiek" jest zwrot „istota dwunoga nieopierzona." Ponieważ jednak ta równość zakresów jest kwestią przygodnego faktu (mogłaby ewolucja potoczyć się inaczej), otrzymaną w wyniku zastąpienia zdanie „Konieczne jest, że istota dwunoga nieopierzona jest rozumna", jest zdaniem fałszywym.

Przykład nazwy intensjonalnej: Obraz centaura. „Centaur", jako nazwa pusta, ma wspólną denotację z każdą inną nazwą pustą – jest nią klasa pusta. Ale jeśli w powyższym wyrażeniu zastąpić ją np. nazwą „Diana", zmieni się denotacja wyrażenia złożonego, ponieważ klasa obrazów centaura nie jest identyczna z klasą obrazów Diany. Podobnie, zwrot nazwowy „Ten, kto ceni doktora Jekyll", nie jest równozakresowy ze zwrotem „Ten, kto ceni pana Hyde", choć oba nazwiska (w powieści Stevensona) są imionami tej samej osoby, więc zamiana jednego na drugie nie powinnaby zmieniać denotacji całego zwrotu, gdyby to był zwrot ekstensjonalny.

Problem intensjonalności nie dotyczy języków symbolicznych matematyki i logiki klasycznej, które są ekstensjonalne. Byłoby dogodne, gdyby prawa i reguły tej logiki dały się stosować do języka naturalnego, ale staje temu na przeszkodzie intensjonalność tego języka. Gdy denotacja wyrażenia nie jest jednoznacznie wyznaczana przez denotacje jego składników, wyrażenie jest niepodatne na operacje logiczne, takie jak: zastępowanie, podstawianie, obliczanie wartości logicznej zdania na podstawie wartości jego składników, różne operacje z kwantyfikatorami. Wśród prób rozwiązania tego problemu jedne proponują taką interpretację wyrażeń intensjonalnych, która przekształca je na wyrażenia ekstensjonalne, stosujące się do reguł klasycznej logiki. Inne polegają na sformułowaniu takich reguł, które respektują specyficzność wyrażeń intensjonalnych, a przy tym określają jednoznacznie wyniki pewnych operacji dokonywanych na tych wyrażeniach; do tej grupy należą pewne logiki nieklasyczne np. *logika epistemiczna czy logika *implikacji relewantnej. Jeszcze inne propozycje sprowadzają się do rezygnacji z podporządkowania wyrażeń intensjonalnych jakimkolwiek regułom, przy czym rezygnacja ta znajduje usprawiedliwienie w odpowiedniej teorii intensjonalności.

Ostatnie stanowisko reprezentuje m. in. Quine, który traktuje konteksty intensjonalne na wzór nazw cudzysłowowych, będących wyrażeniami prostymi (tj. takimi, że żadna część wyrażenia nie jest już wyrażeniem, lecz czymś w rodzaju sylaby lub głoski). Nie mają więc one składników, które pełniłyby funkcję denotowania, reprezentowania itp.; w konsekwencji – niedopuszczalne jest zastępowanie (wymagające tożsamości denotacji), podstawianie itp. operacje. Uzasadniony w ten sposób zakaz dokonywania operacji zabezpiecza przed paradoksalnymi konsekwencjami, takimi np. jak przekształcenie zdania prawdziwego na fałszywe w wyniku zastępowania.

Tendencja do traktowania kontekstów intensjonalnych na podobieństwo zdań o wypowiedziach przejawia się również w *Principia* (Appendix C). Za wkład Russella do problemu intensjonalności uważa się także teorię dotyczącą *deskrypcji i symboli klas, które jako symbole pozbawione denotacji nie podlegają zastępowaniu z tytułu równości zakresowej; uchyla to problem poprawności wzajemnego zastępowania wyrażeń równozakresowych w kontekstach intensjonalnych.

Uchyleniem problemu jest również proponowany przez Carnapa (z okresu *Syntax*, 1934) przekład wyrażeń intensjonalnych na ekstensjonalne, mianowicie cudzysłowowe. Tak np. zdanie „Karol myśli, że *A*," przekłada się na zdanie «Karol myśli: „*A*"». Zwroty powstające z takiego przekładu są co prawda ekstensjonalne, problematyczna jest jednak trafność samego przekładu.

Inny charakter mają te próby, w których eliminuje się intensjonalność po to, by na odpowiednio przekształconych wyrażeniach, uprzednio intensjonalnych, móc dokonywać operacji logicznych bez narażania się na paradoksalne konsekwencje. Próbę taką podjął Ajdukiewicz na przykładzie zdania: [Z] Cezar wiedział, że stolica Republiki leży nad Tybrem. [Z] jest intensjonalne, ponieważ zastępując np. „Stolica republiki" równozakresową nazwą „Stolica papiestwa", otrzymuje się ze zdania prawdziwego fałszywe. Intensjonalność i związany z nią paradoks zastępowania zniknie wówczas, gdy interpretuje się [Z] jako skrót zdania: [Z'] Cezar – o stolicy republiki, o Tybrze i o relacji leżenia nad – wiedział, że stolica republiki leży nad Tybrem. Bądź też jako skrót zdania: [Z''] Cezar – o stolicy, o republice, o Tybrze i o relacji leżenia nad – wiedział, że stolica republiki leży nad Tybrem. Wypowiedź [Z'] rozumie się w ten sposób, że warunkiem jej prawdziwości jest to, by Cezar uznawał zdanie o budowie xRy, gdzie wyrażenia stojące na miejscu symboli x, y,

R denotują, odpowiednio: miasto Rzym, rzekę Tyber i relację leżenia nad. Ponieważ Cezar uznawał takie zdanie, [Z'] okazuje się prawdą. Gdyby zaś zastąpić w [Z'] nazwę „Stolica republiki" nazwą „Stolica papiestwa", powyższy warunek prawdziwości również będzie spełniony, ponieważ na miejscu x znowu figurować będzie nazwa denotująca Rzym. Ponieważ zastąpienie wyrażeniem równozakresowym nie zmienia wartości logicznej [Z'], należy ono do zdań ekstensjonalnych.

Przy interpretacji [Z] jako [Z''], jeśli zechce się zastąpić „Stolica republiki" przez „Stolica papiestwa", trzeba konsekwentnie zmienić „republika" na „papiestwo" również tam, gdzie słowo „republika" występuje osobno (we frazie zawartej między myślnikami). Wtedy prawdziwe zdanie [Z''] przekształci się w fałsz (nie jest prawdą, jakoby Cezar wiedział coś o papiestwie), ale jest to na skutek zastąpienia w pewnym miejscu wyrażeniem nierównoważnym, a więc operacji niezgodnej z regułą zastępowania. Prawidłowe zastąpienie nie zmieniłoby wartości logicznej [Z''], a więc i ono okazuje się zdaniem ekstensjonalnym. Analogiczne rozważania prowadzą do wniosków dotyczących wyrażeń będących funkcjami zdaniowymi: po odpowiednim zinterpretowaniu funkcji uchodzących za intensjonalne okazują się one ekstensjonalne i podatne tym samym na operację podstawiania za zmienne.

Inna metoda podporządkowania omawianych wyrażeń regułom rządzącym kontekstami ekstensjonalnymi pochodzi od Fregego (rozwinięta przez Churcha). Zdaniom niezależnym przypisuje się jako denotację wartość logiczną, zdaniom zależnym – to, co w równokształtnym zdaniu niezależnym jest jego znaczeniem. Zdania zależne bowiem, opisując jakieś myśli, sądy itp., dadzą się traktować jako nazwy owych myśli, sądów etc. pojmowanych jako pewne przedmioty abstrakcyjne (*Znaczenie–(3b)). Skoro tak, to denotatem zdania zależnego jest sąd, a chcąc je zastąpić innym zdaniem zależnym trzeba dobrać zdanie denotujące ten sam sąd, czyli równoznaczne (zdania zawierające różne pojęcia, takie jak pojęcie stolicy republiki i pojęcie stolicy papiestwa nie są równoznaczne). Tak więc reguła zastępowania, połączona z teorią zdań zależnych jako będących nazwami sądów, czyli denotujących sądy, chroni przed zastępowaniem wyrażeniami nierównoznacznymi, naruszającym w danym przypadku wymaganie równości denotacji; a tylko takie zastępowanie prowadziłoby do paradoksu.

Przykład rozwiązania, które respektuje specyficzność kontekstów intensjonalnych poprzez sformułowanie specjalnych reguł dla tych kontekstów znajduje się u Carnapa. Podczas gdy reguła zastępowania dla kontekstów ekstensjonalnych dozwala na zastępowanie pod warunkiem równości denotacji, odpowiednia reguła dla wyrażeń intensjonalnych wymaga równości znaczenia. W praktyce więc rozwiązanie Carnapa dopuszcza ten sam sposób zastępowania, co Fregego-Carnapa, ale za każdym stoją odmienne założenia teoretyczne.

Inne rozwiązanie, również dostarczające specyficznych reguł dla niektórych kontekstów intensjonalnych, polega na traktowaniu tych kontekstów jako wyrażeń modalnych, dających się traktować metodami właściwymi *logice modalnej; rozwiązanie takie, wraz z odpowiednią wersją logiki modalnej przedstawił J. Hintikka.

K. Ajdukiewicz: *Pewna metoda eliminacji intensjonalnych zdań i formuł zdaniowych*. [W:] *JiP*. T. 2; – – *Wyrażenia intensjonalne*. [W:] *Sem. pol.*; Carnap: *Syntax*; – – *MaN*; Church: *Math. log.*; Frege: *SuB*; J. Hintikka: *Knowledge and belief*. 1962; W. Marciszewski: *O funkcjach semantycznych nowy zależnej*. [W:] *Sem. pol.*; W. V. O. Quine: *Reference and modality*. [W:] *LPV*.

W. M.

interpretacja teorii.

(1) *Model semantyczny teorii.

(2) Czynność przyporządkowywania modelu danej teorii.

(3) Stosunek między teoriami, charakteryzowany następującym określeniem: Jeśli aksjomaty pewnej teorii T pozostają zdaniami prawdziwymi, gdy nadamy terminom pierwotnym w nich występującym sens zaczerpnięty z jakiejś innej teorii T', to teoria T ma interpretację w teorii T'.

Carnap: *Symb. log.*; I. M. Copi: *Symbolic logic*. 1954; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Tarski: *Undec. theories*.

W. M.

intuicjonizm. Kierunek w zakresie podstaw matematyki głoszący, że budowę całej matematyki należy oprzeć jedynie na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz na przyjmowanej jako intuicyjna zasadzie indukcji matematycznej, rozumianej jako zasada operowania stosowana kolejno, krok za krokiem; dopuszcza się przy tym wyłącznie konstrukcyjne dowody istnienia. Stąd intuicjonizm jest jednym z kierunków konstruktywistycznych (*Konstruktywizm). Twórcą intuicjonizmu był znakomity matematyk holenderski L. E. J. Brouwer (1881–1966), innym czołowym jego przedstawicielem jest A. Heyting.

Intuicjonizm różni się zasadniczo od głównych kierunków w podstawach matematyki. Celem jego nie było ani oparcie matematyki o solidne podstawy (co było celem *logicyzmu), ani dążenie do ugruntowania matematyki klasycznej poprzez jej formalizację i podanie dowodu niesprzeczności odpowiednich teorii formalnych (co było celem *formalizmu). Celem tym było stworzenie matematyki nowej, konkurencyjnej w stosunku do matematyki klasycznej. Intuicjoniści odrzucają matematykę i logikę klasyczną jako dziedziny oparte o niekoherentne i nieuprawnione sposoby wprowadzania rozważanych pojęć, o czym – ich zdaniem – dowodnie świadczą pojawiające się w systemach klasycznych antynomie; tworząc matematykę nową poprzez wprowadzanie pojęć, obiektów i metod matematycznych w sposób koherentny i uprawniony.

Intuicjonizm Brouwera ma wielkie tradycje. Z jednej strony nawiązuje on do intuicjonizmu Kanta, który matematykę opierał na apriorycznych formach naoczności czasu i przestrzeni oraz pojmował ją jako naukę o możliwych strukturach formalnych wytwarzanych przez czysty podmiot. Matematyka – zdaniem Kanta – poznanie swe opiera jedynie na apriorycznym wyobrażeniu przedmiotu, a przedmioty swe konstruuje w oparciu o stosowną intuicję aprioryczną. Z drugiej strony intuicjonizm nawiązuje do idei Kroneckera, który matematykę opierał na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz do poglądów H. Poincarégo, który traktował zasadę indukcji matematycznej jako pierwotnie intuicyjną. Intuicjonizm przejął i rozwinął wiele idei Poincarégo. Podkreślić jednak należy, że niezależnie od wszelkich niewątpliwych zapożyczeń intuicjonizm najwięcej zawdzięcza oryginalnym ideom Brouwera (teza doktorska z 1907 r., odczyt „Intuitionisme en formalisme" z 1912 r.), w tym także jego wysoce oryginalnej filozofii. Wywarła ona decydujący wpływ na powstanie i kształt intuicjonizmu; bez żadnej przesady stwierdzić można, iż matematyka intuicjonistyczna dowodnie świadczy, jak wielki wpływ wywrzeć mogą idee filozoficzne na teorie w poszczególnych naukach.

Intuicjonizm jest doktryną złożoną. W poniższej prezentacji jego tez zostaną one usystematyzowane w sześć grup, z których – biorąc pod uwagę związki stanowiska Brouwera z kantyzmem – w pierwszej kolejności omówione zostaną tezy epistemologiczno-genetyczne.

Tezy epistemologiczno-genetyczne. Intuicjonizm głosi, że matematyka jest naturalnym wytworem intelektu ludzkiego, przejawem jego wolnej, życiowej aktywności. Jest ona produktem ścisłej strony naszego myślenia, opartego o różnorakie intuicje podstawowe, ale nie kierującego się żadnymi stałymi czy sztywnymi zasadami.

Dlatego zasad matematyki intuicjonistycznej nie da się sformalizować, ani listy tych zasad wyczerpać. Matematyka – zdaniem intuicjonistów – zmienia się w czasie; co oznacza nie tyle banał, że zmienia się zbiór jej twierdzeń, ile pogląd, że zmienia się zespół owych podstawowych intuicji i idei wyznaczających aktywność rozumu, której produktem jest matematyka. Aktywność ta jest niezależna od języka matematycznego, a także od dowodów formalnie poprawnych lecz nieintuicyjnych.

Intuicja, według Brouwera, jest swoistą aktywnością umysłu polegającą na konstruowaniu pojęć wraz z rozumieniem warunkowanym przez zdolność jasnego wyróżniania pojęć oraz ich związków. Scharakteryzować ją można jako elementarną życiową aktywność, która jest a priori, jest niezależna od języka i jest obiektywna, bo taka sama dla wszystkich ludzi.

Podstawą arytmetyki, a poprzez nią matematyki całej, jest „praintuicja" ciągu liczb naturalnych oraz specyficznie porządkowa intuicja zasady indukcji matematycznej, traktowanej jako zasada operowania stosowana kolejno – krok za krokiem. W odróżnieniu od Kanta Brouwer przyjmuje jedynie aprioryczność czasu. Nasza intuicja liczb naturalnych związana jest z podstawową intuicją rozpadania się momentów życia na dwie różne części – to, co minęło i to, co nadchodzi, które dają się złączyć tylko poprzez czas, mimo że pozostają rozdzielone. Stąd, abstrahując od momentów emocjonalnych oraz egzystencjalnych, przechodzi się do fundamentalnej intuicji matematycznej – intuicji czystej dwoistości (względnie czystej dwu-jedności, jak Brouwer pisał w swych pismach wczesnych). Intuicja ta daje podstawę do konstrukcji ciągu liczb naturalnych.

Innymi intuicjami podstawowymi są: intuicja wydzielania obiektu, oraz intuicja myślowego odróżniania dwu obiektów. Prowadzą one do intuicji przeliczania, pojętego jako powtarzanie czynności dołączania nowego obiektu do obiektów danych. Intuicje te stoją u podstaw operacji liczenia.

Rozwój matematyki intuicjonistycznej zależy od wyselekcjonowania intuicji innych operacji podstawowych. Intuicjoniści proponowali różne przykłady takich operacji, z których w tym miejscu wspomnę jedynie o intuicji konstruowania ciągu poprzez sukcesywne wybieranie elementów.

Intuicjonizm, z epistemologiczno-genetycznego punktu widzenia, scharakteryzować można jako stanowisko aktywistyczne i intuicjonistyczne – od czego wywodzi się nazwa kierunku.

Tezy ontologiczne. Intuicjonizm jest kierunkiem kreacjonistycznym i konstruktywistycznym. Matematycy, zdaniem intuicjonistów, tworzą badane przez siebie obiekty, a nie – jak głosi platonizm – odkrywają je. Przedmioty matematyczne są skonstruowane, ich istnienie oznacza konstrukcję w aktach tworzącego matematykę umysłu. Niesprzeczność jest dla intuicjonistów jedynie warunkiem koniecznym istnienia; obiekt niesprzeczny albo istnieje – czyli został skonstruowany, albo może istnieć – czyli możliwość jego konstrukcji nie została wykluczona, nie może zaś nie istnieć – tzn. o żadnym przedmiocie niesprzecznym nie sposób udowodnić, iż nigdy nie zostanie on skonstruowany. Pamiętajmy, że matematyka zmienia się w czasie, zmieniają się więc także akceptowane metody konstrukcji. Konstrukcja danego obiektu polega na podaniu zespołu operacji wraz z kolejnością ich stosowania prowadzącą do tego obiektu poprzez stosowanie tych operacji w ustalonej kolejności do obiektów podstawowych (tj. obiektów wyprowadzonych z intuicji podstawowych), bądź do obiektów wcześniej skonstruowanych. Konstrukcje w naturalny sposób wyznaczają dowody stwierdzeń matematycznych, dowody zaś polegają na podaniu stosownych konstrukcji. Np. dowód stwierdzenia $A(x)$ polega na podaniu konstrukcji pozwalającej o każdym z rozważanych

obiektów stwierdzić, że jest on A-kiem; podczas gdy dowód stwierdzenia egzystencjalnego $xA(x)$ polega na podaniu konstrukcji obiektu a wraz z konstrukcją (dowodem), iż a jest A-kiem.

Intuicjonizm jest też kierunkiem potencjalistycznym. Wszelka nieskończoność jest nieskończonością potencjalną, w świecie obiektów matematycznych nie istnieją obiekty aktualnie nieskończone. Obiektów takich nie można by wszak skonstruować, ponieważ nieskończonymi są te obiekty, których konstrukcja nigdy się nie kończy. Poznanie obiektu nieskończonego jest poznaniem generującego ten obiekt procesu; a stwierdzenie, że dany obiekt jest nieskończony jest stwierdzeniem, że proces, który go wyznacza, nigdy się nie zakończy.

Tezy semantyczne. Semantyka, która odegrała tak ważką rolę w konstytuowaniu się stanowiska logistyczno-platońskiego Fregego, zajmuje też specjalnie ważne miejsce w rozwiniętym sformułowaniu stanowiska intuicjonistycznego. Intuicjoniści – w przeciwieństwie do formalistów, a w zgodzie z platonistami – twierdzą, że zdania matematyczne są sensowne i odnoszą się do dziedziny pozajęzykowej. Nie akceptują jednak realistycznej teorii znaczenia, według której znać znaczenie A, to znać warunki prawdziwości A. Intuicjoniści wprost, bądź w sposób ukryty twierdzą, że znaczenia wyrażenia A określone jest poprzez jego użycie; czyli akceptują zasadę, że jeżeli dwie osoby zgadzają się co do użycia danego zwrotu, to zgadzają się także co do jego znaczenia. Badanie znaczenia A nie może być prowadzone w oderwaniu od kwestii, w jaki sposób ustalona być może prawdziwość A; w przypadku zdań matematycznych znaczy to, że znaczenie takiego zdania ustalić można odwołując się do konstrukcji myślowych, które prowadzą do dowodu tego zdania. Znaczenie zdań matematycznych winno być wyjaśniane w terminach dowodów. W szczególności w terminach tych należy analizować stałe logiczne.

Tezy metamatematyczne. Niektóre z tych tez omówiono już poprzednio. Na podstawową kwestię filozofii matematyki: dlaczego twierdzenia matematyczne są pewne, skąd czerpią one swą oczywistość oraz niepowątpiewalność – intuicjoniści odpowiadają, iż pojęcia te są niezwykle proste, wręcz trywialne. Oparte są one o jasne i dobrze osadzone w doświadczeniu myślowym intuicje podstawowe. Zarówno filozofia, jak i logika są nieprzydatne do ugruntowania matematyki po prostu dlatego, że filozofia jest pojęciowo bardziej skomplikowana niż matematyka, a logika zbyt zależy od filozofii i lingwistyki – od pytań o sądy logiczne, o prawdziwość, o związki prawdziwościowe, od pytań o język, o jego budowę, a także od kwestii natury semantycznej.

Matematyka jest produktem działalności pozajęzykowej; języka w matematyce używa się jedynie dla zakomunikowania myśli, tj. do przekazania i utrwalenia czyichś matematycznych idei. Matematyka nie jest sprowadzalna do języka, tym bardziej nie może sama być traktowana jak język. Rozwinięciem tez metamatematycznych są twierdzenia metodologiczno-logiczne intuicjonizmu, które omawiam niżej.

Tezy metodologiczno-logiczne. Matematyka nie zależy od języka matematycznego, od dowodów formalnie poprawnych, lecz nie intuicyjnych. Z tej nieintuicyjności rozważań formalnej (klasycznej) matematyki biorą się antynomie; aby ich uniknąć trzeba matematykę oprzeć na pierwotnych, powszechnych intuicjach oraz wyrugować antynomiorodcze sposoby rozumowania. Intuicjoniści reformują więc nie tylko matematykę, ale i logikę formalną, która ich zdaniem wyabstrahowana została z matematyki zbiorów skończonych i bezprawnie przeniesiona na matematykę zbiorów dowolnych.

Źródeł antynomii dopatrują się intuicjoniści 1° w nieuprawnionym przenoszeniu intuicji przedmiotów skończonych na obiekty nieskończone; 2° w posługiwaniu się nieakceptowalną logiką klasyczną, w szczególności w nieostrożnym operowaniu słówkiem „wszystkie" (intuicjoniści preferują tzw. kwantyfikatory o ograniczonym zakresie) oraz słówkiem „istnieje", a także w posługiwaniu się przyjmowaną w logice klasycznej zasadą wyłączonego środka. Dowody nie wprost stosują intuicjoniści jedynie do obalania przypuszczeń oraz do dowodów nieistnienia, odrzucając ich stosowanie do uzyskiwania rezultatów pozytywnych.

Intuicjoniści przywiązują wielką wagę do specjalnego rozumienia funktorów logicznych, zreformowali też w znacznym stopniu logikę klasyczną (A. Heyting), podając własny system logiczny zwany logiką intuicjonistyczną. Charakterystycznymi dla rozumienia przez nich stałych logicznych, poza przytoczonym poprzednio rozumieniem małego kwantyfikatora, są:

Interpretacja alternatywy – dowód $A \vee B$ polega na podaniu dowodu A lub na podaniu dowodu B. Znając więc dowód alternatywy wiemy, który z jej członów został udowodniony. Wynika stąd tzw. własność alternatywy (resp. własność Gödla) logiki intuicjonistycznej; $A \vee B$ jest twierdzeniem tej logiki, gdy albo A jest jej twierdzeniem, albo twierdzeniem jest B.

Interpretacja implikacji – dowód $A \leftarrow B$ polega na podaniu konstrukcji, która dowód A przekształca w dowód B wraz z dowodem, że konstrukcja wskazana ma tę własność.

Interpretacja negacji – dowód $\sim A$ polega na podaniu konstrukcji przekształcającej dowód A w dowód formuły sprzecznej wraz z dowodem tego faktu, krótko – na dowodzie sprzecznorodności A.

Przy takim rozumieniu stałych logicznych powstaje logika będąca podsystemem logiki klasycznej, w której jednakowoż – jak pokazali to Glivenko i Gödel – logika klasyczna jest interpretowalna. Analogiczne rezultaty obowiązują dla standardowych systemów matematyki

klasycznej, np. dla arytmetyki liczb naturalnych. Z przytoczonej wyżej interpretacji bezpośrednio wynika, że prawo wyłączonego środka $A \vee \sim A$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej. Stwierdza ono bowiem, że każda formuła jest rozstrzygalna, wbrew powszechnym – podzielanym też przez intuicjonistów – przekonaniom.

Tezy matematyczne. Tym co wyróżnia intuicjonizm spośród innych kierunków w podstawach matematyki, jest stworzona przez intuicjonistów oryginalna matematyka. Kierując się wyłożonymi wyżej poglądami natury ogólnej intuicjoniści odrzucili znaczną część Cantorowskiej teorii mnogości, odrzucili też szereg twierdzeń z klasycznych działów matematyki, np. analizy. Skonstruowali oni własną matematykę operując odmiennymi od zwykle przyjmowanych pojęciami zbioru, ciągu, funkcji itp. Intuicjonistyczne definicje ciągu, „gatunku", etc. podane zostały przez Brouwera w sposób niejasny; prowadzi się dzisiaj intensywne prace (S. C. Kleene, G. Kreisel, A. Troelstra) nad wyjaśnieniem tych pojęć i zinterpretowaniem ich w terminach teorii funkcji rekurencyjnych, czy specjalnie stworzonej teorii konstrukcji.

Poza omówionymi uprzednio poglądami dotyczącymi ciągu liczb naturalnych wskazać należy na zasadniczą dla matematyki intuicjonistycznej koncepcję ciągów nieskończonych jako danych przez kolejne wolne wybory, które nigdy się nie kończą. Prowadzi to do pojęcia ciągu wyborów (choice sequence), który otrzymujemy poprzez wybieranie jego elementów kolejno, jeden po drugim. Specjalnie ważnym rodzajem ciągu wyborów są tzw. rozwinięcia (spread), które są ciągami wyborów ograniczonymi przez pewnego rodzaju nałożone na swobodę wyborów zasady ograniczające. Stosowanie ciągów wyborów do liczb wymiernych prowadzi do intuicjonistycznej koncepcji continuum, a w rezultacie do intuicjonistycznej analizy.

Odpowiednikiem pojęcia zbioru jest pojęcie gatunku (species) wyznaczonego przez formuły (własności) przy respektowaniu pewnych ograniczeń. Dozwolonymi są jedynie gatunki predykatywne, czyli takie, których elementy są określone niezależnie od definicji czy własności gatunków samych.

W ostatnim dwudziestoleciu prowadzono szczególnie intensywne prace nad rozwinięciem poszczególnych teorii intuicjonistycznych. Otrzymano w ten sposób rozbudowaną i bogatą dziedzinę, która jest konkurencyjna dla matematyki klasycznej w dwojakim sensie słowa. Matematyka intuicjonistyczna jest nie tylko pewną alternatywą dla matematyki klasycznej, ale także niektóre z wchodzących w jej skład teorii są sprzeczne z logiką klasyczną, nie mogą więc zarazem być akceptowane wraz z matematyką klasyczną.

Idee intuicjonistyczne uległy niewielkiej ewolucji w ciągu ostatnich sześćdziesięciu lat, rozbudowano zaś znacznie wyprowadzone z nich teorie matematyczne, tworząc bogatą i wyrafinowaną dziedzinę – matematykę intuicjonistyczną. Intuicjonizm nie ma wielu konsekwentnych wyznawców, wywiera jednak wielki wpływ na badania nad podstawami matematyki.

L. E. J. Brouwer: *Collected works.* Vol. I. *Philosophy and foundations of mathematics.* Ed. by A. Heyting. 1975; D. van Dalen: *Lectures on intuitionism.* [W:] *Proceedings of Cambridge school of mathematical logic.* 1973; I. Dąmbska: *Idee kantowskie w neointuicjonizmie Brouwera.* [W:] „Acta Univ. Wratislav." 1976 nr 290; A. G. Dragalin: *Matiematiczeskij intuicijonizm.* 1979; M. Dummett: *Elements of intuitionism.* 1977; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory* (rozdz. IV); A. Heyting: *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.* „Erkenntnis" II 1931; – – *Intuitionism. An introduction.* Wyd. 3 1972; – – *Intuitionistic views on the nature of mathematics.* „Synthese" XXVII 1974; S. C. Kleene, R. E. Vesley: *The foundations of intuitionistic mathematics.* 1965; C. J. Posy: *Brouwer's constructivism.* „Synthese" XXVII 1974; A. Troelstra: *Principles of intuitionism.* 1969; – – *Choice sequences.* 1976; – – *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis.* 1973; Z. Zawirski: *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej.* „Kwart. Filoz." XVI 1946.

J. P.

inwersja (z łac. inversio). Wnioskowanie przebiegające według następujących praw logiki tradycyjnej:

$$SaP \rightarrow S'oP,\ SeP \rightarrow S'iP,\ SaP \rightarrow S'iP',\ SeP \rightarrow S'oP'.$$

Wnioskowanie według pierwszych dwóch praw jest inwersją częściową, zaś wnioskowanie według pozostałych praw jest inwersją zupełną. Przykłady: Każdy ptak jest uskrzydlony. Zatem: Pewne nie-ptaki nie są uskrzydlone. Żaden słoń nie jest wilkiem. A więc: pewne nie-słonie nie są nie-wilkami. Inwersja jest jedną z form tzw. *wnioskowania bezpośredniego.

Kotarbiński: *Elementy.*

M. P.

izomorfizm relacji (podobieństwo relacji). Relacja R ustala izomorfizm relacji S i T (odwzorowuje izomorficznie relację S na relacji T) wtedy i tylko, gdy spełnione są następujące warunki: 1° R jest *relacją wzajemnie jednoznaczną, 2° *pole relacji S zawiera się w *dziedzinie relacji R, 3° pole relacji T zawiera się w *przeciwdziedzinie relacji R oraz 4° jeżeli R zachodzi między x_1 i x_2 oraz między y_1 i y_2, to S zachodzi między x_1 i y_1 wtedy i tylko, gdy T zachodzi między x_2 i y_2. Jeżeli istnieje relacja odwzorowująca izomorficznie relację S na relacji T, to S i T nazywamy relacjami izomorficznymi albo podobnymi. Przykład: relacje większości i mniejszości zachodzące między liczbami rzeczywistymi są izomorficzne; ich izomorfizm ustala relacja, która zachodzi między liczbami x i y wtedy i tylko, gdy $y = -x$.

Pojęcie izomorfizmu odgrywa w *teorii relacji analogiczną rolę, jak pojęcie *równoliczności w teorii zbiorów. Ponieważ izomorfizm jest relacją *równoważnościową, dokonuje podziału zbioru wszystkich relacji zawartych w relacji pełnej na *klasy abstrakcji tego stosunku. Klasy te nazywamy liczbami relatywnymi; są one tym samym dla relacji, czym liczby kardynalne są dla zbiorów.

B. S.

jasność.
(1) Typowym dla tego terminu kontekstem jest zwrot „jasne rozumienie nazwy". Ten rozumie jasno jakąś *nazwę, kto umie ją trafnie stosować, tzn. rozstrzygać o dowolnym przedmiocie, o ile zna dostatecznie jego cechy, czy przedmiot ten należy, czy też nie należy do *zakresu danej nazwy. Takie rozumienie terminu „jasność" występuje m. in. w *Elementach* Kotarbińskiego i w *Propedeutyce* Ajdukiewicza. Analogicznie można powiedzieć o wyrażeniu z innej kategorii niż nazwy, że ten rozumie je jasno, kto potrafi je właściwie stosować. Im więcej jest różnych sytuacji, w których ktoś potrafi stosować trafnie jakieś słowo, tym wyższym stopniem jasności odznacza się jego rozumienie owego słowa. Ilustracją różnych stopni jasności w rozumieniu np. terminów logicznych może być sposób posługiwania się nimi przez początkującego studenta i przez wykładowcę logiki. Wyrażenie rozumiane w sposób jasny musi odznaczać się cechą, którą się określa jako znaczenie wyraźne. Kto umie trafnie rozpoznawać desygnaty danej nazwy, np. nazwy „kot", ale nie potrafi wymienić *cech charakterystycznych jej desygnatów, ten rozumie ją w sposób jasny, lecz niewyraźny.
(2) Innym kontekstem, w którym mówi się o jasności lub niejasności, są zwroty w rodzaju „niejasna wypowiedź", „x wyraża się jasno", itp. Może to znaczyć, że autor wypowiedzi rozumie w jasny sposób, w sensie wyjaśnionym wyżej, słowa, którymi się posługuje. Czasem jednak niejasność określa się nie przez stan umysłu nadawcy (autora) wypowiedzi, ale stan umysłu jej odbiorcy, polegający na niedostatecznym rozumieniu danej wypowiedzi. Tak pojęta „niejasność" to tyle, co „niezrozumiałość"; musi być ona oczywiście zrelatywizowana do jakiejś klasy odbiorców (zob. Czeżowski).
Termin „niejasność" w znaczeniu pochodzącym od „jasność" (1) bywa używany zamiennie z terminem „nieostrość" (zob. Ajdukiewicz). Określimy więc jakąś nazwę (lub predykat) jako nieostrą, gdy istnieją takie przedmioty, o których nie da się rozstrzygnąć na podstawie reguł znaczeniowych (lub postulatów znaczeniowych) danego języka, czy są, czy też nie są desygnatami owej nazwy (predykatu). Wyrazistą odmianę nazw nieostrych stanowią takie, które mają w swej *konotacji jakąś cechę stopniowalną, np. „długi", „cierpliwy", „tłum" itp. Tematyka nazw nieostrych ma obszerną literaturę, w której rozważa się zagadnienia ontologiczne (płynność, zmienność czy charakter ciągły rzeczy, procesów itp.), lingwistyczne (zob. np. Rieger) oraz logiczne: sposoby definiowania wyrażeń nieostrych (*definicja cząstkowa itp.), ich stosunek do prawa wyłączonego środka, związek z problemami pomiaru i problemami prawdopodobieństwa, stosunek do tzw. zbiorów rozmytych (zob. Zadeh) i in.

K. Ajdukiewicz: *Propedeutyka filozofii*. 1950; – – *Log. pragm.*; M. Black: *Vagueness*. [W:] – – *Language and Philosophy*. 1949; T. Czeżowski: *Zarzut niejasności*. [W:] – – *Odczyty filozoficzne*. 1958; Kotarbiński: *Elementy*; T. Kubiński: *Nazwy nieostre*. „St. Log." VII 1958; G. Lakoff: *Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts*. „Journ. of Philosoph. Logic" II 1973; M. Przełęcki: *W sprawie terminów nieostrych*. „St. Log." VIII 1958; – – *Z semantyki pojęć otwartych*. „St. Log." XIV 1963 a także w *Sem. pol.*; B. Rieger: *Vagheit als Problem der linguistischen Semantik*. [W:] W. D. Bald (wyd.): *Semantik und Pragmatik*. 1976 (Tübingen, Niemeyer); B. Russell: *Vagueness*. „Austr. Journ. of Psychol. a. Philos." I 1923; A. Schaff: *Granice precyzowania wyrażeń nieostrych*. [W:] – – *Szkice z marksistowskiej filozofii języka*. 1967; – – *Wyrazy nieostre*. [W:] *Sem. log.*; L. A. Zadeh: *Fuzzy sets*. „Inform. a. Control" VIII 1965.

W. M.

Jaśkowski Stanisław (1906–1965). Od r. 1945 profesor Uniw. Mikołaja Kopernika w Toruniu, w 1956 wybrany tamże rektorem. Zainteresowania S. Jaśkowskiego dotyczyły nie tylko logiki, lecz także matematyki, a w szczególności problemów algebry oraz podstaw geometrii i arytmetyki. Zajmował się też intensywnie zagadnieniami nauczania i popularyzacji matematyki. Do najważniejszych rezultatów osiągniętych na polu logiki matematycznej należą: nowe ujęcie rachunku logicznego, pod nazwą *dedukcji naturalnej, konstrukcja adekwatnych matryc dla intuicjonistycznego rachunku zdań (*Logiki wielowartościowe) oraz dowody rozstrzygalności lub nierozstrzygalności niektórych ważnych teorii matematycznych.
Tym i innym problemom poświęcone są (podane tu przykładowo) następujące prace: *On the rules of supposition in formal logic*, 1934; *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*. „Actes du Congres International de Philosophie Scientifique" VI 1936; *Z badań nad rozstrzygalnością rozszerzonej algebry Boole'a*. „*Časopis pro pestovani matematiky a fizyky*" LXXIV 1949; *On the modal and causal functions in symbolic logic*. „Studia Philosophica" IV 1951.

W. M.

jednoczesne zaprzeczenie. Zdanie złożone (lub *funkcja zdaniowa) utworzone przy pomocy *funktora, który bywa oznaczany symbolem „↓" i charakteryzuje się następującą tabelką (matrycą):

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Jednoczesne zaprzeczenie jest więc prawdziwe tylko wtedy, gdy oba składniki są fałszywe, w pozostałych przypadkach jest zdaniem fałszywym. Zwrot $p \downarrow q$ może być odczytywany: ani p, ani q. Wystarcza on (podobnie jak *dysjunkcja) do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów prawdziwościowych. Negację ($\sim p$) określa się jako $p \downarrow p$, alternatywę ($p \vee q$) jako $\sim (p \downarrow q)$, koniunkcję jako $\sim p \downarrow \sim q$.

Mostowski: *Log. mat.*; Quine: *ML.*

W. M.

język. Języki dzieli się na naturalne i sztuczne. Język sztuczny, czyli formalny (w jednym ze znaczeń tego słowa) jest to zbiór wyrażeń określony przez listę wyrażeń pierwotnych (niezdefiniowanych) oraz przez reguły składni, na które składają się: reguły tworzenia (formowania) wyrażeń i reguły przekształcania (transformowania) wyrażeń. Pierwsze podają, jak tworzyć z wyrażeń mniej złożonych bardziej złożone, drugie podają, jak przekształcać wyrażenia, by w wyniku przekształceń dziedziczyła się pewna ich własność, np. własność bycia *tautologią.

Jeśli język scharakteryzowany jest tylko przez słownik i reguły składni, nie ma on jeszcze odniesienia do rzeczywistości – mówiąc dokładniej: nie ma *interpretacji. Odniesienie to powstaje przez dołączenie reguł semantycznych, które przyporządkowują wyrażeniom języka odpowiednie elementy modelu, czyli, mówiąc swobodniej, jakiejś rzeczywistości pozajęzykowej. Przykładów takich reguł dostarcza m. in. system semantyczny Carnapa w *Meaning and Necessity*.

Zamiast reguł semantycznych określających warunki prawdziwości zdań wprowadza się niekiedy reguły uznawania zdań, należące nie do semantyki, lecz do pragmatyki języka. Takie ujęcie zawiera praca K. Ajdukiewicza *Język i znaczenie* (*Znaczenie–(5b)).

Języki naturalne są domeną badań lingwistycznych. Z punktu widzenia logiki charakteryzuje się często języki naturalne przez przeciwstawienie do języków sztucznych. Język naturalny odróżnia się od sztucznego przez: 1° sposób powstania – spontaniczny, nieplanowany, dokonujący się w toku wielowiekowych procesów; 2° uniwersalność – w języku naturalnym można mówić o nim samym, nie ma więc odróżnienia języka od *metajęzyka, co bywa źródłem *antynomii (spostrzeżenie Tarskiego); 3° obecność wyrażeń wprowadzanych drogą *definicji ostensywnych; 4° obecność *wyrażeń okazjonalnych; 5° zmienność *funkcji semiotycznych i *kategorii semantycznych w zależności od kontekstu i sytuacji; 6° duży nadmiar (redundacja) środków komunikowania (parafrazy, powtórzenia itp.), co zwiększa szansę pokonywania zakłóceń przy przekazywaniu informacji. Nie każde z tych przeciwstawień odnosi się do wszelkich języków naturalnych lub sztucznych, ale w sumie dają one pojęcie o najbardziej typowych różnicach.

Języki utworzone na wzór naturalnych, np. esperanto, mają w zasadzie powyższe cechy języków naturalnych, z wyjątkiem pierwszej. Kiedy więc określa się je jako sztuczne, używa się tego słowa w innym sensie, nawiązującym tylko do ich genezy.

K. Ajdukiewicz: *Język i znaczenie*. [W:] *JiP*. T. 1; Carnap: *MaN*; Morris: *Foundations*; J. Pelc: *Funkcjonalne podejście do semiotyki logicznej języka naturalnego* „St. Filoz." 1967 nr 2; Tarski: *Pojęcie prawdy*.

W. M.

język przedmiotowy (j. pierwszego stopnia). Język, którego wyrażenia odnoszą się do przedmiotów spoza języka, np. przedmiotów matematycznych, zjawisk przyrodniczych, społecznych itp. Od języka przedmiotowego odróżnia się *metajęzyk, tj. język o języku.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; *Grzegorczyk*: *Log. mat.*

W. M.

język sformalizowany. Język, dla którego został wyraźnie określony słownik i składnia logiczna. Od tak pojętego języka sformalizowanego należy odróżniać język formalny (w pewnym znaczeniu tego słowa), tj. taki, którego wyrażenia pozbawione są znaczeń i traktowane jako przedmioty o własnościach wyłącznie geometrycznych. Język formalny to – inaczej mówiąc – język pozbawiony *interpretacji.

Mostowski: *Log. mat.* Tarski: *Pojęcie prawdy*.

W. M.

kategoria semantyczna. Wyrażenia X, Y należą do tej samej kategorii semantycznej języka J wtedy i tylko, gdy po zastąpieniu X przez Y (lub odwrotnie) w dowolnym wyrażeniu sensownym języka J wyrażenie to nadal pozostaje sensowne. Z zachowaniem sensowności nie musi łączyć się zachowanie prawdziwości. I tak, wyrażenia „lub" i „jeśli" należą do tej samej kategorii semantycznej, ponieważ przy przekształceniu np. zdania „Pada lub wieje" na zdanie „Pada, jeśli wieje" zostaje zachowana sensowność. Nie można zaś np. zastąpić „*lub*" przez „*każdy*", bo prowadziłoby to do nonsensu; a zatem „każdy" i „lub" należą do różnych kategorii semantycznych.

Przymiotnik „semantyczna" należy brać tutaj w szerszym rozumieniu (*Semantyka – (1)), nie przesądzającym czy ma się do czynienia ze stosunkiem syntaktycznym lub pragmatycznym. W innym przypadku podane wyżej określenie kategorii semantycznej należałoby uznać za nietrafne, odwołuje się ono bowiem do syntaktycznego pojęcia sensowności i tym samym definiuje, jeśli brać rzecz dokładniej, pojęcie kategorii syntaktycznej. Używanie słowa „semantyczna" jest więc mylące ze względu na jego dwuznaczność, zwłaszcza że istnieje problem wzajemnego stosunku między pojęciem kategorii syntaktycznej, a pojęciem kategorii semantycznej w specjalnym, tj. węższym, rozumieniu terminu „semantyczna" (por. uwagi końcowe). Ponieważ jednak ów sposób mówienia jest szeroko rozpowszechniony oraz zakorzeniony w dotychczasowej tradycji, uzasadnia to posłużenie się raczej tym niż innym zwrotem w roli sformułowania tytułowego.

Wyróżnia się kategorie semantyczne podstawowe oraz funktorowe (*Funktor). Do podstawowych należą zdania (również zmienne zdaniowe, funkcje zdaniowe) oraz nazwy (zmienne i funkcje nazwowe). Oprócz wymienionych wyróżnia się często jako osobną kategorię (nie-podstawową) tzw. operatory, których rola polega na wiązaniu zmiennych (kwantyfikatory, operator abstrakcji, operator deskrypcji itp.). Kategorie funktorów stanowią rozgałęzioną hierarchię, w której o przynależeniu do określonej kategorii decyduje: 1° z iloma i jakimi (tj. jakiej kategorii) argumentami łączy się dany funktor; 2° do jakiej kategorii należy wyrażenie powstałe z tego połączenia. Każdą kategorię funktorową można krótko scharakteryzować przy pomocy wskaźnika o budowie ułamka, gdzie nad kreską podaje się kategorię semantyczną wyrażenia, jakie tworzy ów funktor ze swymi argumentami, zaś pod kreską kategorie semantyczne argumentów. Np. $^{z}/_{nn}$ to tyle, co: funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych; do tego rodzaju funktorów należy słowo „jest". Wskaźnik $^{z}/_{n}$ jest charakterystyką funktora tworzącego zdanie wraz z jednym argumentem nazwowym; np. „grzeje" w zdaniu „Słońce grzeje". W zdaniu „Słońce grzeje mocno" funktorem jest wyrażenie złożone „grzeje mocno". Ponieważ słowo „mocno" jest funktorem, który – jak widać z powyższego złożenia – tworzy ze słowem „grzeje" nowy funktor (zdaniotwórczy), przypada mu bardziej skomplikowany wskaźnik: $^{z/n}/_{z/n}$. Licznik tego ułamka wskazuje, że powstający w wyniku złożenia zwrot „grzeje mocno" należy do kategorii funktorów zdaniotwórczych od jednego argumentu nazwowego („słońce"); mianownik zaś wskazuje, że argumentem rozważanego funktora „mocno" jest funktor zdaniotwórczy („grzeje") od jednego argumentu nazwowego. W nazwie złożonej tego typu, co „ojciec Jana", ang. „the father of John", rolę funktora nazwotwórczego pełni: w ang. „the father of...", w polskim zaś słowo „ojciec..." (dokładniej: „ojciec" wraz z końcówką dopełniaczową w słowie „Jan", będącą odpowiednikiem gramatycznym ang. „of"). Funktor ów ma zatem wskaźnik: $^{n}/_{n}$. Wyróżnia się też funktory o wskaźnikach $^{n}/_{nn}$, $^{n}/_{z}$, $^{z}/_{nz}$ i in.

Liczba kategorii semantycznych jest różna w różnych językach. Np. w ontologii Leśniewskiego (*Systemy Leśniewskiego) istnieje tylko jedna kategoria nazw. W językach, w których odróżnia się nazwy nadające się tylko na podmioty i nazwy nadające się także na orzeczniki, przesądza się tym samym na rzecz dwóch kategorii semantycznych nazw. Tzw. nazwy abstrakcyjne mogą być traktowane jako jeszcze jedna kategoria.

Idea kategorii semantycznych, czyli znaczeniowych pochodzi od Husserla („Bedeutungskategorien"). Podjął ją i rozwinął Leśniewski, w którego ujęciu stała się środkiem zabezpieczającym język, w sposób analogiczny do *teorii typów, przed pojawieniem się *antynomii (nie wszystkie jednak antynomie, zdaniem Leśniewskiego, biorą się z pomieszania kategorii; niektóre, twierdził, są spowodowane przez naruszenie reguł definiowania). Zwolennikami i kontynuatorami tej teorii byli Ajdukiewicz, Kotarbiński, Tarski i in. Od Ajdukiewicza pochodzi metoda charakteryzowania kategorii przez wskaźniki i jej zastosowanie do badania sensowności (spójności syntaktycznej) wyrażeń.

Leśniewski mógł używać terminu „kategoria semantyczna" nawet w sensie ściślejszym, tj. pochodnym od „*semantyka – (2)", ponieważ w rozważanych przez niego językach, jak również w innych językach sztucznych, zachodzi przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne

między kategoriami syntaktycznymi a kategoriami semantycznymi w owym sensie ściślejszym. Te ostatnie definiuje się przez podanie rodzaju przedmiotów stanowiących *denotacje wyrażeń z danej kategorii; denotacjami wyrażeń z kategorii zdań są (przy pewnym ujęciu) *wartości logiczne, denotacjami nazw ogólnych są zbiory itd. Przy takim przyporządkowaniu każde wyrażenie pozbawione sensu semantycznego jest również bezsensowne syntaktycznie, i odwrotnie. Ale, zdaniem niektórych autorów (zob. Chomsky), w językach naturalnych (*Język) wyrażenia z tej samej kategorii syntaktycznej mogą mieć odmienną kategorię semantyczną. Zachodzi to wtedy, gdy zamiana jednego wyrażenia na inne w jakimś zdaniu nie czyni tego zdania niespójnym syntaktycznie, pozbawia je natomiast sensowności rozumianej w sposób semantyczny. Jeśli w zdaniu „Małe dzieci śpią długo" zastąpić „dzieci" np. przez „liczby", a „długo" przez „pomarańczowo", to otrzyma się wyrażenie bez sensu (semantycznego), choć poprawne gramatycznie, czyli sensowne w rozumieniu syntaktycznym. Problem ten jednak pozostaje otwarty ze względu na niedostateczne sprecyzowanie takich pojęć, jak „sensowność semantyczna".

Zwraca się uwagę (zob. Pelc), że w językach naturalnych nie da się przeprowadzić podziału wyrażeń na „czyste" kategorie semantyczne. Własność należenia do pewnej kategorii bywa stopniowalna w tym sensie, że niektóre wyrażenia mogą mieć w jakimś stopniu np. cechy *deskrypcji i w jakimś stopniu cechy *imion własnych. Ponadto, zaliczać do określonej kategorii można tylko wyrażenie przez kogoś użyte, w zależności bowiem od sposobu użycia to samo (co do kształtu) wyrażenie może być imieniem własnym lub deskrypcją, nazwą ogólną lub jednostkową (w ang. i in. językach na intencję mówiącego wskazuje przedimek lub rodzajnik), itd. Teoria kategorii semantycznych jest więc dla języków naturalnych pewną idealizacją, której stosowanie do opisu tych języków wymaga uwzględnienia rozmaitych zastrzeżeń.

K. Ajdukiewicz: *O spójności syntaktycznej*. [W:] *JiP*. T. 1; – – *W sprawie „uniwersaliów"*. [W:] *JiP*. T. 1; – – *Związki składniowe między członami zdań oznajmujących*. [W:] *JiP*. T. 2; Y. Bar-Hillel: *On syntactical categories*. „JSL" XV; N. Chomsky: *Aspects of the theory of syntax*. 1965; E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. T. 2 cz. 1 1900/1; Kotarbiński: *Elementy*; J. Pelc: *Funkcjonalne podejście do semiotyki logicznej języka naturalnego*. „St. Filoz." 1967 nr 2; R. Suszko: *O kategoriach syntaktycznych i denotacjach wyrażeń w językach sformalizowanych*. [W:] *Rozpr. log.*; Tarski: *Pojęcie prawdy*, par. 4.

W. M.

kategoryczność teorii.

(1) Teoria dedukcyjna jest kategoryczna, gdy jest niesprzeczna (a więc ma *model) oraz jeżeli każde dwa modele tej teorii są między sobą izomorficzne (*Izomorfizm relacji). Takie pojęcie kategoryczności jest odpowiednikiem intuicyjnego pojęcia całkowitego scharakteryzowania terminów pierwotnych przez aksjomaty, czyli jednoznacznej charakterystyki przedmiotu (modelu) teorii. Warunku tego nie spełniają teorie sformułowane w języku pierwszego rzędu mające modele nieskończone (np. elementarna arytmetyka Peano), udowodniono bowiem o takich teoriach twierdzenie, że mają one modele dowolnie wysokich mocy. Ponieważ zaś dwa modele różnych mocy nie są między sobą równoliczne, nie mogą być też izomorficzne. Ze względu na teorie posiadające modele nieskończone, utworzono pojęcie słabsze, tzw. kategoryczności w mocy, które określa się następująco.

(2) Teoria nazywa się kategoryczną w mocy m wtedy i tylko, gdy: 1° ma model o mocy m; 2° dowolne dwa modele tej teorii o mocy równej liczbie kardynalnej m są izomorficzne. Tak np. elementarna teoria mniejszości, jak również elementarna teoria „leżenia między" są kategoryczne w mocy przeliczanej. Jeśli każdy model danej teorii jest nieskończony i jest ona kategoryczna w pewnej mocy nieskończonej, to jest zupełna (*Zupełność – (1)).

Przy pewnej modyfikacji pojęcia modelu (zob. Grzegorczyk) otrzymuje się jeszcze inne pojęcie kategoryczności, takie że kategoryczność może cechować również teorie mające modele nieskończone i nie będące kategorycznymi w sensie (1) lub (2); dotyczy to teorii nieelementarnych, np. *arytmetyki nieelementarnej liczb naturalnych.

Grzegorczyk: *Log. mat.*; – – *On the concept of categoricity*. „St. Log." XIII 1962; Mostowski: *Log. mat.*

W. M.

klasy abstrakcji (kl. równoważności, cechy abstrakcji). Klasą abstrakcji *relacji równoważnościowej R wyznaczoną przez elementy y zbioru X nazywamy zbiór tych elementów zbioru X, które pozostają w relacji R do y; przy ustalonym X oznaczamy ją symbolem $[y]_R$ i zapisujemy powyższą definicję symbolicznie w postaci: $x \in [y]_R \equiv xRy$. Przykład: klasą abstrakcji relacji rówieśnictwa wyznaczoną przez daną osobę (jako element zbioru wszystkich ludzi) jest zbiór tych ludzi, którzy są rówieśnikami tej osoby. Utożsamiając zbiór z własnością wspólną wszystkich jego elementów powiemy, że klasy abstrakcji danej relacji równościowej reprezentują sobą poszczególne odmiany tej własności, pod względem której relacja ta porównuje przedmioty rozważanego zbioru; w naszym przykładzie własnością tą jest wiek, a jej wskazaną odmianą – własność posiadania tylu lat, ile ma osoba, o której mowa.

Ponieważ dwie różne klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważnościowej w danym zbiorze są rozłączne, a suma wszystkich klas abstrakcji jest zawsze równa temu zbiorowi, więc każda relacja równoważnościowa w zbiorze X wyznacza pewien *podział logiczny tego zbioru – taki mianowicie, którego członami są zbiory przedmiotów pozostających do siebie nawzajem w tej relacji, a więc wszystkie jej klasy abstrakcji. Zachodzi także zależność

odwrotna: każdy podział dowolnego (niepustego) zbioru X wyznacza relację, która jest równoważnością w X, i która zachodzi między dwoma elementami zbioru X wtedy i tylko, gdy należą one do tego samego członu owego podziału. Np. relacji równobarwności, która jest równoważnością w zbiorze przedmiotów fizycznych, odpowiada podział tego zbioru na klasę przedmiotów czerwonych, klasę przedmiotów zielonych itd.; podział ten jest rodziną klas abstrakcji relacji równobarwności.
Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

klasyczny rachunek logiczny. *Klasyczny rachunek zdań łącznie z *rachunkiem kwantyfikatorów pierwszego rzędu (z dołączonym, ewentualnie, pojęciem identyczności i symbolami funkcyjnymi). Klasyczny rachunek logiczny (w skrócie: k. r. l.) zwany też klasycznym systemem logiki lub logiką elementarną, wystarcza do opisu wszystkich metod wnioskowania spotykanych w matematyce.
Zob. też **logika formalna – 4.**
Beth: *Foundations*; Grzegorczyk: *Log. mat.*

W. M.

klasyczny rachunek zdań (w skrócie: k.r.z.). Dwuwartościowy *rachunek zdań (*Wartość logiczna), w którym jedynymi *stałymi logicznymi są *funktory prawdziwościowe.

W. M.

klasyfikacja nauk.
1. Historia zagadnienia. Ze starożytnych najbardziej znana jest Arystotelesa klasyfikacja nauk, wg której ogół nauk dzieli się na nauki teoretyczne i nauki praktyczne. W skład nauk teoretycznych wchodziły: fizyka, matematyka i metafizyka. Do nauk praktycznych zaliczano: etykę, politykę, poetykę.
W średniowieczu popularny był podział nauk na teologiczne i „świeckie", zwane sztukami wyzwolonymi (łac. artes liberales), wśród których wyróżniono dwie grupy: tzw. 'trivium' (łac.; trójka) i 'quadrivium' (łac.; czwórka). Pierwszą grupę stanowiły nauki o charakterze humanistycznym: gramatyka, retoryka i dialektyka, czyli logika. Do drugiej grupy zaliczano nauki matematyczno-przyrodnicze: arytmetykę, geometrię, astronomię i muzykę.
W czasach nowożytnych znana była, utworzona przez Franciszka Bacona, klasyfikacja nauk, ściślej mówiąc, klasyfikacja wszelkich tworów myślowych (nie tylko nauk). Dzielą się one na trzy grupy, odpowiednio do trzech władz duszy. Rozumowi odpowiadają nauki filozoficzne, pamięci – historyczne, wyobraźni – poezja. Dokładniej mówiąc, jest to podział wszelkich tworów myślowych na: doktrynalne, historyczne i poetyckie. Wyróżnione w ten sposób grupy podlegają dalszym podziałom i podpodziałom. Klasyfikacja ta wywarła duży wpływ na klasyfikację nauk d'Alemberta, zamieszczoną we wstępie do *Wielkiej encyklopedii francuskiej*.
Z czasów nowszych pochodzi klasyfikacja nauk Augusta Comte'a. Jest to uszeregowanie nauk ze względu na ich wzajemną zależność oraz ogólność i złożoność. Najogólniejsza, a zarazem niezależna od innych, jest matematyka (arytmetyka, geometria, mechanika), później idą kolejno: astronomia, fizyka, chemia, biolgia i socjologia. Ta ostatnia jest najmniej ogólna, a zarazem najbardziej złożona i zależna od pozostałych. Każda bowiem mniej ogólna zakłada wszystkie ogólniejsze.
Z dziewiętnastowiecznych klasyfikacji zasługuje na wzmiankę klasyfikacja dziesiętna Deweya, robiona z myślą zastosowania jej do porządkowania księgozbiorów. Ściśle biorąc, nie jest to klasyfikacja nauk, lecz klasyfikacja piśmiennictwa. Najpierw dzieli się je na dziesięć grup oznaczonych numerami: 0 – dzieła ogólne, 1 – filozofia, 2 – religia, 3 – socjologia, 4 – filologia, 5 – przyrodoznawstwo, 6 – umiejętności użytkowe, 7 – sztuki piękne, 8 – literatura, 9 – historia.
Każda grupa została podzielona na dziesięć działów oznaczonych dwucyfrowymi numerami. Uzyskane w ten sposób działy podlegały dalszym podziałom itd. Klasyfikacja Deweya poddana pewnym modyfikacjom, jako tzw. Uniwersalna Klasyfikacja Dziesiętna ma po dziś dzień szerokie zastosowanie w bibliotekarstwie i informacji naukowo-technicznej i ekonomicznej.
2. Współczesna klasyfikacja nauk. Ogół nauk dzieli się najpierw na dwie grupy; jedną z nich stanowią nauki matematyczne i logika formalna, a drugą wszystkie pozostałe nauki. Ten podstawowy podział przeprowadza się z różnych punktów widzenia mianowicie:
1° ze względu na sposób uzasadnienia twierdzeń pierwotnych, tj. twierdzeń nie wywnioskowanych z innych, zwanych również przesłankami pierwotnymi danej nauki. W ten sposób wyróżnia się nauki aprioryczne i nauki aposterioryczne;
2° ze względu na sposób uzasadnienia twierdzeń pochodnych, tj. twierdzeń wywnioskowanych z innych. W wyniku tego podziału ogół nauk dzieli się na nauki dedukcyjne i nauki indukcyjne (empiryczne);
3° ze względu na przedmiot dzieli się wszystkie nauki na formalne i realne.
W myśl tych trzech pokrywających się zakresowo podziałów matematyka i logika formalna są to nauki aprioryczne, dedukcyjne i formalne zarazem. Wszystkie pozostałe nauki są to nauki aposterioryczne, indukcyjne (empiryczne) i realne zarazem.
Nauki aprioryczne i nauki aposterioryczne. Podział ten odpowiada podziałowi zdań na zdania a priori i zdania a posteriori. Zdania *a priori są to zdania, których prawdziwość można ustalić bez odwoływania się do do-

świadczenia zmysłowego, np. zdania: „Suma dwu boków trójkąta jest większa niż bok trzeci". „Jeżeli każde *M* jest *P* i każde *S* jest *M*, to każde *S* jest *P*". Natomiast zdania a posteriori są to zdania, które się uznaje ze względu na (odpowiednie) doświadczenie. Inaczej mówiąc, są to zdania oparte na doświadczeniu bądź bezpośrednio (zdania obserwacyjne), np.: „Ten oto kwiat jest czerwony", bądź pośrednio (zdania nieobserwacyjne), np.: „Każda róża ma kolce".

W naukach apriorycznych w roli twierdzeń pierwotnych występują wyłącznie zdania a priori. W naukach aposteriorycznych twierdzeniami pierwotnymi są przede wszystkim zdania a posteriori, obserwacyjne, zarówno oparte na doświadczeniu zewnętrznym, np. zdanie: „Słyszę (w tej chwili) muzykę z płyt", jak i zdanie oparte na doświadczeniu wewnętrznym, np. zdanie: „Czuję (w tej chwili) ból zęba". Pewne zdania aprioryczne, np. definicje, też niekiedy pełnią rolę przesłanek w naukach aposteriorycznych.

Nauki dedukcyjne i nauki indukcyjne (empiryczne). W naukach dedukcyjnych uzasadnianie twierdzeń pochodnych polega na ich dedukcyjnym wywnioskowaniu z twierdzeń już uznanych za prawdziwe.

W naukach indukcyjnych podstawową metodą uzasadniania twierdzeń jest *indukcja enumeracyjna, obok innych form wnioskowania niededukcyjnego. Indukcja enumeracyjna polega na tym, że ze zdań jednostkowych typu S_1 jest P, S_2 jest P, ... S_n jest P, wyprowadza się wniosek ogólny: każde S jest P (o ile nic nie wiadomo, jakoby jakieś S nie było P). Istnieje pogląd, że indukcja enumeracyjna nie jest podstawową metodą uzasadniania twierdzeń w rozważanych tu naukach. Zwolennicy tego poglądu w miejsce terminu „nauki indukcyjne" posługują się terminem „nauki empiryczne" (*Metodologia nauk empirycznych).

Nauki formalne i nauki realne. Nauki formalne zajmują się badaniem świata form, takich jak twory matematyki i logiki. Nauki realne badają rzeczywistość materialną, realną.

Nauki drugiej grupy (aposterioryczne, indukcyjne, realne) poddawane są następnie trzem niezależnym od siebie podziałom, w wyniku których wyróżnia się: nauki przyrodnicze i humanistyczne, nauki nomotetyczne (nomologiczne) i idiograficzne oraz nauki nomotetyczne i typologiczne.

Nauki przyrodnicze i nauki humanistyczne. Podstawą podziału jest przedmiot badań poszczególnych nauk. Nauki przyrodnicze, np. fizyka, chemia, biologia, geodezja, mineralogia, astronomia, badają wytwory przyrody. Nauki humanistyczne, np. psychologia (w sensie tzw. psychologii rozumiejącej), socjologia, ekonomia, prawo, historia, filologia, nauki o sztuce, nauki o nauce – badają wytwory człowieka.

Nauki nomotetyczne (nomologiczne), idiograficzne, typologiczne. Ze względu na zadania stawiane naukom realnym dzieli się je bądź na nomotetyczne i idiograficzne, bądź na nomotetyczne i typologiczne. Nauki nomotetyczne to te, których zadaniem jest formułowanie praw (gr. *νομος* – prawo). Taki charakter ma znaczna większość nauk przyrodniczych, np. fizyka, chemia, mineralogia. Nauki idiograficzne (gr. *ἰδιος* – jednostkowy) dążą do poznania i opisu faktów jednostkowych w ich konkretnej postaci. Przykładem takiej nauki jest, według jednych, historia. Według innych nie ma w ogóle – ściśle biorąc – nauk idiograficznych; naukom nomotetycznym przeciwstawia się nauki typologiczne, tj. nauki, które zmierzają do ustalania typów, czyli konstruowania *typologii. Przez typ rozumie się najczęściej wzorcowy zespół cech występujących w grupie pokrewnych sobie przedmiotów. Ten zespół cech nazywany jest typem idealnym, jeżeli w poszczególnych przedmiotach tej grupy występuje tylko część cech tego zespołu (nie istnieje więc w rzeczywistości przedmiot posiadający w pełni wszystkie cechy tego zespołu). Przykładem może tu być „homo oeconomicus" – człowiek kierujący się jedynie motywem zysku pieniężnego i działający całkowicie racjonalnie. Natomiast ten wzorcowy zespół cech występujących w grupie pokrewnych sobie przedmiotów nazywa się typem empirycznym, jeżeli w niektórych przedmiotach tej grupy (przynajmniej w jednym) występują wszystkie cechy tego zespołu. Ten najbardziej reprezentatywny egzemplarz danej grupy też bywa nazywany typem. Na przykład za typ empiryczny kościoła barokowego uchodzi kościół Gesù w Rzymie.

Przez typ rozumie się niekiedy również grupę przedmiotów, o których orzeka się pojęcie typologiczne. Za pomocą pojęć typologicznych opisuje się i ocenia badane egzemplarze z punktu widzenia występowania w nich cech „typowych" i ich intensywności, co pozwala na uszeregowanie tych przedmiotów jako mniej lub bardziej zbliżających się do obrazu idealnego.

K. Ajdukiewicz: *Metodologiczne typy nauk*. [W:] *JiP*. T. 1; – – *Logika pragm.*; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych*. 1959; – – *O naukach humanistycznych*. [W:] *Odczyty filozoficzne*. 1958; J. Giedymin: *Z problemów logicznych analizy historycznej*. 1961; – – *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia*. 1964; M. Handelsman: *Historyka*. 1928; S. Kamiński: *Pojęcie nauki i klasyfikacji nauk*. 1961; Kotarbiński: *Elementy*; I. Lazari-Pawłowska: *O pojęciu typologicznym w humanistyce*. „St. Filoz." 1958 nr 4; *W. Tatarkiewicz: Skupienie i marzenie*. 1951; O. Ungurian: *Wprowadzenie do uniwersalnej klasyfikacji dziesiętnej*. 1970.

M. P.

klasyfikacja rozumowań.

1. Klasyfikacja Łukasiewicza. Rozumowanie jest zdefiniowane jako „taka czynność umysłu, która na podstawie zdań danych, będących punktem wyjścia rozumowania, szuka zdań innych, będących celem rozumowania, a połączonych z poprzednimi stosunkiem wynikania". Inaczej:

rozumowanie jest to proces myślowy, w którym dla danego zdania dobiera się następstwo albo dobiera się rację. „Zdanie *A* jest racją dla zdania *B*" (*B* jest następstwem *A*) znaczy: „z *A* wynika logicznie *B*" (*Wynikanie logiczne). Ze względu na stosunek kierunku rozumowania do kierunku wynikania logicznego dzieli się rozumowania na dedukcyjne i redukcyjne.

Rozumowanie jest dedukcyjne, gdy kierunek rozumowania zgadza się z kierunkiem wynikania logicznego, tzn. gdy dana jest racja, a dobiera się następstwo.

Rozumowanie jest redukcyjne, gdy kierunek rozumowania i kierunek wynikania logicznego są sobie przeciwne, tzn. gdy dane jest następstwo, a dobiera się rację.

Rozumowanie dedukcyjne dzieli się na wnioskowanie i sprawdzanie ze względu na to czy dana racja jest zdaniem pewnym, czy zdaniem niepewnym. Przez zdanie pewne rozumie się zdanie uznane za prawdziwe.

Wnioskowanie jest dobieraniem następstw dla zdań pewnych. Przykład: Jeżeli dostanę bilety, to pójdziemy do teatru (a). Dostanę bilety (b). A więc: Pójdziemy do teatru (c). Zdania (a) i (b), stanowiące przesłanki, są racją dla zdania (c), które jest wnioskiem.

Sprawdzanie jest dobieraniem następstw pewnych dla zdań niepewnych. Przykład: Nauczyciel sprawdza, czy uczeń przeczytał zadaną lekturę. W tym celu zadaje mu szereg pytań związanych z treścią tej książki. Trafne odpowiedzi ucznia świadczą, że zna on treść tej książki. Jeżeli uczeń zna treść książki, to chyba ją czytał. Nie jest jednak wykluczone, że jej nie czytał. Treść książki mógł poznać w inny sposób, np. czytając recenzję tej książki. Zdaniem sprawdzanym (racją) jest zdanie: uczeń czytał książkę. Następstwem jest zdanie: uczeń zna treść książki.

Rozumowanie redukcyjne dzieli się na tłumaczenie i dowodzenie, ze względu na to czy następstwo będące punktem wyjścia jest zdaniem pewnym, czy niepewnym.

Tłumaczenie jest dobieraniem racji do zdania pewnego. Przykład: Stwierdzamy: zgasło światło. Na pytanie: dlaczego zgasło światło, odpowiadamy: przepaliły się korki, albo: żarówka się przepaliła. Odmianą tłumaczenia jest *indukcja niezupełna. Tak rozumuje na przykład ten, kto stwierdziwszy kolejno o wszystkich napotkanych blondynach, że mają niebieskie oczy, powziął przypuszczenie, że każdy blondyn ma niebieskie oczy.

Dowodzenie jest dobieraniem racji pewnej do zdania niepewnego. Dla udowodnienia np. że liczba 2862 jest podzielna przez 3, wystarczy powołać się na zasadę: przez 3 dzieli się każda liczba, której suma cyfr dzieli się przez 3, oraz stwierdzić, że suma cyfr 2862 dzieli się przez 3. Z tych zdań wynika zdanie, które ma być udowodnione.

Klasyfikacja powyższa ma m. in. tę wadę, że dowodzenie zalicza do redukcji, a sprawdzanie do dedukcji, wbrew przyjętemu powszechnie sposobowi rozumienia tych terminów.

2. Klasyfikacja Czeżowskiego. Jest to modyfikacja i rozwinięcie klasyfikacji Łukasiewicza. Tak samo jak u Łukasiewicza pojmuje się rozumowanie jako poszukiwanie racji dla następstw lub jako poszukiwanie następstwa dla racji. Inaczej natomiast dzieli się rozumowanie na dedukcyjne i redukcyjne.

Rozumowanie jest dedukcyjne, gdy racja jest zdaniem skądinąd już uznanym (za prawdziwe) i na podstawie tej racji uznaje się następstwo (wnioskowanie, dowodzenie).

Rozumowanie jest redukcyjne, gdy następstwo jest zdaniem skądinąd uznanym i na podstawie następstwa uznaje się rację (sprawdzanie, wyjaśnianie).

Wszelkie rozumowania dzieli się jeszcze na progresywne i regresywne oraz na odkrywcze i uzasadniające. Rozumowanie, w którym dana jest racja, a szuka się następstwa, jest progresywne (wnioskowanie, sprawdzanie). Regresywne natomiast jest rozumowanie, w którym dane jest następstwo, a szuka się racji (dowodzenie, wyjaśnianie). Rozumowanie jest odkrywcze, gdy dane jest zdanie już skądinąd uznane, a poszukuje się zdania dotychczas nie uznanego (wnioskowanie, wyjaśnianie). Uzasadniającym jest rozumowanie, w którym dane jest zdanie jeszcze nie uznane, a poszukuje się zdania już uznanego (dowodzenie, sprawdzanie).

Stosownie do tych trzech podziałów, każda odmiana rozumowania może być scharakteryzowana w następujący sposób: Wnioskowanie – rozumowanie dedukcyjne, progresywne, odkrywcze. Dowodzenie – rozumowanie dedukcyjne, regresywne, uzasadniające. Sprawdzanie – rozumowanie redukcyjne, progresywne, uzasadniające. Wyjaśnianie (tłumaczenie) – rozumowanie redukcyjne, regresywne, odkrywcze. Odmianą wyjaśniania jest indukcja enumeracyjna niezupełna, mianowicie jest to wyjaśnianie uogólniające.

M. P.

3. Klasyfikacja Ajdukiewicza. Krytyczne uwagi pod adresem podziału Łukasiewicza i jego modyfikacji przez Czeżowskiego podniósł K. Ajdukiewicz w pracy *Klasyfikacja rozumowań*, oceniając dotychczasowe klasyfikacje jako zbyt wąskie i proponując inne zasady podziału, prowadzące do wyróżnienia większej liczby odmian rozumowania. Klasyfikacja Ajdukiewicza powstaje w wyniku skrzyżowania dwóch podziałów: a) podziału procesów wyprowadzania konsekwencji lub wnioskowania (*Wnioskowanie – (2)) na dedukcyjne uprawdopodabniające i bezwartościowe logicznie; b) podziału procesów myślowych na spontaniczne i kierowane zadaniem. Drugi podział prowadzony jest dalej, stosownie do różnych typów zagadnień, jakie charakteryzowane są w Ajdukiewicza teorii *pytań. Powstała w ten sposób klasyfikacja mieści w sobie wszystkie odmiany rozumowania wyróżniane w klasyfi-

kacjach poprzednich, a nadto wiele innych, występujących w naukowej i w codziennej praktyce, jak wnioskowanie statystyczne, rozwiązywanie równań itd.
Powyższe zestawienie klasyfikacji rozumowań nie wyczerpuje wszystkich proponowanych; są to jednak najbardziej znane i stosunkowo najdokładniej opracowane. Problematyka klasyfikacji rozumowań poruszana jest głównie w polskim piśmiennictwie logicznym, stąd brak obcojęzycznych terminów dla wielu pojęć występujących w tych rozważaniach.
Zob. też **dowodzenie; sprawdzanie; wnioskowanie.**

W. M.

K. Ajdukiewicz: *Klasyfikacja rozumowań.* [W:] *JiP.* T.2; — — *Zarys;* T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1959; Kotarbiński: *Elementy;* — — *Kurs logiki;* J. Łukasiewicz: *O nauce.* [W:] *Poradnik dla samouków.* T. 1. 1915.

Kokoszyńska-Lutmanowa Maria (1905–1982). Od 1951 prof. w Uniw. Wrocławskim, od 1953 kierownik Katedry Logiki Wydziału Filozoficzno-Historycznego, tamże. Prace w zakresie logiki dotyczą głównie analizy pojęć semantycznych, teorii dedukcji i indukcji oraz zagadnień analityczności. Ważniejsze prace: *Über den absoluten Wahrheitsbegriff und einige andere semantische Begriffe*, 1936; *A refutation of the relativism of truth*, 1951; *O „dobrej" i „złej" indukcji*, 1957; *O dwojakim rozumieniu uzasadniania dedukcyjnego*, 1962; *W sprawie różnicy między naukami dedukcyjnymi i niededukcyjnymi*, 1967.

W. M.

konceptualizm. Kierunek filozoficzny występujący w wiekach średnich w tzw. sporze o powszechniki (łac. *universalia). Konceptualizm odrzucał istnienie realne takich przedmiotów, ale dopuszczał ich istnienie w umyśle, jako pojęć (łac. conceptus), zajmując w ten sposób stanowisko pośrednie między *platonizmem, przyjmującym istnienie powszechników, a *nominalizmem, odrzucającym ich istnienie nawet w umyśle. Współcześnie stanowisko konceptualistyczne ma pewien odpowiednik w dyskusji nad istnieniem przedmiotów matematycznych.

Küng: *Ontology*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

konfirmacja. Pojęcie konfirmacji zostało wprowadzone przez Carnapa jako uściślający równoznacznik, czyli *eksplikacja dla jednego z dwóch odróżnianych przez tego autora pojęć prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwo semantyczne (przez innych zwane logicznym) oraz prawdopodobieństwo w sensie koncepcji częstościowej, przysługujące zbiorom zdarzeń (*Prawdopodobieństwo–2).
Konfirmacja jest więc stosunkiem uprawdopodobniania, czyli potwierdzania zachodzącym między zdaniami. Stosunek ten może być, w różnych konkretnych przypadkach, określany na różnych poziomach dokładności: 1° można stwierdzać tylko tyle, że zdanie *e* potwierdza zdanie *h*; 2° można porównywać pod względem konfirmacji dwie hipotezy, stwierdzając, że *h* jest bardziej potwierdzona przez *e* aniżeli *h* 3° można określać ilościowo stopień potwierdzenia: *h* jest potwierdzone przez *e* w stopniu *n*.
Uwaga autorów koncentruje się na dwóch ostatnich koncepcjach konfirmacji, ponieważ tylko one mogą dostarczyć podstawy do wyboru między konkurencyjnymi hipotezami. Oto przykład na porównawczy stosunek potwierdzania: obserwacje zjawisk świetlnych znane fizykom XIX w. bardziej potwierdzają falową teorię światła niż teorię korpuskularną. Takie porównawcze stwierdzenia istotnie czyni się w nauce, nie ma natomiast wystarczająco opracowanych metod ilościowego szacowania stopnia konfirmacji. Wielu autorów wątpi, czy jest to w ogóle możliwe, przedstawiane zaś dotychczas próby są wciąż kontrowersyjne i dotyczą bardzo uproszczonych sytuacji (*Logika indukcji).
W teorii konfirmacji zakłada się *rachunek zdań i kwantyfikatorów oraz interpretuje się w pewien sposób matematyczną teorię prawdopodobieństwa: twierdzenia owej teorii przechodzą w twierdzenia o własnościach zdań i stosunkach semantycznych między zdaniami a „możliwymi światami": Pojęcie możliwych światów eksplikuje się za pomocą pojęcia „state description" i in., co daje w rezultacie specyficznie Carnapowską wersję semantyki (zob. **znaczenie,** gdzie podane jest też wyjaśnienie pojęcia „state description").

R. Carnap: *Logical foundations of probability.* 1950; Pap: *Elements*; Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

konieczność logiczna. Własność zdań utożsamiana przez niektórych, np. przez Carnapa, z analitycznością (*Zdanie analityczne); przez innych, np. przez Papa, przypisywana także niektórym zdaniom nie-analitycznym. Zwłaszcza przy wąskim pojęciu analityczności (*Zdanie analityczne –(2)) pozostaje obszerna klasa zdań różniących się od zdań empirycznych, a nie będących analitycznymi, np. „To, co czerwone, nie jest zielone". Razem więc ze zdaniami analitycznymi zalicza się je do nadrzędnej klasy zdań koniecznych. Takie zdania konieczne, lecz nieanalityczne utożsamia się niekiedy ze *zdaniami syntetycznymi *a priori.
Konieczność zalicza się tradycyjnie do własności zdań noszących miano modalności (inne modalności: możliwość, przygodność); stanowią one przedmiot działu logiki zwanego *logiką modalną.

Carnap: *MaN*; Pap: *Elements.*

W. M.

koniunkcja (iloczyn logiczny). Zdanie (lub *funkcja zda-

niowa) utworzone z innych zdań za pomocą funktora prawdziwościowego „ $\wedge$ " z *rachunku zdań. Symbol ten odczytuje się słowem „i", biorąc wówczas ten spójnik w jednym z jego kilku potocznych znaczeń. Koniunkcja jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko, gdy oba jej zdania składowe są prawdziwe. Wyraża to następująca tabelka (matryca) *klasycznego rachunku zdań, w której symbole 1, 0 oznaczają, odpowiednio, wartości logiczne prawdy i fałszu.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Charakterystykę koniunkcji przy większej liczbie wartości logicznych podają *logiki wielowartościowe. Koniunkcję zapisuje się też za pomocą notacji: $p \cdot q$, $p\&q$, Kpq.

W. M.

konotacja. Dla określenia pojęcia konotacji pomocne jest pojęcie treści charakterystycznej nazwy, które określa się następująco: Treść charakterystyczna nazwy N jest to zespół cech (*Cecha charakterystyczna) taki, że przysługuje wszystkim desygnatom nazwy N i tylko im.

Treść charakterystyczna nazwy N jest konotacją (inaczej: treścią językową) tej nazwy, gdy każdy poinformowany o tym, że jakiś przedmiot ma wszystkie cechy w owej treści zawarte, może trafnie rozstrzygnąć, czy dany przedmiot jest desygnatem nazwy N.

Rozumie się, że ów „każdy" wymieniony w powyższym określeniu, to każdy, kto zna i stosuje umowy językowe tego języka, do którego należy rozpatrywana nazwa N.

Przykład: Ktoś, komu zakomunikowano, że pewna figura da się wpisać w koło, ma boki parami równoległe i dwie prostopadłe przekątne, nie potrafi odpowiedzieć, czy ta figura jest kwadratem. Widać z tego, że nie zna on treści charakterystycznej nazwy „kwadrat"; nie wynika stąd jednak, że nie zna treści językowej, czyli konotacji tej nazwy. Gdy potrafił zidentyfikować kwadrat np. na podstawie cech równoboczności i prostokątności, dałby tym dowód, że rozumie słowo „kwadrat" zgodnie z jego znaczeniem w języku polskim, a więc zna konotację tego słowa.

Pojęcie konotacji wprowadził J. S. Mill jako eksplikację bardziej potocznego zwrotu „znaczenie nazwy" (ang. meaning). W polskiej literaturze logicznej utożsamienie konotacji i znaczenia (w odniesieniu do nazw) znajduje się w *Elementach* T. Kotarbińskiego i innych pracach tego autora. Na gruncie natomiast teorii znaczenia K. Ajdukiewicza odróżnia się znaczenie nazwy, pojęte jako sposób posługiwania się nią przez ludzi (a więc pragmatycznie) od konotacji nazwy jako czegoś obiektywnego, znajdującego się w przedmiotach pozajęzykowych, do których język się odnosi.

Zob. też **znaczenie – (2), (5); konotowanie.**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *O znaczeniu wyrażeń.* [W:] *JiP.* T. 1; – – *Proposition as the connotation of sentence.* „St. Log." XX 1967; Kotarbiński: *Elementy*; Mill: *Syst. log.*

W. M.

konotowanie (współoznaczanie). Stosunek zachodzący między nazwą a pewnym zespołem cech charakteryzującym desygnaty tej nazwy i zwanym *konotacją.

Można też podać bezpośrednie określenie konotowania, takie jak to, które proponuje Ajdukiewicz, parafrazując odpowiedni tekst Milla: Cechy C_1, C_2, ... C_n są konotowane przez nazwę N, to tyle co: nazwę N stosujemy do indywidualnych przedmiotów dlatego, że te przedmioty posiadają powyższe cechy i w tym celu, by to zaznaczyć. Ta intencja zaznaczenia wyróżnia treść językową od treści charakterystycznej (wymienianej w określeniu konotacji).

Przykład: nazwa „willa" konotuje cechę bycia domem o pewnych znamionach wygody, estetyki lub luksusu, ponieważ stosujemy ją do różnych obiektów z racji posiadania przez nie tej cechy. Obiekty te mogą mieć jeszcze inne charakterystyczne dla siebie cechy, np. podleganie określonym przepisom prawnym, ale ponieważ słowa „willa" nie używamy ze względu na te cechy, nie są one tym, co słowo to konotuje. Konotacja wielu nazw prostych bywa niewyraźna i trzeba ją znajdować, z ryzykiem błędu, przez śledzenie sposobu używania nazwy. Inaczej ma się sprawa z nazwami złożonymi lub wprowadzonymi definicyjnie za pomocą nazw złożonych. Tak np. nazwa „kserofit" definiowana jest zwrotem „roślina odporna na suszę", konotuje więc cechy: roślinność, odporność na suszę.

K. Ajdukiewicz: *O znaczeniu wyrażeń* [W:] *JiP.* T. 1; Mill: *Syst. log.*

W. M.

konsekwencja. Pojęcie konsekwencji (syntaktycznej) jest określone za pomocą pojęcia *dowodu. Formuła A jest konsekwencją zbioru zdań X wtedy i tylko, gdy istnieje taki skończony ciąg napisów D, że D jest dowodem zdania A przy założeniach X (mówiąc o zdaniach ma się tu na uwadze także formuły zdaniowe).

Pojęcie dowodu, z kolei, jest definiowane przez odniesienie do określonych reguł dedukcyjnych, np. odrywania i podstawiania, stąd i w pojęciu konsekwencji zawarte jest odniesienie do odpowiednich reguł. Zbiór konsekwencji zbioru zdań X, przy ustalonych regułach dedukcyjnych, oznacza się symbolicznie przez $\mathrm{Cnq}(X)$ lub $\mathrm{Cn}(X)$, zaś fakt, że zdanie A należy do owego zbioru konsekwencji wyrażamy symbolicznie pisząc:

$$A \in \mathrm{Cn}(X), \text{ lub też } X \vdash A.$$

Przy danych założeniach X i regułach R zbiór konsekwencji jest wyznaczony w sposób jednoznaczny, stąd przyjęło się mówić o konsekwencji jako o *funkcji, która każdemu zbiorowi zdań X przyporządkowuje zbiór wszystkich zdań $\mathrm{Cn}(X)$, tj. zdań wyprowadzonych z X za pomocą reguł R; używając słowa „operacja" jako synonimu słowa „funkcja", mówi się także o operacji konsekwencji (należy pamiętać o powstającej dwuznaczności: termin „konsekwencja" raz oznacza samą funkcję, a raz – jak w definicji podanej na początku – wartość owej funkcji). Definiując konsekwencję przez pojęcie dowodu, pojmuje się ją tym samym jako rezultat *wynikania inferencyjnego; tak rozumiana konsekwencja należy do pojęć syntaktycznych.

Istnieje też semantyczne pojęcie konsekwencji, wprowadzone przez Tarskiego (1936), związane z pojęciem wynikania semantycznego, które Tarski określał mianem logicznego. Pojęcie to jest zdefiniowane w sposób następujący. Zdanie A wynika logicznie ze zbioru zdań X wtedy i tylko, gdy każdy *model zbioru X jest także modelem zdania A.

Syntaktyczne i semantyczne pojęcia konsekwencji pokrywają się ze sobą dla logiki pierwszego rzędu w tym sensie, że każda konsekwencja semantyczna dowolnego zbioru zdań X jest także jego konsekwencją syntaktyczną, czyli że wszystkie zdania, które są prawdziwe przy prawdziwości zdań z X dadzą się udowodnić przez wyprowadzenie ich (za pomocą ustalonych reguł) z X. Ten podstawowy dla logiki fakt stanowi treść twierdzenia o pełności (*Zupełność – (3)), wyrażanego symbolicznie zdaniem:

$$\text{Jeśli } X \models A, \text{ to } X \vdash A,$$

co przy zachodzeniu także implikacji odwrotnej, wyrażającej niesprzeczność systemu, daje równość zakresową obu pojęć w odniesieniu do logiki pierwszego rzędu. Gdy A jest tautologią, piszemy, odpowiednio, $\models A$ oraz $\vdash A$, opuszczając symbol zbioru, ponieważ tautologia wynika i syntaktycznie, i semantycznie z każdego zbioru zdań, w tym także ze zbioru pustego.

Tak pojęte pokrywanie się obu pojęć konsekwencji nie zachodzi dla bogatszych systemów logicznych, takich jak *teoria typów, w których nie każde zdanie prawdziwe da się udowodnić; fakt ten stanowi treść tzw. pierwszego *twierdzenia Gödla. Typowym przykładem wnioskowania, w którym jakieś zdanie jest konsekwencją semantyczną założeń, ale nie jest ich konsekwencją syntaktyczną (względem reguł logiki pierwszego rzędu), jest wnioskowanie przez *indukcję matematyczną (por. Tarski 1936).

E. Beth: *Semantic entailment and formal derivability*. 1955; – – *Foundations*; Carnap: *Syntax*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Kneale: *Development of logic*; A. Tarski: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*. „Spraw. Tow. Nauk. Warszawskiego", Wydz. III, XXIII 1930 (przekł. ang. [W:] Tarski: *LSM*); – – *Grundzüge des Systemenkalküls* „Fund. Math." XXV 1935 i XXVI 1936 (przekł. ang. [W:] Tarski: *LSM*); – – *O pojęciu wynikania logicznego*. „Przegl. Filoz." XXXIX 1936 (przekł. ang. [W:] Tarski: *LSM*).

W. M.

konstruktywizm. Prąd w matematyce obejmujący kilka kierunków wspólnie żądających ograniczenia się do rozpatrywania wyłącznie przedmiotów konstruowalnych, natomiast różniących się w interpretacji pojęcia konstruowalności i przyjmujących wskutek tego różne metody konstrukcji.

Matematykę ugruntowuje się zwykle za pomocą metody aksjomatycznej. Pojęcia matematyczne definiuje się wtedy w dwu etapach: najpierw określa się aksjomatycznie (*Definicja aksjomatyczna) pojęcia pierwotne, a potem poprzez nie z pomocą standardowych metod definicyjnych i dowodowych określa się explicite inne pojęcia badane w rozpatrywanym systemie.

Konstruktywiści starają się ugruntować matematykę na innej drodze. Pojęć pierwotnych nie określa się tutaj przez aksjomaty, lecz konstruuje się je za pomocą zadanych z góry operacji. Problemem istotnym tej koncepcji ugruntowania matematyki jest wybranie na tyle obszernego układu operacji, aby 1° wykonać prawie wszystkie konstrukcje wykonywane zwykle w matematyce oraz by 2° zasób konstruowalnych pojęć był wystarczający dla rekonstrukcji klasycznych teorii matematycznych. Jednakże podkreślić należy, że celem reprezentatywnych kierunków konstruktywistycznych (np. *intuicjonizmu) jest nie tyle ugruntowanie matematyki klasycznej poprzez jej konstruktywistyczną rekonstrukcję, ile stworzenie matematyki nowej opartej o solidne, konstruktywistyczne podstawy. Prace nad wykonaniem programu konstruktywistycznego zaczęli B. Russel, A. N. Whitehead, H. Weyl, L. E. J. Brouwer, T. Skolem, K. Gödel i in.

Różne wersje konstruktywizmu pojawiają się w zależności od poglądu na temat natury konstrukcji oraz od tego, jaki przyjmuje się układ operacji konstruowania. Z pewną przesadą powiedzieć można, iż tyle jest konstruktywizmów, ilu konstruktywistów. Wersje te uporządkować można wg różnych zasad. Na przykład, porządkując je ze względu na tezy głoszone o sposobie istnienia przedmiotów matematycznych odróżniamy poniższe cztery rodzaje konstruktywizmu. Obiektywizm (wzgl. realizm) głosi, że przedmioty te są obiektywnymi wytworami procesów konstruowania, istniejącymi niezależnie od konstruującego je podmiotu w świecie obiektów czasowo-przestrzennych lub obiektów abstrakcyjnych. Intencjonalizm twierdzi, że przedmioty matematyczne są wytworami twórczych procesów konstruowania istniejącymi w sposób intencjonalny, właściwy tworom kulturowym. Według mentalizmu przedmioty matematyczne są wytworami aktów myślowych osób uprawiających matematykę istniejącymi – w wersji skrajnej, tylko w tych aktach

lub – w wersji umiarkowanej, poprzez stałą możliwość powtarzania odpowiednich aktów myślowych. W końcu finityzm dopuszcza tylko efektywne przekształcenia obiektów czasowo-przestrzennych (napisów), stąd przedmioty matematyczne będąc wytworami takich przekształceń same są przedmiotami czasowo-przestrzennymi.

Prace nad wykonaniem programu konstruktywistycznej rekonstrukcji matematyki łączy się z badaniami w teorii funkcji rekurencyjnych; konstruowalność utożsamia się wtedy bądź z rekurencyjnością, bądź z ogólną rekurencyjnością, bądź z obliczalnością itp. U wielu konstruktywistów zakres dopuszczalnych konstrukcji nie jest wyraźnie ograniczony. Niejednokrotnie żąda się, by rozważać w matematyce wyłącznie przedmioty uprzednio skonstruowane, większość jednak konstruktywistów dopuszcza także takie przedmioty, które co prawda nie są aktualnie skonstruowane, ale których istnienie gwarantuje zaakceptowana zasada ich konstrukcji.

Jedną z wersji konstruktywizmu jest rozgałęziona teoria typów stworzona przez Russella i Whiteheada, wersjami innymi są intuicjonizm Brouwera oraz tzw. konstruktywny formalizm R. L. Goodsteina. Interesującą wersję konstruktywizmu otrzymamy ugruntowując matematykę, tj. przede wszystkim teorię mnogości, za pomocą wprowadzonego przez K. Gödla aksjomatu konstruowalności, mówiącego, iż wszystkie zbiory są konstruowalne za pomocą pewnych określonych operacji. Z aksjomatu tego wynika pewnik wyboru, z pewnością więc można by za jego pomocą zrekonstruować prawie całą matematykę klasyczną.

Silny ośrodek konstruktywizmu znajduje się w ZSRR (A. Markow, P. Nowikow, D. Boczwar, N. Szanin i inni) – rozwinięto tutaj tzw. teorię algorytmów, która ma dostarczyć metod konstruktywistycznych. Konstruktywizm był reprezentowany też w Polsce, gdzie od dawna prowadzono badania nad tzw. analizą obliczalną (S. Banach, S. Mazur), starając się odbudować w jej ramach analizę klasyczną; rozwinięte są też badania w zakresie *funkcji rekurencyjnych (A. Grzegorczyk i in.).

E. Bishop: *Foundations of constructive analysis*. 1967; A. Heyting (ed.): *Constructivity in mathematics*. 1959; R. L. Goodstein: *Recursive number theory*. 1957; S. C. Kleene, R. E. Vesley: *The foundations of intuitionistic mathematics*. 1965; B. A. Kuszniew: *Lekcii po konstruktiwnomu matiematiczeskomu analizu*. 1973; A. Troelstra: *Aspects of constructive mathematics*. [W:] *Handbook of mathematical logic*. 1977 (ed. J. Barwise et al.).

J. P.

kontrapozycja (z łac. contrapositio). Wnioskowanie oparte na następujących prawach logiki tradycyjnej: $SaP \rightarrow P'aS'$, $SeP \rightarrow P'oS'$, $SoP \rightarrow P'oS'$, $SaP \rightarrow P'eS$, $SeP \rightarrow P'iS$, $SoP \rightarrow P'iS$.

Przykłady: Każde żelazo jest metalem. Zatem: Każdy nie-metal jest nie-żelazem. Żaden dąb nie jest brzozą. A więc: Pewne nie-brzozy nie są nie-dębami. Pierwsze trzy prawa stanowią kontrapozycję zupełną, pozostałe – kontrapozycję częściową. Kontrapozycja jest jedną z form tzw. *wnioskowania bezpośredniego.

Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*.

M. P.

kontrfaktyczny okres warunkowy. Zdanie o budowie „Gdyby p, to q", którego poprzednik jest sprzeczny z tym, co autor danego zdania uważa za faktyczny stan rzeczy (stąd nazwa „kontrfaktyczny").

Kontrfaktyczne są np. okresy warunkowe: [1] Gdyby ebonit był dobrym przewodnikiem prądu, nie byłby używany jako izolacja. [2] Gdyby nos Kleopatry był trochę krótszy, cała powierzchnia ziemi wyglądałaby inaczej (Pascal: *Myśli*, fragm. 162). Przykład [1] reprezentuje zdanie ogólne, którego poprzednik jest niezgodny z uznaną powszechnie wiedzą przyrodniczą; [2] reprezentuje zdanie jednostkowe, którego poprzednik jest niezgodny z wiedzą historyczną.

Temat kontrfaktycznego okresu warunkowego jest szeroko dyskutowany w piśmiennictwie logicznym, poczynając od późnych lat czterdziestych. Głównym problemem jest pytanie o prawdziwość kontrfaktycznego okresu warunkowego. Prawdziwość jest własnością zdań oznajmujących, polegającą na tym, że rzeczy się mają właśnie tak, jak dane zdanie oznajmia. Aby więc rozstrzygać o prawdziwości kontrfaktycznego okresu warunkowego, trzeba go przełożyć na zdanie oznajmujące. Przekład na *implikację postaci „Jeśli p, to q" nie oddaje intencji kierującej wypowiedziami kontrfaktycznymi, a przy tym prowadzi do rezultatu, że wszystkie zdania kontrfaktyczne, jako implikacje o fałszywym poprzedniku, są prawdziwe. Ten rezultat niezgodny jest z intuicją, że bywają zdania kontrfaktyczne, które są fałszywe, np.: Gdyby 7 było podzielne przez 4, to nie byłoby podzielne przez 2.

Wysunięto kilka różnych rozwiązań tego problemu. Do bardziej znanych należy propozycja pochodząca od H. Hiża oraz, niezależnie, od R. Chisholma, by traktować kontrfaktyczny okres warunkowy jako skrót wypowiedzi metajęzykowej mówiącej o wynikaniu następnika ze zbioru zdań, będącego koniunkcją poprzednika i pewnej wiedzy przyjmowanej przez osobę uznającą dany okres kontrfaktyczny (zob. Giedymin).

Pewnym uogólnieniem tej teorii, biorącym pod uwagę, oprócz wynikania, również uprawdopodobnianie, jest propozycja A. Fincha, który podaje następującą analizę kontrfaktycznego okresu warunkowego w terminach *prawdopodobieństwa warunkowego:

$$(\text{Gdyby } p, \text{ to } q) \equiv \sim p \wedge \{\Pr(q,p)^* = 1 \vee [\Pr(q,p) < 1 \wedge \Pr(q,p) > \Pr(\sim q,p)]\}.$$

Podejście do problemu zdań kontrfaktycznych z pozycji teorii prawdopodobieństwa cechuje również monografię

Adamsa 1975, dotyczącą logiki zdań warunkowych. Inne jeszcze podejście nawiązuje do tej cechy zdań kontrfaktycznych, że mówią one o jakimś związku koniecznym między treściami poprzednika i następnika, który nie zależy od ich wartości logicznych. Tego rodzaju podejście reprezentuje Snyder 1971.

E. W. Adams: *The logic of conditionals. An application of probability to deductive logic.* 1975; R. M. Chisholm: *The contrary-to-fact conditional.* „Mind" LV 1946; A. Finch: *An explication of counterfactuals by probability theory.* „Philos. a. Phenomenolog. Res." XVIII 1958; J. Giedymin: *Charakterystyka pytań i wnioskowań kontrfaktycznych.* „St. Metodol." I 1965; N. Goodman: *The problem of counterfactual conditionals.* „Journ. of Philos." XLIV 1947; H. Hiż: *Comments and criticism on the inferential sense of contrary-to-fact conditionals.* „Journ. of Philos." XLVIII 1951; D. P. Snyder: *Modal logic and its applications.* 1971; Zinowjew: *Osnowy.*

W. M.

konwers relacji (relacja odwrotna). Konwersem relacji R nazywamy relację, która zachodzi między x i y zawsze i tylko, gdy między y i x zachodzi relacja R. Oznaczając konwers relacji R symbolem $\check{R}$ zapisujemy tę definicję symbolicznie w postaci: $x\check{R}y = yRx$. Przykłady: konwersem relacji większości (między liczbami) jest relacja mniejszości, a konwersem relacji pokrewieństwa (między ludźmi) – ta sama relacja pokrewieństwa.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

konwersja (z łac. conversio). Wnioskowanie oparte na następujących prawach logiki tradycyjnej:

$$SeP \rightarrow PeS,\ SiP \rightarrow PiS,\ SaP \rightarrow PiS.$$

Wnioskowanie według dwóch pierwszych praw nazywa się konwersją zwykłą (conversio simplex); prowadzi ono od przesłanki ogólnej do ogólnego wniosku, a od przesłanki szczegółowej do szczegółowego wniosku. Przykłady: Żaden kot nie jest psem. Zatem: Żaden pies nie jest kotem. Pewien kwiat jest czerwony. A więc: Pewne czerwone jest kwiatem. Wnioskowanie według trzeciego prawa jest konwersją ograniczoną (conversio per accidens), która prowadzi od przesłanki ogólnej do szczegółowego wniosku, np.: Każdy pies jest zwierzęciem. Zatem: Pewne zwierzęta są psami.

Zdania typu SoP nie podlegają konwersji, ponieważ taka operacja prowadziłaby niekiedy od zdań prawdziwych do zdań fałszywych, np. zdanie: Pewne grzyby nie są muchomorami, prowadziłoby do wniosku: Pewne muchomory nie są grzybami. Konwersja jest jedną z form tzw. *wnioskowania bezpośredniego.

Ajdukiewicz: *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy.*

M. P.

Kotarbiński Tadeusz (1886–1981). Studia filozoficzne w Uniw. Lwowskim, głównie pod kier. Kazimierza Twardowskiego, ukończył w 1912, uzyskując stopień doktora filozofii. W l. 1912–1918 pracował jako nauczyciel (przeważnie łaciny i greki) w szkolnictwie średnim. W 1919–1960 profesor Uniw. Warszawskiego (w okresie okupacji wykładał na uniwersytecie tajnym); od 1929 prof. zwyczajny; 1945–1949 rektor nowo założonego uniw. w Łodzi; 1951–1960 kierownik Katedry Logiki Uniw. Warszawskiego. Od 1946 członek korespondent a od 1951 członek rzeczywisty PAU, następnie PAN; 1957–1962 prezes PAN. Członek kilku zagranicznych Akademii Nauk, członek nadzwyczajny British Academy oraz Societas Scientiarum Fennica, członek zwyczajny Académie de la Philosophie des Sciences; doktor h. c. uniwersytetów: Brukselskiego, Łódzkiego, Jagiellońskiego, Florenckiego i Oksfordzkiego. Od 1927 przewodniczący Polskiego Tow. Filozoficznego, 1946–1966 Łódzkiego Tow. Naukowego, 1951–1968 Komitetu Redakcyjnego Biblioteki Klasyków Filozofii PWN. 1960–1963 Institut International de Philosophie, grupy polskiej Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauki.

W swoich pracach zajmował się *ontologią, teorią poznania, logiką, etyką oraz prakseologią, której jest pionierem, propagatorem i – w znacznej mierze – twórcą. W zakresie logiki – głównie zagadnieniami semantyki i metodologii nauk. Reprezentowane przez niego stanowisko materialistyczne, które określał jako *reizm w ujęciu semantycznym, stanowi punkt wyjścia jego dociekań w zakresie semantyki logicznej.

Opublikował ok. 500 prac naukowych, popularnonaukowych i publicystycznych; najważniejsze m. in.: *Szkice praktyczne* 1913; *Utylitaryzm w etyce Milla i Spencera* 1915; *Z zagadnień ogólnej teorii walki* 1938; *Traktat o dobrej robocie* 1955 (wyd. 7 1982, tłum. ang. *Praxiology* 1965); *Sprawność i błąd* 1956; *Hasła dobrej roboty* 1968. W zakresie logiki: *Elementy teorii poznania logiki formalnej i metodologii nauk* 1929 (wyd. 2 1961, przekł. ang. *Gnoseology* 1966); *Wykłady z dziejów logiki* 1957 (przekł. franc. *Leçons sur l'histoire de la logique* 1964) oraz *Kurs logiki dla prawników* 1947 (wyd. 6 1963).

Osiągnięcia naukowe Kotarbińskiego w zakresie logicznej semantyki i metodologii oraz jego działalność dydaktyczna (przez cały okres swej pracy uniwersyteckiej wykładał głównie logikę z przeznaczeniem dla filozofów, humanistów i prawników) wywarły poważny wpływ na rozwój tego kierunku logiki polskiej; wykształcił kilka pokoleń logików i filozofów.

kwadrat logiczny. Graficzne przedstawienie następujących związków logicznych: sprzeczność (łac. contradictio), przeciwieństwo (łac. contrarietas), podprzeciwieństwo (łac. subcontrarietas) i podporządkowanie (łac. subalternatio), obejmowanych wspólną nazwą „opozycja" (łac. oppositio), zachodzących pomiędzy zdaniami kategorycznymi typu: SaP, SeP, SiP, SoP.

Zdania takie rozumie się w następujący sposób:



Rys. 9

SaP – każde *S* jest *P*, np. Każdy kwiat jest rośliną.
SeP – żadne *S* nie jest *P*, np. Żaden trójkąt nie jest kołem.
SiP – niektóre *S* jest (są) *P*, np. Niektóre kwiaty są czerwone.
SoP – niektóre *S* nie jest (nie są) *P* np. Niektóre kwiaty nie są pachnące.

Sprzeczność zachodzi pomiędzy zdaniami *SaP* i *SoP*, oraz *SeP* i *SiP*. Zdania sprzeczne, np. „Każdy wróbel jest ptakiem" i „Pewne wróble nie są ptakami", nie mogą być zarazem prawdziwe i nie mogą być zarazem fałszywe.

Przeciwieństwo zachodzi pomiędzy zdaniami *SaP* i *SeP*. Zdania przeciwne nie mogą być zarazem prawdziwe, ale mogą być zarazem fałszywe, jak np. zdania: „Każdy człowiek jest poetą" i „Żaden człowiek nie jest poetą".

Podprzeciwieństwo zachodzi pomiędzy zdaniami *SiP* i *SoP*. Zdania podprzeciwne mogą być zarazem prawdziwe, np. „Niektóre ptaki są czarne" i „Niektóre ptaki nie są czarne", ale nie mogą być zarazem fałszywe.

Zdanie *SiP* jest podporządkowane zdaniu *SaP*, a zdanie *SoP* jest podporządkowane zdaniu *SeP*. Jeżeli prawdziwe jest *zdanie ogólne, np. „Każdy wróbel jest szary", to podporządkowane mu zdanie szczegółowe „Niektóre wróble są szare", też jest prawdziwe.

Związki powyższe ujmują następujące prawa logiczne, zwane prawami kwadratu logicznego:

Dla zdań sprzecznych:

$$SaP \rightarrow \sim(SoP), \quad \sim(SaP) \rightarrow SoP;$$
$$SeP \rightarrow \sim(SiP), \quad \sim(SeP) \rightarrow SiP;$$
$$SiP \rightarrow \sim(SeP), \quad \sim(SiP) \rightarrow SeP;$$
$$SoP \rightarrow \sim(SaP), \quad \sim(SoP) \rightarrow SaP.$$

Dla zdań przeciwnych:

$$SaP \rightarrow \sim(SeP), \quad SeP \rightarrow \sim(SaP).$$

Dla zdań podprzeciwnych:

$$\sim(SiP) \rightarrow SoP, \quad \sim(SoP) \rightarrow SiP.$$

Dla zdań podporządkowanych, tzw. prawa subalternacji:

$$SaP \rightarrow SiP, \quad SeP \rightarrow SoP.$$

Prawa kwadratu logicznego stanowią, obok innych praw logicznych, zasady tzw. *wnioskowania bezpośredniego.

Zakres ważności praw kwadratu logicznego. Gdy buduje się zdania z nazw niepustych, tj. nazw mających *desygnaty, wszystkie prawa kwadratu logicznego zachowują swą ważność, zarówno przy słabej, jak i przy mocnej interpretacji zdań ogólnych. Zdanie ogólne typu „każde *S* jest *P*", przy interpretacji słabej, stwierdza tylko zawieranie się zakresu podmiotu w zakresie orzecznika: cokolwiek jest *S*, to jest i *P*, inaczej: nie istnieją przedmioty będące *S*, nie będące zarazem *P*. Podobnie zdanie ogólno-przeczące: „Żadne *S* nie jest *P*", w interpretacji słabej stwierdza tylko wykluczanie się zakresów podmiotu i orzecznika: cokolwiek jest *S*, to nie jest *P*, inaczej: nie istnieją przedmioty będące *S* oraz *P* zarazem.

Przy interpretacji mocnej zdanie „Każde *S* jest *P*", nie tylko stwierdza zawieranie się zakresu podmiotu w zakresie orzecznika: cokolwiek jest *S*, jest *P*, lecz ponadto stwierdza istnienie desygnatów, przynajmniej jednego, nazwy *S*, a więc jej niepustość. Analogicznie zdanie: „Żadne *S* nie jest *P*", w interpretacji mocnej stwierdza zarazem wykluczanie się zakresów podmiotu i orzecznika oraz niepustość podmiotu.

Ze względu na to, że zdania ogólne w interpretacji mocnej stwierdzają istnienie desygnatów podmiotu, mówi się, że zdania tego rodzaju mają doniosłość egzystencjalną.

Zdania szczegółowe rozumie się zawsze jako zdania egzystencjalne. Zdanie szczegółowo-twierdzące: „Pewne *S* jest *P*", stwierdza, że istnieje coś, co jest zarazem *S* oraz *P*, a więc, że istnieje przynajmniej jeden desygnat nazwy *S* i nazwy *P* (niepustość nazwy *S* i nazwy *P*). Zdanie szczegółowo przeczące „Pewne *S* nie jest *P*", stwierdza, że istnieje coś, co jest *S*, lecz nie jest *P*; stwierdza więc niepustość *S* oraz nie-*P*, bowiem pewne *S* nie jest *P*, znaczy: pewne *S* jest nie-*P* (istnieje coś, co jest zarazem *S* oraz nie-*P*).

W dziedzinie nazw pustych wiele praw kwadratu logicznego traci swą ważność. Niektóre z nich przestają być ważne przy słabym rozumieniu zdań ogólnych, inne – przy mocnym rozumieniu, jeszcze inne – niezależnie od tego czy zdanie ogólne interpretuje się słabo, czy mocno. Przy słabej interpretacji zdań ogólnych, w zakresie nazw pustych nie obowiązują prawa dla przeciwieństwa: $SaP \rightarrow \sim SeP$ i $SeP \rightarrow \sim SaP$ oraz prawa dla podporządkowania: $SaP \rightarrow SiP$ oraz $SeP \rightarrow SoP$. Fałszywość któregoś z tych praw, np. prawa podporządkowania $SaP \rightarrow SiP$, można wykazać, podstawiając w miejsce *S* nazwę pustą „człowiek mający dwieście lat", a za *P* – nazwę „stary". Otrzymamy *implikację (okres warunkowy): „Jeżeli każdy człowiek mający dwieście lat jest stary, to pewien człowiek mający dwieście lat jest stary". Poprzednik tego okresu warunkowego jest zdaniem prawdziwym, bo nie istnieją ludzie mający dwieście lat, a nie będący starymi. Następnik zaś jest zdaniem fałszywym bo stwierdza, że

istnieją ludzie mający dwieście lat, co nie jest prawdą. Ten okres warunkowy jest fałszywy, stąd wniosek, że dla nazw pustych nie jest ważne prawo, z którego przez podstawienie nazwy pustej otrzymaliśmy fałszywy okres warunkowy.

Przy mocnej interpretacji zdań ogólnych, w zakresie nazw pustych nie są ważne cztery ostatnie prawa dotyczące sprzeczności: $\sim (SaP) \rightarrow SoP$, $\sim (SeP) \rightarrow SiP$, $\sim (SiP) \rightarrow SeP$, $\sim (SoP) \rightarrow SaP$. Podstawiając np. do pierwszego prawa w miejsce S nazwę „człowiek nieomylny", a zamiast P – „genialny", otrzymamy zdanie: „Jeżeli nie jest prawdą, że każdy człowiek nieomylny jest genialny (i że istnieją ludzie nieomylni), to pewni ludzie nieomylni nie są genialni". Poprzednik jest prawdziwy, bo nie istnieją nieomylni. Następnik zaś z tejże racji jest fałszywy. A więc fałszywy jest okres warunkowy, a tym samym nie jest ważne prawo, z którego przez podstawienie nazwy pustej otrzymaliśmy ten okres warunkowy

Obecnie istnieją interpretacje kwadratu logiki w terminach logiki współczesnej: interpretacja algebraiczna (I. M Copi) oraz kwantyfikatorowa (A. N. Prior).

Ajdukiewicz: *Zarys*: I. M. Copi: *Symbolic logic*. 1972; H. Greniewski: *Próba odmlodzenia kwadratu logicznego*. „St. Log." I 1953; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*; Z. Kraszewski: *Logika stosunków zakresowych*. „St. Log." IV 1956; W. Marciszewski: *Sztuka dyskutowania*. 1971; A. N. Prior: *Formal logic*. 1962.

M. P.

kwantyfikator ogólny (duży kwantyfikator). Wyrażenie o kształcie $\wedge x$ poprzedzające funkcję zdaniową, np. $\wedge x F(x)$, odczytywane za pomocą zwrotu: dla każdego x. W roli kwantyfikatorów ogólnych stosuje się też symbole (podane tu razem z następującą po nich formułą): $(x)F(x)$, $\Pi x F(x)$, $(\bigcup x)F(x)$, $\forall x F(x)$.

Zob. też **rachunek kwantyfikatorów.** W. M

kwantyfikator szczegółowy (k. egzystencjalny, mały k.). Wyrażenie postaci $\vee x$ poprzedzające funkcję zdaniową, np. $\vee x G(x)$, odczytywane za pomocą zwrotów: „dla pewnego x" lub „istnieje takie x, że..." W charakterze kwantyfikatora szczegółowego używane są również symbole (podaje się je tutaj w kontekście całej formuły): $(Ex)G(x)$, $\Sigma x F(x)$, $\exists x F(x)$.

Zob. też **rachunek kwantyfikatorów.** W. M.

L, Ł

lambda-operator. Jest to jeden z tych wiążących zmienne operatorów, które służą do tworzenia wyrażeń nazwowych; do tej samej kategorii należą *operator abstrakcji i operator *deskrypcji. Pierwszy z nich stanowi szczególny przypadek lambda-operatora, mianowicie, przekształca on w nazwę *funkcję propozycjonalną, podczas gdy lambda-operator służy także do przekształcania (w nazwę) funkcji nazwowej. Po raz pierwszy posłużył się tego rodzaju operatorem Frege (1893), stosując go zarówno do funkcji propozycjonalnych, jak i nazwowych. Tak np., mając funkcję nazwową x^2-x, otrzymuje się z niej nazwę zbioru wartości tej funkcji, mianowicie (dla dziedziny iczb naturalnych) nazwę zbioru {0, 2, 6, 12, 20...} przez zamianę liter łacińskich (u Fregego gotyckich) na greckie oraz użycie znaku przydechu w roli – jak dziś to mówimy – operatora wiążącego ową zmienną; tak otrzymujemy wyrażenie: $'\alpha(\alpha^2-\alpha)$. Analogiczne przekształcenie można stosować do funkcji propozycjonalnej (zwanej przez Fregego "Begriff"), np. dla funkcji $x^2 = 4$ otrzymujemy nazwę zbioru jej wartości w postaci wyrażenia $'\varepsilon(\varepsilon^2 = 4)$.

Obie te role, przekształcania w nazwy zarówno funkcji nazwowych, jak i propozycjonalnych, spełnia lambda-operator wprowadzony przez Churcha, od którego pochodzi to określenie, notacja, jak też odpowiedni rachunek logiczny (*Logika kombinatoryczna), gdzie jest też podana literatura . Tak więc, lambda-wyrażenie, tj. wyrażenie postaci $(\lambda x)(...x...)$, reprezentuje zarówno formuły z predykatami, jak i formuły funkcyjne czyli nazwowe. W każdym przypadku jest ono zdefiniowane przez równoważność: $(\lambda x)(...x...)a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $...a...$; określenie to, stanowiące zarazem jedną z reguł rachunku lambda-konwersji, powiada, że w dowolnym kontekście lewa strona może być zastąpiona przez prawą (pod warunkiem, że gdy a zawiera zmienne wolne, to żadna z nich nie stanie się związana w wyniku owego zastępowania).

Gdy wyrażenie $(...x...)$ jest wyrażeniem funkcyjnym, np. $f(x)$, to lambda-wyrażenie (λx) denotuje odpowiednią funkcję. Uzyskując w ten sposób nazwy funkcji możemy tworzyć zdania przypisujące tym funkcjom jakieś własności, np. powiedzieć, że $(\lambda x)(2x^2+1)$ jest funkcją rosnącą. Użyteczność tej notacji jest jeszcze bardziej widoczna przy formule funkcyjnej z wieloma zmiennymi, która ma wyrażać funkcję jednej zmiennej, podczas gdy pozostałe są traktowane jako parametry; wtedy lambda-operator wskazuje na tę, która jest rzeczywiście zmienną i pozwala odróżnić funkcje inaczej nieodróżnialne, np. $(\lambda x)((x-y)(y-z))$, która jest funkcją rosnącą, od funkcji $(\lambda z)((x-y)(y-z))$, która nie jest rosnącą.

Oto kilka przykładów zastosowań lambda-operatora.

(1) $((\lambda x)$ (x wynalazł żarówkę) Edison – wtedy i tylko wtedy, gdy Edison wynalazł żarówke.

(2) $((\lambda x, y)(x < y))\langle 3, 4\rangle \equiv 3 < 4$.

(3) Wyrażenie $(\lambda x)(3+x)$ oznacza funkcję, której wartością w punkcie x jest suma $3+x$; np. dla $x = 1$ powiemy, że $(\lambda x)(3+x) = 4$.

Carnap: *Symb. log.*; A. Church: *A formulation of the simple theory of types.* „JSL" V 1940; G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik.* 1893; Quine: *ML*; P. Suppes: *Introduction to logic.* 1957.

W. M.

Leibniz Gottfried Wilhelm (1646–1716). Ur. w Lipsku. Filozof, matematyk, teolog, prawnik, historyk i dyplomata. Studia filozoficzne odbywał w Lipsku, matematyczne w Jenie i prawnicze w Altdorfie, gdzie doktoryzował się; żadnych stanowisk uniwersyteckich nie zajmował. W Paryżu zetknął się z Arnauldem, Huygensem i Malebranchem, w Londynie – z Newtonem i Boylem, w Amsterdamie ze Spinozą. Był członkiem Towarzystwa Królewskiego w Londynie od 1673 i Akademii Nauk w Paryżu od 1700. Założył Akademię Nauk w Berlinie (1700).

Wkładem Leibniza do logiki jest projekt uniwersalnego języka symbolicznego zwanego *characteristica universalis, pierwsze próby algebraizacji logiki, a także definicje kilku podstawowych pojęć logiki, jak identyczność (*Principium identitatis indiscernibilium) i prawda logiczna (*Zdanie analityczne). W matematyce znany jako twórca (niezależnie od Newtona) rachunku różniczkowego.

Zob. też **logicyzm**

W. M.

lemat. Twierdzenie udowodnione celem posłużenia się nim następnie w dowodzeniu innego twierdzenia, będącego głównym przedmiotem zainteresowania.

M. P.

lemat Craiga. Niech dane będą formuły p oraz q takie, że $p \rightarrow q$ jest twierdzeniem rachunku predykatów. Wtedy istnieje formuła m zbudowana wyłącznie za pomocą symboli relacyjnych występujących w obu formułach jednocześnie, taka że twierdzeniami rachunku predykatów są implikacje $p \rightarrow m$ i $m \rightarrow q$.

Twierdzenie to udowodnione zostało przez W. Craiga w latach pięćdziesiątych. Okazało się, że dla pewnych *logik

uogólnionych Lemat Craiga nie zachodzi. Najprostszy dowód Lematu Craiga korzysta z *Twierdzenia Herbranda-Gentzena. Lemat Craiga posiada liczne zastosowania, np. za jego pomocą udowodnić można Twierdzenie Bethа o definiowalności (*Definicja normalna).

R. C. Lyndon: *O logice matematycznej*. 1968; A. Robinson: *Introduction into model theory*. 1963; W. Craig: *Three uses of Herbrand-Gentzen Theorem in relating model theory and proof theory*. „JSL" XXII 1957.

W. Mk

Leśniewski Stanisław (1886–1939; Polska). Jeden z głównych reprezentantów warszawskiej szkoły logicznej. Studiował filozofię w uniw.: we Lwowie pod kierunkiem K. Twardowskiego, w Lipsku, Zurichu, Heidelbergu i Monachium; doktoryzował się we Lwowie w 1912. Profesor filozofii matematyki i logiki Uniw. Warszawskiego (1919 – – 1939). Leśniewski jest autorem kilku oryginalnych systemów logiki (*Systemy Leśniewskiego), stanowiących rozszerzenia lub ujęcia alternatywne względem klasycznych ujęć *teorii mnogości, *rachunku zdań i *rachunku nazw. Punktem wyjścia rozważań Leśniewskiego był problem *antynomii, który próbował on rozwiązywać nowymi sposobami; doprowadziło to m. in. do rozwinięcia idei (wziętej od Husserla) *kategorii semantycznych.

W. M.

Lewis Clarence Irving (1883–1964; USA). Studiował filozofię w Harvard Univ., gdzie też doktoryzował się w 1910. Profesor w Univ. of California (1914–1920), a następnie w Harvard Univ. (1920–1953). Lewis jest twórcą systemów *logiki modalnej, w których centralnym pojęciem jest pojęcie implikacji ścisłej. Systemy te przedstawione są w pracy *Symbolic logic* (1932), napisanej wspólnie z C. H. Langfordem.

W. M.

liczba kardynalna (moc zbioru, liczność zbioru). Dwa zbiory posiadają tę samą liczbę kardynalną, gdy są równoliczne: liczba kardynalna zbioru X równa się liczbie kardynalnej zbioru Y, czyli $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$, gdy istnieje wzajemne jednoznaczne odwzorowanie zbioru X na zbiór Y. Liczbą kardynalną zbioru pustego jest 0, liczba kardynalna zbioru skończonego równa jest ilości elementów tego zbioru, czyli liczbie naturalnej. Pośród nieskończonych liczb kardynalnych najczęściej używane są $\aleph_0$ – moc zbioru liczb naturalnych oraz $\mathfrak{c}$ – moc zbioru liczb rzeczywistych. Zob. też **teoria mocy zbiorów.**

Rasiowa: *Wstęp*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

K. Cz.

lingwistyka matematyczna. Nauka zajmująca się stosowaniem metod matematycznych w językoznawstwie. Przez *język w lingwistyce matematycznej rozumie się nie tylko język naturalny, ale również języki sztuczne, np. języki sformalizowane, języki programowania i in. Za inicjatora tego kierunku lingwistyki uważany jest powszechnie K. Ajdukiewicz, który pierwszy próbował stosować formalizm matematyczny dla określenia zdań poprawnych, wprowadzając w tym celu pojęcie kategorii syntaktycznej. Intensywny rozwój lingwistyki matematycznej nastąpił w ostatnich latach w związku z próbami stosowania maszyn matematycznych do tłumaczenia. Do najbardziej znanych rezultatów w lingwistyce matematycznej należą wyniki N. Chomsky'ego, który zdefiniował matematycznie kilka typów gramatyk, podał ich matematyczne własności oraz przykłady zastosowania do języków naturalnych (przede wszystkim angielskiego).

Głównym zadaniem lingwistyki matematycznej jest przede wszystkim sprecyzowanie pojęcia języka, tak aby pojęcie to obejmowało wszelkie możliwe rozumienie języka, a następnie sprecyzowanie pojęcia gramatyki, klasyfikacja gramatyk oraz ich własności. Przez gramatykę rozumie się tu zbiór reguł formalnych pozwalających rozstrzygać, czy zadane wyrażenie należy do ustalonego języka, czy też nie. Przyjmuje się tu więc, że reguły gramatyczne jednoznacznie wyznaczają zbiór zdań poprawnych języka. Dwie gramatyki uważamy za równoważne, jeżeli definiują one ten sam zbiór zdań poprawnych. Jednym z ważniejszych problemów lingwistyki matematycznej jest badanie równoważności gramatyk. Ogólnie biorąc problem ten jest nierozstrzygalny (*Rozstrzygalność). Dalszym ważnym problemem rozpatrywanym w lingwistyce matematycznej jest badanie zawierania się gramatyk (mówimy, że gramatyka G jest zawarta w gramatyce G', jeżeli język definiowany przez gramatykę G jest podzbiorem języka definiowanego przez gramatykę G').

Lingwistyka matematyczna znalazła liczne praktyczne zastosowania, głównie w językach programowania, tj. językach służących do opisywania rozwiązywania zadań za pomocą maszyn matematycznych. Zastosowania lingwistyki matematycznej do języków naturalnych wydają się mieć mniejsze znaczenie jak dotąd, przede wszystkim z uwagi na pomijanie strony semantycznej języka.

Ajdukiewicz: *JiP*. T. 1; Y. Bar-Hillel; *Language and information*. 1964; J. Blikle; *O lingwistyce matematycznej*. „Wiad. Matem." 1968; – – *Automaty i gramatyki*. [W:] *Wstęp do lingwistyki matematycznej*. 1971; N. Chomsky: *Formal properties of grammars*. [W:] *Handbook or mathematical psychology*. 1963; C. F. Hockett: *Mathematics and linguistics*. 1967; W. J. M. Levelt: *Formal grammars in linguistics and psycholiguistics*. 1974; S. Marcus: *Algebraic linguistics, analitical models*. 1967.

Z. P.

logicyzm. Kierunek w zakresie podstaw matematyki głoszący, że cała matematyka sprowadzalna jest do logiki i z tego punktu widzenia jest jedynie częścią logiki. Logicyzm nawiązuje do idei J. Locke'a i G. W. Leibniza. Twórcą jego był G. Frege, a czołowym przedstawicielem

B. Russell, który w swych pracach z początków XX w. rozwinął idee logicyzmu, zastosowane następnie w napisanym wspólnie z A. N. Whiteheadem monumentalnym dziele *Principia mathematica* (1910–1913). W monografii tej przedstawiona jest próba zredukowania całej matematyki do logiki.

Genezy logicyzmu szukać należy z jednej strony w filozoficznej kontrowersji między racjonalizmem a empiryzmem dotyczącej charakteru sądów matematycznych, z drugiej strony w żywych w drugiej połowie XIX w. dążeniach do unifikacji matematyki klasycznej poprzez sprowadzenie jej do arytmetyki, czyli poprzez jej arytmetyzację. W owym sporze filozoficznym logicyzm nawiązał zarówno do poglądu Locke'a, że sądy matematyczne mają charakter tautologiczny (trifling propositions), jak i do poglądu Leibniza o algorytmizowalności wnioskowań matematycznych. Wyostrzenie pierwszego z tych poglądów prowadziło do tezy neopozytywistów o analitycznym charakterze twierdzeń matematycznych. W tej skrajnej postaci przeciwstawiał się on intuicjonizmowi, który za Kantem traktuje niektóre zdania matematyczne jako syntetyczne a priori. Z drugiej strony logicyzm zrodził się z rozszerzenia wspomnianego wyżej dążenia unifikacyjno-redukcyjnego na samą, arytmetykę, w którym ją (a pośrednio wszystkie teorie redukowalne do arytmetyki) zamierzono sprowadzić do teorii bardziej podstawowej. Frege, a za nim Russell i Whitehead usiłowali zredukować arytmetykę do logiki w specjalnym, omówionym niżej, znaczeniu słowa – redukując ją do teorii, która według powszechnej obecnie opinii stanowi fragment teorii mnogości.

Klasyczne, pochodzące od B. Russella sformułowanie logicyzmu wypowiedzieć można jako koniunkcję czterech poniższych tez.

(1) Wszystkie pojęcia matematyczne, w tym pojęcia pierwotne teorii matematycznych, można zdefiniować explicite za pomocą pojęć czysto logicznych.

(2) Aksjomaty, czyli tzw. twierdzenia pierwotne matematyki, mogą być wyprowadzone z aksjomatów logicznych drogą czysto logicznej dedukcji.

(3) Wszystkie twierdzenia matematyczne dedukowalne są z twierdzeń pierwotnych (aksjomatów).

Zbierając razem (2) i (3), wszystkie stwierdzenia teorii matematycznych (tj. aksjomaty, twierdzenia i definicje) mogą być wyprowadzone z aksjomatów i definicji logicznych drogą czysto logicznej dedukcji. Oraz teza ostatnia.

(4) Dedukcja ta opiera się na logice wspólnej dla wszystkich teorii matematycznych, czyli uzasadnianie twierdzeń w poszczególnych teoriach matematycznych odbywa się w oparciu o te same podstawowe zasady tworzące jedną dla całej matematyki logikę. Teza ta odwołuje się do spostrzeżenia, że większość teorii matematycznych budowana jest z pomocą jednej i tej samej logiki – logiki klasycznej, oraz do przekonania, że wszystkie argumentacje matematyczne mogą być sformalizowane.

Takie sformułowanie stanowiska logistycznego jest niejasne i zależy od tego, jak rozumiemy terminy: „logika", „matematyka", „pojęcie pierwotne", „aksjomat", „reguła dowodzenia", „pojęcie logiczne", „pojęcie matematyczne", etc. Weźmy pod uwagę jedynie centralny dla logicyzmu termin „logika". Termin ten bywa rozumiany w co najmniej cztery odmienne sposoby: albo jako nazwa pewnej nauki (rozumienie potoczne tego terminu); albo jako nazwa pewnego języka sformalizowanego, na którego terenie ustalone są reguły rachunku logicznego; albo jako nazwa pewnego rachunku logicznego względnie pewnej operacji wynikania logicznego; albo, w końcu, jako wzmiankowana poprzednio operacja wynikania logicznego wraz z teorią specjalnych obiektów badanych przez logike.

Dla dyskusji stanowiska logistycznego rozumienie pierwsze jest nieistotne, zaś przy rozumieniu drugim pogląd logicystów staje się truizmem. Russell, a za nim Whitehead akceptowali ostatnie z wymienionych znaczeń słowa „logika", traktując ją jako rachunek logiczny wyznaczający stosowną operację wynikania logicznego oraz badający, poza stałymi logicznymi, tzw. funkcje propozycjonalne, czyli funkcje, które obiektom (względnie predykatom) przyporządkowują odpowiednie sądy logiczne. Dla zrealizowania programu sprowadzenia matematyki do tak rozumianej logiki musieli oni przyjąć pewniki należące nie do logiki we współczesnym (trzecim z wymienionych wyżej) rozumieniu słowa, ale do teorii mnogości. Pewnikami tymi były: pewnik abstrakcji, aksjomat ekstensjonalności, aksjomat multyplikatywny stanowiący ekwiwalent aksjomatu wyboru oraz aksjomat nieskończoności. Natknęli się przy tym na trudności związane z nie-logicznym, lecz teoriomnogościowym charakterem pojęcia zbioru. Trudności te ominęli, redukując zbiory do funkcji propozycjonalnych.

Stanowisko logistyczne było ostro krytykowane za używanie tzw. definicji niepredykatywnych oraz przyjmowanie szeregu aksjomatów egzystencjalnych, a szczególnie tzw. aksjomatu sprowadzalności. Podnoszono też, że antynomie wykryte w oryginalnym systemie Fregego, które Russell i Whitehead ominęli poprzez rozbicie badanej dziedziny na typy są co prawda nad wyraz istotnym problemem logicznym, lecz nie zagrażają klasycznym teoriom matematycznym w takim stopniu jak logice. Teorie te w naturalny sposób można ustrzec przed pojawieniem się antynomii znanych. Zasadne jest więc pytanie, czy np. zredukowanie arytmetyki do logiki w rozumieniu Russella (resp. do teorii mnogości) nie jest sprowadzeniem jej do teorii, która budzi więcej wątpliwości niż teoria wyjściowa. Podkreślano też, że charakterystyczne dla formaliz-

mu, a także dla typowych sformułowań logicyzmu traktowanie teorii matematycznych jako teorii sformalizowanych powoduje, iż opisywane w nich pojęcia są relatywne, wbrew wyjściowym przeświadczeniom. W wyniku dyskusji kilkakrotnie modyfikowano konstrukcję Russella i Whiteheada (L. Chwistek, F. P. Ramsey, R. O. Gandy i in. – *Teoria typów).

Obecnie w związku z odmiennym od przyjętego przez Russella rozumieniem terminu „logika" już mało kto reprezentuje logicyzm w jego klasycznym sformułowaniu. Jednakże popularne są nadal dwie następujące wersje logicyzmu: pierwsza – głosząca, że cała matematyka jest redukowalna do teorii mnogości (krótko: matematyka = teoria mnogości), oraz druga – metodologiczna, zwana hipotetyzmem (if-thenism). Hipotetyzm akceptuje tezę (4) z klasycznego sformułowania logicyzmu oraz głosi

(5) że dowodzone w teoriach matematycznych twierdzenia winny być rozumiane jako implikacje z koniunkcją aksjomatów w poprzedniku oraz wyprowadzaną tezą (tym co zwykle nazywa się twierdzeniem) w następniku. Następniki te są akceptowane w danej teorii, ponieważ (6) odpowiednie twierdzenia są twierdzeniami leżącej u podstaw rozważanej teorii logiki. Wersja ta oparta jest na trzecim z wyliczonych uprzednio znaczeń terminu „logika" oraz odwołuje się do tzw. twierdzeń redukcyjnych obowiązujących dla standardowo sformalizowanych teorii elementarnych.

R. Carnap: *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*. „ERKENNTNIS" II 1931; A. Church: *Mathematics and logic*. [W:] *Logic, methodology and philosophy of science*. Ed. E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski. 1962; A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of set theory*. 1973; H. Mehlberg: *The present situation in the philosophy of mathematics*. [W:] *Logic and language*. 1962; A. Musgrave: *Logicism revisited*. „BRIT. J. PHIL. SCI". XXVIII 1977; H. Putnam: *The thesis that mathematics is logic*, [W:] *Mathematics, matter and method*, 1975; Suszko: *Wykłady*.

J. P.

logika. Słowo „logika" bywa używane przez filozofów, jak i w mowie potocznej w licznych znaczeniach i kontekstach („logika uczuć", „logika dziejów" itp.) odbiegających daleko od technicznego znaczenia. Z drugiej strony, pewni autorzy ograniczają zastosowanie tego słowa do samych rachunków logicznych. Idąc za długotrwałą tradycją terminologiczną, która bliska jest etymologii terminu (gr. λογος znaczy m. in. myślenie, rozumowanie, język), należało by przez logikę rozumieć, co następuje: analiza języka i czynności badawczych (rozumowanie, definiowanie, klasyfikowanie etc.) w celu podania takich reguł posługiwania się językiem i wykonywania owych czynności, które uczyniłyby tę działalność możliwie najbardziej skuteczną.

Analizę taką przeprowadzają różne dyscypliny, które można uważać za działy odpowiednio szeroko pojętej logiki. Działem podstawowym jest *logika formalna, dotycząca schematów rozumowań niezawodnych, tj. takich, które od prawdziwych przesłanek prowadzą zawsze do prawdziwych wniosków. Opis języka z punktu widzenia konstrukcji systemów formalnych, a także skuteczność i ekonomiczność posługiwania się nim do innych celów (budowa teorii naukowych, porozumiewanie się w mowie potocznej) stanowią zadanie *semiotyki logicznej, zwanej też logiczną teorią języka. Z zagadnieniami semiotycznymi splatają się zagadnienia trzeciej dyscypliny logicznej – *metodologii nauk. Trudność odróżnienia pewnych zagadnień metodologicznych od semiotycznych polega na tym, że w metodologii bada się bądź czynności badawcze, bądź ich wytwory, jak twierdzenia, teorie, problemy, definicje itp.; te drugie zaś należą do dziedziny językowej. Z drugiej strony, metodologia traktowana jako nauka o sprawnym przeprowadzaniu czynności badawczych wchodzi w związki z ogólną teorią sprawnego działania, mianowicie prakseologią.

Powyższy podział zagadnień logicznych nie może więc być uważany za wyczerpującą i rozłączną klasyfikację, lecz jedynie za szkic orientacyjny: jest on stosowany szczególnie w piśmiennictwie polskim (zob. np. Ajdukiewicz). Dla celów organizacyjnych związanych z międzynarodową współpracą logików wyróżnia się: logikę, metodologię nauki i *filozofię nauki. Nie wydaje się, by był tu możliwy jednolity i konsekwentny podział, ponieważ rozwój nauki, w tym także nauk logicznych, prowadzi do przenikania się zagadnień i przechodzenia jednych w drugie.

Zob. też **logicyzm**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

logika deontyczna (z gr. δεον – powinność, słuszność). System dedukcyjny, w którego twierdzeniach występują stałe deontyczne „jest obowiązkowe to, że" (w skrócie „**O**"), „jest dozwolone to, że" (w skrócie „**P**"), „jest zakazane to, że" (w skrócie „**F**").

Istnieją różne systemy logiki deontycznej. Ma to swoje przyczyny w przypisywaniu rozmaitych znaczeń stałym deontycznym. Rozwój intensywnych badań nad logiką deontyczną datuje się od 1951 r., kiedy G. H. v. Wright ogłosił pewien system deontyczny. Wcześniejsze próby były fragmentaryczne i niedoskonałe.

Jako przykład można podać następujący system deontyczny:

1. Słownik

1.1. Zmienne zdaniowe $p, q, r, p_1, p_2, \ldots$ w ilości nieograniczonej

1.2. Spójniki klasycznego rachunku zdań: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$

1.3. Stałe deontyczne: **O**, **P**, **F**

1.4. Nawiasy

2. Formuły zdaniowe

2.1. Każda zmienna zdaniowa jest formułą zdaniową.

2.2. Jeżeli X, Y są formułami zdaniowymi, to $\sim X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \equiv Y$, $\mathbf{O}X$, $\mathbf{P}X$, $\mathbf{F}X$ są formułami zdaniowymi.

2.3. Każda formuła zdaniowa jest albo zmienną zdaniową, albo powstaje z takiej zmiennej lub takich zmiennych przez zastosowanie skończonej ilości razy reguł (2.2).

3. Aksjomaty

3.1. Aksjomaty klasycznego rachunku zdań

3.2. $\sim(\mathbf{O}p \wedge \mathbf{O} \sim p)$

3.3. $\mathbf{O}(p \wedge q) \equiv (\mathbf{O}p \wedge \mathbf{O}q)$

4. Reguły dowodzenia twierdzeń

4.1. Jeżeli X jest twierdzeniem systemu, a Y powstaje z X przez konsekwentne podstawienie formuły zdaniowej za jakąś zmienną, to Y jest twierdzeniem systemu (reguła podstawiania).

4.2. Jeżeli X jest twierdzeniem systemu i $X \rightarrow Y$ jest twierdzeniem systemu, to Y jest twierdzeniem systemu (reguła odrywania).

4.3. Jeżeli $X \equiv Y$ jest twierdzeniem systemu, to $\mathbf{O}X \equiv \mathbf{O}Y$ jest twierdzeniem systemu (reguła ekstensjonalności).

Można udowodnić następujące reguły wtórne:

4.4. Jeżeli $X \rightarrow Y$ jest twierdzeniem systemu, to $\mathbf{O}X \rightarrow \mathbf{O}Y$ jest twierdzeniem systemu.

4.5. Jeżeli $X \rightarrow Y$ jest twierdzeniem systemu, to $\mathbf{P}X \rightarrow \mathbf{P}Y$ jest twierdzeniem systemu

4.6. Jeżeli $X \rightarrow Y$ jest twierdzeniem systemu, to $\mathbf{F}Y \rightarrow \mathbf{F}X$ jest twierdzeniem systemu.

5. Definicje

Pierwsza grupa definicji są to definicje spójników rachunku zdań, nie będących stałymi pierwotnymi rachunku zdań, nad którym nadbudowuje się system deontyczny. Definicje drugiej grupy są definicjami tych funktorów deontycznych, które nie są stałymi pierwotnymi, występującymi w specyficznych aksjomatach systemu deontycznego. Dla omawianego przykładu systemu deontycznego takimi definicjami są:

5.1. $\mathbf{P}X =_{df} \sim \mathbf{O} \sim X$

5.2. $\mathbf{F}X =_{df} \mathbf{O} \sim X$

Do tych definicji dodaje się regułę zastępowania członu definiującego przez człon definiowany.

W zaprezentowanym systemie sensowne są formuły zdaniowe z iteracją stałych deontycznych, jak i formuły zawierające funktor deontyczny, w którego zasięgu jest funktor deontyczny, np. $\mathbf{OO}p$, $\mathbf{OF}p$, $\mathbf{O}(\mathbf{O}p \rightarrow p)$. Zwracano jednak uwagę na to, że takie formuły nastręczają trudności dotyczące ich interpretacji. Dlatego niektóre systemy deontyczne konstruuje się tak, aby iteracja stałych deontycznych była wykluczona.

6. Podajemy przykłady twierdzeń rozpatrywanego systemu:

6.1. $\mathbf{O}p \equiv \sim \mathbf{P} \sim p$

6.2. $\mathbf{F}p \equiv \sim \mathbf{P}p$

6.3. $\mathbf{O}p \rightarrow \mathbf{P}p$

6.4. $[\mathbf{O}(p \rightarrow q) \wedge \mathbf{O}p] \rightarrow \mathbf{O}q$

6.5. $[\mathbf{O}(p \rightarrow q) \wedge \mathbf{P}p] \rightarrow \mathbf{P}p$

6.6. $[\mathbf{O}(p \rightarrow q) \wedge \mathbf{F}q] \rightarrow \mathbf{F}p$

6.7. $\mathbf{F}(p \vee q) \equiv (\mathbf{F}p \wedge \mathbf{F}q)$

6.8. $\mathbf{P}(p \vee q) \equiv (\mathbf{P}p \vee \mathbf{P}q)$

6.9. $\mathbf{O}p \rightarrow \mathbf{O}(p \vee q)$

6.10. $\mathbf{F}p \rightarrow \mathbf{O}(p \rightarrow q)$

Od pierwszej chwili intensyfikacji badań nad logiką deontyczną rozmaite twierdzenia były kwestionowane jako nieintuicyjne, tzn. twierdzenia, których obecność w systemie wskazywała na to, że sens funktorów deontycznych ukształtowany aksjomatami i regułami inferowania twierdzeń (zwłaszcza regułą ekstensjonalności) odbiega od sensu potocznego. Np. paradoksalne w tym sensie wydawało się twierdzenie 6.10. Nieintuicyjność tego twierdzenia wywodzi się stąd, że formułę $\mathbf{O}(p \rightarrow q)$ interpretowano jako odpowiednik potocznego okresu warunkowego „jeżeli p, to obowiązkowe jest to, że q". Jednakże taka intepretacja nie jest dopuszczalna, skoro dowodliwe są twierdzenia:

6.11. $\mathbf{O}(p \rightarrow q) \equiv \mathbf{O}[\sim(p \wedge \sim q)]$

6.12. $\mathbf{O}(p \rightarrow q) \equiv \mathbf{F}(p \wedge \sim q)$

Twierdzenia te ujawniają, że formuły „$\mathbf{O}(p \rightarrow q)$" nie można uważać za równoznaczną z okresem warunkowym „jeżeli p, to obowiązkowe jest to, że q", a sens twierdzenia 6.10 sprowadza się właściwie do zależności:

6.13. $\mathbf{F}p \rightarrow \mathbf{F}(p \wedge \sim q)$

Podstawiając odpowiednio otrzymujemy np. „jeżeli zakazane jest to, że Jan zabija Piotra, to zakazane jest to, że Jan zabija Piotra i Jan nie obrabowuje Piotra". Z tego jednak, że zakazane jest to, iż Jan zabija Piotra, lecz go nie obrabowuje, nie można wnosić, że jeżeli Jan zabija Piotra, to Jan ma obowiązek obrabować go". Z drugiej strony trudno zgodzić się, że gdy zakazane jest to że Jan zabija Piotra, to nie jest zakazane to, że Jan zabija Piotra nie obrabowując go.

Kwestionowano również twierdzenie 6.9, które jest deontycznym odpowiednikiem paradoksu A. Rossa dla rozkazów. Argumentowano, że zdanie o postaci „$\mathbf{O}(p \vee q)$" stwierdza m. in. posiadanie „wyboru" między realizacją dwu czynów. Kontrargumentacja powoływała się na to, że zdanie o postaci „$\mathbf{O}(p \vee q)$" nie stwierdza posiadania jakiegoś wyboru między realizacją dwu ewentualności, że posiadanie takiego wyboru zależy od różnych okoliczności, a sens zdania kształtu „$\mathbf{O}(p \vee q)$" nie przesądza, czy taki wybór rzeczywiście przysługuje. Z punktu widzenia intuicyjności kwestionowano również szereg innych twierdzeń, np. 6.8. W tym przypadku jednak, niektóre argumenty zdają się nie brać pod uwagę wieloznaczność

zwrotu „dozwolone", który bywa używany nie tylko w sensie „nie zakazane".

Rozmaite systemy deontyczne budowano m. in. dlatego właśnie, że próbowano tak sformalizować stałe deontyczne, aby możliwie zbliżyć się do potocznego sposobu używania tych stałych. Np. to, że ani formuły „$p \to \mathbf{O}q$", ani formuły „$\mathbf{O}(p \to q)$" w pewnych systemach deontycznych nie można było intepretować jako odpowiednika okresu warunkowego „jeżeli p, to obowiązkowe jest to, że q" było bodźcem do budowania tzw. relatywnych systemów deontycznych.

W językach tych systemów operuje się relatywnymi funktorami deontycznymi: $\mathbf{O}(.../...)$, $\mathbf{F}(.../...)$, $\mathbf{P}(.../...)$. Na miejscu kropek mogą figurować formuły zdaniowe rachunku zdań. Formuły $\mathbf{O}(X/Y)$, $\mathbf{F}(X/Y)$, $\mathbf{P}(X/Y)$ czyta się odpowiednio: „obowiązkowe jest to, że X, pod warunkiem, że Y", „zakazane jest to, że X, pod warunkiem, że Y", „dozwolone jest to, że X, pod warunkiem, że Y". Jako przykład relatywnego systemu deontycznego może służyć, co następuje:

7. Słownik

7.1. Zmienne zdaniowe: p, q, p_1, p_2,... w ilości nieograniczonej

7.2. funktory klasycznego rachunku zdań: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\equiv$

7.3. Stałe deontyczne: $\mathbf{O}(.../...)$, $\mathbf{F}(.../...)$, $\mathbf{P}(.../...)$.

7.4. Nawiasy

8. Formuły zdaniowe

8.1. Jeżeli X, Y są formułami zdaniowymi rachunku zdań, to $\mathbf{O}(X/Y)$, $\mathbf{F}(X/Y)$, $\mathbf{P}(X/Y)$ są formułami zdaniowymi języka systemu deontycznego.

8.2. Jeżeli X, Y są formułami zdaniowymi języka systemu deontycznego, to $\sim X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \to Y$, $X \equiv Y$ są formułami zdaniowymi języka systemu deontycznego.

8.3. Każda formuła zdaniowa języka systemu deontycznego jest albo formułą taką jak 8.1, albo powstaje z takiej formuły lub takich formuł przez zastosowanie skończonej ilości razy reguły 8.2.

9. Aksjomaty

9.1. $\mathbf{O}(p \wedge q/r \vee s) \equiv [\mathbf{O}(p/r) \wedge \mathbf{O}(q/r) \wedge \mathbf{O}(p/s) \wedge \mathbf{O}(q/s)]$

9.2. $\sim [\mathbf{O}(q/p \vee \sim p) \wedge \mathbf{O}(\sim q/p \vee \sim p)]$

10. Reguły dowodzenia twierdzeń

10.1. Rezultat konsekwentnego podstawienia formuł zdaniowych języka systemu za wszystkie zmienne w tautologii rachunku zdań jest twierdzeniem systemu.

10.2. Rezultat podstawienia formuły zdaniowej rachunku zdań za zmienną w twierdzeniu systemu jest twierdzeniem systemu.

10.3. Rezultat zastąpienia formuły zdaniowej rachunku zdań w twierdzeniu systemu deontycznego równoważną logicznie formułą zdaniową rachunku zdań jest twierdzeniem systemu.

10.4. Reguła odrywania.

Można udowodnić nast. reguły wtórne:

10.5. Jeżeli $X \to Y$ jest tautologią rachunku zdań, to $\mathbf{O}(Z/Y) \to \mathbf{O}(Z/X)$ jest twierdzeniem systemu.

10.6. Jeżeli $X \to Y$ jest tautologią rachunku zdań to $\mathbf{O}(X/Z) \to \mathbf{O}(Y/Z)$ jest twierdzeniem systemu.

11. Przykładami twierdzeń prezentowanego systemu są:

11.1. $\mathbf{O}(p/q) \to \mathbf{O}(p/q \wedge r)$

11.2. $\mathbf{O}(p/q) \to \mathbf{O}(p \vee r/q)$

11.3. $\mathbf{O}(p \to q/r) \equiv \mathbf{O}(\sim p \vee q/r)$

11.4. $\mathbf{O}(\sim p/q) \to \mathbf{O}(p \to q/r)$

11.5. $[\mathbf{O}(p \to q/r) \wedge \mathbf{O}(p/r)] \to \mathbf{O}(q/r)$

Funktor zakazu można wprowadzić definicją:

12.1. $\mathbf{F}(X/Y) =_{\mathrm{df}} \mathbf{O}(\sim X/Y)$

Jednakże wprowadzenie funktora dozwolenia za pomocą definicji

12.2. $\mathbf{P}(X/Y) =_{\mathrm{df}} \sim \mathbf{O}(\sim X/Y)$

prowadzi do specyficznego znaczenia dozwolenia relatywnego. Funktor ten nie mógłby być wtedy rozumiany jako równoznaczny ze zwrotem „(nie jest zakazane to, że X), pod warunkiem, że Y". Byłoby bowiem wtedy twierdzeniem

$$\mathbf{P}(p/q) \equiv \sim \mathbf{F}(p/q)$$

Prawa strona tej równoważności jest symbolicznym zapisem formuły „nie jest tak, że (zakazane jest to, że p, pod warunkiem, że q)". W konsekwencji wprowadzając definicję 12.2. otrzymalibyśmy twierdzenie

$$\mathbf{P}(r/p \wedge q) \to \mathbf{P}(r/p)$$

które ujawnia specyficzny sens funktora dozwolenia wprowadzonego definicją 12.2. Dlatego w niektórych relatywnych systemach deontycznych relatywny funktor dozwolenia wprowadzany jest nie definicją, lecz jest obok funktora relatywnego obowiązku stałą pierwotną, dla której podaje się osobne aksjomaty.

A. R. Anderson zbudował różne rachunki deontyczne nadbudowane nad logiką modalną M, S4, S5. Podstawową ideą Andersona było to, że obowiązek, zakaz i dozwolenie można zdefiniować za pomocą stałej zdaniowej „S", którą można rozmaicie interpretować, np. „następuje coś złego", „świat ulega pogorszeniu" itp. Anderson przyjął definicje

13.1. $\mathbf{O}X =_{\mathrm{df}} \Box(\sim X \to S)$

13.2. $\mathbf{F}X =_{\mathrm{df}} \Box(X \to S)$

13.3. $\mathbf{P}X =_{\mathrm{df}} \sim \Box(X \to S)$

Do aksjomatów jednej z wymienionych logik modalnych dołączony zostaje aksjomat:

13.4. $\Diamond \sim S$

i stosując reguły właściwe dla danego systemu modalnego, otrzymuje się twierdzenia logiki deontycznej. Charaktery-

styczne jest to, że niektóre twierdzenia są „mieszane", tzn. występują w nich funktory modalne i deontyczne. np.

13.5. $\Box p \rightarrow \mathbf{O}p$

oraz twierdzenia, w których w zasięgu jakiegoś funktora modalnego lub deontycznego znajduje się funktor deontyczny, np.

13.6. $\mathbf{O}(\mathbf{O}p \rightarrow p)$

Obowiązek warunkowy A. R. Anderson zapisywał formułą $\Box(X \rightarrow \mathbf{O}Y)$

Anderson wykazał, że jeżeli logika deontyczna jest nadbudowana nad systemem S4, to istnieje co najwyżej 12 różnych modalności deontycznych: **O**, **OPO**, **PO**, **OP**, **POP**, **P**, **F**, **OPF**, **PF**, **FO**, **PFO**, **P** $\sim$, a gdy logika deontyczna jest nadbudowana nad systemem S5, to istnieją co najwyżej 4 różne modalności deontyczne: **P**, **P** $\sim$, **F**, **O**. Anderson wykazał także, że jeśli system deontyczny nadbudowuje się nad logiką modalną M, S4 lub S5, to wystarczy do języka jednego z tych systemów dodać stałą zdaniową B nie wprowadzając specyficznego aksjomatu 13.4. Można bowiem dowieść, że w wymienionych systemach modalnych wyrażenie $B \wedge \Diamond \sim B$ pełni w tym sensie rolę stałej zdaniowej S, że ani $B \wedge \Diamond \sim B$, ani $\sim (B \wedge \Diamond \sim B)$ nie są twierdzeniami, ale jest twierdzeniem $\Diamond(B \wedge \Diamond \sim B)$. W konsekwencji wystarczy do systemu modalnego M, S4, lub S5 dodać definicje takie, jak 13.1 – 13.3 z tą różnicą, że na miejscu stałej S figuruje wyrażenie $B \wedge \Diamond \sim B$. To ostatnie wyrażenie A. R. Anderson interpretował jako „następuje coś złego, co jest do uniknięcia"

Podane przykłady systemów deontycznych nie wyczerpują długiej listy różnych systemów deontycznych, jakie dotąd skonstruowano. W niektórych z nich stosuje się zmienne indywidualne, które wiązane są kwantyfikatorami.

Dla niektórych systemów deontycznych zbudowano modele, które umożliwiają określenie formuły prawdziwej systemu deontycznego. Dla nierelatywnych logik deontycznych model buduje się podobnie jak to uczynił S. Kripke dla logik modalnych. Wprowadza się strukturę modelową, która jest uporządkowaną trójką $\langle G, K, R \rangle$, gdzie K jest niepustym zbiorem, $G \in K$, a R jest relacją określoną na zbiorze K. Intuicje są tu takie: G jest rzeczywistym światem, K jest zbiorem wszystkich światów możliwych, a R jest relacją zachodzącą między dwoma światami z tym, że $H\ R\ H_1$ znaczy, że H_1 jest światem wzorcowym dla H, czyli wszystko, co jest w świecie H_1, powinno być w świecie H. Modelem dla formuły zdaniowej systemu deontycznego jest dwuargumentowa funkcja $\Phi(X, H)$ złączona z daną strukturą modelową $\langle G, K, R \rangle$. Symbol X reprezentuje formułę zdaniową języka systemu deontycznego, a symbol H reprezentuje nazwę jakiegoś elementu zbioru K światów. Funkcja Φ przybiera wartości ze zbioru $\{1, 0\}$. Przyjmuje się, że dla każdej zmiennej zdaniowej, wartość funkcji $\Phi(X, H)$ jest ustalona dla każdego $H \in K$. Wartości funkcji Φ dla pozostałych formuł zdefiniowane są indukcyjnie:

14.1. Jeżeli $\Phi(X, H) = 1$, to $\Phi(\sim X, H) = 0$, a w przeciwnym razie $\Phi(\sim X, H) = 1$

14.2. Jeżeli $\Phi(X, H) = 1$ i $\Phi(Y, H) = 1$, to $\Phi(X \wedge Y, H) = 1$, a w przeciwnym razie $\Phi(X \wedge Y, H) = 0$

Odpowiednio określa się wartość funkcji Φ dla pozostałych funktorów rachunku zdań.

14.3. Jeżeli $\Phi(A, H') = 1$ dla każdego $H' \in K$, takiego, że $H\ R\ H'$, to $\Phi(\mathbf{O}X, H) = 1$, a jeżeli istnieje choć jedno $H' \in K$ takie, że $H\ R\ H'$ i $\Phi(X, H') = 0$, to $\Phi(\mathbf{O}X, H) = 0$

14.4. Jeżeli $\Phi(X, H') = 1$ dla jakiegoś H' takiego, że $H' \in K$ i $H\ R\ H'$, to $\Phi(\mathbf{P}X, H) = 1$, jeżeli zaś dla każdego H' takiego, że $H' \in K$ i $H\ R\ H'$, $\Phi(X, H') = 0$, to $\Phi(\mathbf{P}X, H) = 0$.

Ostatnie dwa warunki można interpretować tak: to co jest prawdziwe w każdym świecie, który jest wzorcowy dla H, powinno być w świecie H. To co jest prawdziwe w pewnym świecie wzorcowym dla H, jest dozwolone w świecie H.

Formuła X jest prawdziwa w modelu Φ złączonym ze strukturą modelową $\langle G, K, R \rangle$, gdy $\Phi(X, G) = 1$, a fałszywa w tym modelu, gdy $\Phi(X, G) = 0$. Formuła X jest prawdziwa, gdy jest prawdziwa we wszystkich modelach.

Zależnie od wyboru aksjomatów logiki deontycznej, relacja R musi posiadać pewne własności formalne, aby aksjomaty były prawdziwe, np. musi być przechodnia w zbiorze $\{K - \{G\}\}$. Aby formuła $\mathbf{O}p \rightarrow p$ nie była prawdziwa, relacja R nie może być zwrotna w zbiorze K. Wykorzystując pojęcie prawdziwej formuły deontycznej, udowodniono pełność niektórych systemów deontycznych, tzn. że każda formuła prawdziwa jest wywodliwa z aksjomatów danego systemu.

A. R. Anderson: *The formal analysis of normative systems.* [W:] *Logic of decision and action.* Red. N. Rescher. 1967; M. J. Cresswell: *Some further semantics for deontic logic.* „Logique et Analyse" 38 1967; *Deontic logic: Introductory and systematic readings.* Red. R. Hilpinen. 1971; *Deontische Logik.* Red. A. G. Conte, R. Hilpinen, G. H. v. Wright. 1977; W. H. Hanson: *Semantics for deontic logic.* „Logique et Analyse" 8 1965; A. A. Iwin: *Grundprobleme der deontischen Logik.* [W:] *Quantoren-Modalitäten-Paradoxien.* Red. H. Wessel. 1972; G. Kalinowski: *La logique des normes.* 1972; *Normenlogik. Grundprobleme der deontischen Logik.* Red. H. Lenk. 1974; G. H. v. Wright: *Norm and action.* 1963.

Z. Z.

logika dialektyczna. Terminy „logika" i „dialektyka" mają wielowiekową historię, w której ich wzajemny stosunek był ujmowany w jeden z trzech sposobów: (1) traktowanie ich jako synonimy, przejawiające się np. w zamiennym używaniu takich zwrotów, jak „logika stoików" i „dialektyka stoików"; (2) przeciwstawianie logiki dialektyce bądź z akcentem na ich uzupełnianie się, bądź z akcentem na ich odmienność; (3) traktowanie dialektyki jako pewnego kie-

runku lub działu logiki. Przy tym ostatnim ujęciu jest miejsce na pojęcie logiki dialektycznej.

W szerokiej dyskusji na temat stosunku logiki do dialektyki (nasilonej szczególnie we wczesnych latach pięćdziesiątych) posługiwano się najczęściej terminologią (2), ale problem ten da się sformułować również w terminologii (3) – jako pytanie o stosunek logiki dialektycznej do logiki nie-dialektycznej, pod którą rozumiało się zwykle logikę formalną (lub klasyczną logikę formalną). Zarysowały się wówczas następujące stanowiska:

1. Logika dialektyczna jest systemem bogatszym, zawierającym logikę formalną (zob. Filkorn, powołujący się na Hegla).
2. Logika dialektyczna stanowi naukę o prawach i formach ludzkiego poznania, podczas gdy logika formalna abstrahuje od treści poznania (zob. *A. Dictionary*).
3. Logika dialektyczna jest teorią dopełniającą do logiki formalnej, w tym sensie, że bada ten sam przedmiot (myślenie lub całość rzeczywistości), ujmując go w innym aspekcie: stawania się, zmiany, wzajemnego związku zjawisk (zob. Ajdukiewicz, Kokoszyńska).
4. Logika dialektyczna jest logiką intensjonalną, tj. uwzględniającą treść myśli lub wypowiedzi, podczas gdy logika formalna jest ekstensjonalna (*Ekstensjonalność), tj. abstrahująca od treści i koncentrująca się na stosunkach zakresowych (zob. Klaus).
5. Logika dialektyczna, a przynajmniej jakiś jej fragment, jest logiką wielowartościową, a więc pewnym nieklasycznym systemem logiki formalnej (zob. Rogowski).

Powyższe wyliczenie stanowisk nie pretenduje do zupełności. Na pytanie o wzajemne stosunki między tymi stanowiskami (wykluczanie się, wynikanie czy równoważność) nie da się odpowiedzieć bez poddania ich dokładniejszej analizie i interpretacji, uwzględniającej m. in. tak dyskutowane pojęcia, jak „sprzeczność logiczna" i „sprzeczność dialektyczna" (zob. Ładosz). Jako przykład tego rodzaju analizy można wskazać próbę L. S. Rogowskiego, zmierzającą do sprecyzowania pojęcia sprzeczności występującego w Heglowskiej analizie ruchu. Autor tej propozycji zwraca uwagę, że istnieje więcej niż jedno formalno-logiczne pojęcie sprzeczności, zależnie od różnych rozumień koniunkcji i negacji. Sprzeczność z klasycznego rachunku zdań nie ma interpretacji w Heglowskiej teorii zmiany, ale ma taką interpretację sprzeczność zdefiniowana w specjalnie do tego celu pomyślanym rachunku, który autor nazywa logiką kierunkową. Jest to logika czterowartościowa, w której oprócz wartości prawdy (*p* jest prawdą, gdy jest tak, że *p*) i fałszu (*p* jest fałszem, gdy nie jest tak, że *p*), występującą wartości tzw. podprawdy (zaczyna być tak, że *p*) i podfałszu (zaczyna być tak, że nie *p*). Terminami pierwotnymi logiki kierunkowej są: 1° funktor jednoargumentowy zwany inicjacją, symbolicznie „$\overrightarrow{N}$", który czyta się: „zaczyna być tak, że..."; 2° funktor dwuargumentowy „C" nazwany implikacją kierunkową. Oto matryce tych funktorów, gdzie v – prawda, i – podprawda, u – podfałsz, f – fałsz:

p	$\overrightarrow{N}p$
v	u
i	v
u	f
f	i

Cpq	V	i	u	f
v	v	i	u	f
i	v	i	u	u
u	v	i	i	i
f	v	v	v	v

Za pomocą tych terminów pierwotnych definiuje się negację słabą ($Np = NNp$) oraz koniunkcję Heglowską (ta definicja wymaga wielu kroków przygotowawczych). Zasada sprzeczności sformułowana za pomocą tego rodzaju negacji i koniunkcji jest tautologią logiki kierunkowej, a zarazem może być interpretowana jako Heglowski opis ruchu. Istnieje jeszcze druga możliwość opisu ruchu, za pomocą innych wprowadzonych w tym systemie funktorów. Na gruncie tych rezultatów, o ile tylko nie odmawia się miana logiki formalnej tzw. logikom wielowartościowym, pozostaje przyjąć, że przynajmniej jakiś fragment logiki dialektycznej da się przedstawić jako system logiki formalnej.

Inną próbą ujęcia formalnego pewnych zagadnień logiki dialektycznej, korzystającą z aparatury pojęciowej cybernetyki, jest praca O. Langego dotycząca pojęć całości i rozwoju. Autor wyjaśnia np. pojęcie rozwoju przez sprzeczność, korzystając z cybernetycznego prawa veta, które rozważa R. Ashby (próbę dalszej precyzacji tego prawa przedstawia również Rogowski na gruncie swej logiki kierunkowej). Problemy formalizacji logiki dialektycznej są podejmowane i dyskutowane także przez logików radzieckich, m. in. A. Zinowjewa, I. Narskiego.

Szczególnie znaczącą próbą takiego uogólnienia logiki formalnej, które „zwalniałoby" jakąś dziedzinę z prawa niesprzeczności w sensie klasycznym, są systemy Jaśkowskiego (1948) zwane logiką dyskusyjną. Główna idea logiki dyskusyjnej polega na takim określeniu sensu stałych logicznych, że sprzeczność nie pociąga przepełnienia systemu, tzn. nie jest tak, że z pary zdań sprzecznych wynika dowolne zdanie; nie obowiązuje więc w logice dyskusyjnej prawo Dunsa Szkota: $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$. Od lat sześćdziesiątych datuje się wzmożone zainteresowanie logiką dyskusyjną, z racji jej zastosowań metodologicznych i filozoficznych (Da Costa, Dubikajtis, Kotas i in.). Do antycznego rozumienia dialektyki jako sztuki racjonalnej dyskusji nawiązuje *logika dialogowa.

N. C. A. da Costa, L. Dubikajtis: *Sur la logique discursive de Jaśkowski*. „Bull. de l'Aca. Polon. des Sc." XVI 1968; *A dictionary of philosophy*, ed. M. Rosenthal, P. Yudin. Moskwa 1967; *Dialektika i logika*, 1962; F. Engels: *Anty-Dühring*. 1956 (cz. 1, rozdz. 8 i 12); V. Filkorn: *Pre-dialectical logic*. 1963; G. W. F. Hegel: *Nauka logiki*. 1967; S. Jaśkowski: *Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych*. „St. Soc. tis Scient. Torun." sec. A. I 1948;

G. Klaus: *Moderne Logik*. 1965; M. Kokoszyńska: *W sprawie stosunku logiki do dialektyki*: „St. Log." III 1955; J. Kotas: *Discussive sentential calculus of Jaśkowski*. „St. Log." XXXIV (2) 1975. O. Lange: *Całość i rozwój w świetle cybernetyki*. 1962; W. Lenin: *Karol Marks*. [W:] Dzieła. T. 21. 1951; — — *Zeszyty filozoficzne*. 1956; J. Ładosz: *Wielowartościowe rachunki zdań a rozwój logiki*. 1961; I. Narski: *O sprzeczności ruchu*. „St. Filoz." 1963 nr 3/4; L. S. Rogowski: *Logika kierunkowa a heglowska teza o sprzeczności zmiany*. 1964; A. Zinowjew: *Filozoficzne problemy logiki wielowartościowej*. 1963; — — *O logicznej niesprzeczności sądów prawdziwych dotyczących zmian i związków między przedmiotami* „St. Filoz." 1959 nr 1.

W. M.

logika dialogowa. Rozważania kodyfikujące zasady racjonalnego dialogu, będące jednym ze zródeł europejskiej logiki, sięgają greckiej starożytności. Do tej antycznej tradycji nawiązuje logika dialogowa, zapoczątkowana przez P. Lorenzena, rozwijana przez K. Lorenza, i pozyskująca sobie wciąż nowych autorów. Jej twórcy przedstawiają ją jako kolejny naturalny etap w rozwoju logiki: po okresie składni logicznej, a następnie semantyki logicznej, przyszła kolej na stworzenie pragmatyki logicznej.

Dialogowy, a więc pragmatyczny charakter proponowanej logiki polega na tym, że buduje się teorię logiczną jako system *dedukcji naturalnej stosujący dowodzenie nie wprost, w którym każdy dowód jest przedstawiony jako dyskusja między zwolennikiem dowodzonej formuły, zwanym proponentem, a tejże formuły oponentem. Niepowodzenie oponenta, gdy wyczerpał on wszystkie możliwości ataku przewidziane regułami gry, a zmierzające do wykazania sprzeczności w stanowisku proponenta, świadczy, że dyskutowana formuła jest dowodliwa, tzn. jest twierdzeniem logiki.

Logika dialogowa należy do tej rodziny nowszych systemów dedukcji naturalnej, które cechuje nawiązywanie do rachunku sekwencji *Gentzena *Dedukcja naturalna – 2) oraz stosowanie techniki dowodu nie wprost (Beth, Hintikka, Smullyan i in.), natomiast jej oryginalność w obrębie owej rodziny polega na tym, że oprócz reguł wnioskowania, dotyczących (w systemach tego typu) opuszczania stałych logicznych, występują reguły strukturalne, tj. wyznaczające sposoby konstruowania dialogu. Określają one warunki, pod jakimi partnerzy mają obowiązek bronienia swych tez oraz prawo atakowania tez przeciwnika. Takie kodeksy praw i obowiązków mogą być mniej lub bardziej liberalne; ta cecha logiki dialogowej czyni z niej narzędzie pozwalające zdefiniować różne rodzaje logiki: najbardziej liberalne reguły dają logikę najszerszą, tj. klasyczną, zaś kolejne restrykcje, sprawiające iż mniej formuł da się obronić proponentowi, wprowadzają coraz to bardziej ograniczone logiki, wśród których jest *logika intuicjonistyczna.

Reguły wnioskowania logiki dialogowej określają sposoby atakowania i bronienia zdań złożonych. Dotyczą one następujących złożeń.

Asercja (akceptacja) zdania atomowego A, zapisywana $\vdash A$, lub po prostu A. Atak polega na żądaniu dowodu, które symbolicznie będziemy wyrażać znakiem zapytania. Obrona w przypadku oponenta polega na akceptacji zdania A bez obowiązku uzasadniania, ponieważ oponent (z racji swego zadania jako „advocatus diaboli") ma akceptować to wszystko, co może się przyczynić do obalenia tezy proponenta, byleby został zachowany sens terminów logicznych; ponieważ zdania atomowe nie zawierają terminów logicznych, oponent może je przyjmować bez ograniczeń, byle nie przeczył sam sobie. Natomiast proponent może bronić zdań atomowych jedynie argumentem „ex concesso", tzn. godząc się na przejęcie zdania swego oponenta (z zamiarem wykazania, że i przy tym posunięciu też zdoła się obronić).

W przypadku negacji $\sim A$ atak polega na asercji A (wedle zasad podanych wyżej, gdy A jest zdaniem atomowym), zaś obrona nie jest dla żadnej ze stron możliwa.

Koniunkcja $A.B$

Atak: żądanie dowodu dla A i dla B.

Obrona: podanie dowodu dla A i dla B.

Alternatywa $A \vee B$

Atak: żądanie dowodu przynajmniej jednego ze składników.

Obrona: podanie dowodu przynajmniej jednego ze składników.

Implikacja $A \rightarrow B$

Atak: asercja poprzednika A.

Obrona: podanie dowodu następnika B.

Kwantyfikator ogólny $(x)A(x)$

Atak: żądanie dowodu, że zachodzi $A(n)$, gdzie n jest przedmiotem wskazanym przez oponenta.

Obrona: podanie, że zachodzi $A(n)$.

Kwantyfikator szczegółowy $(\mathrm{E}x)A(x)$

Atak: żądanie wskazania przedmiotu spełniającego A.

Obrona: wskazanie przedmiotu spełniającego A.

Co się tyczy reguł strukturalnych, ograniczymy się w tym przedstawieniu do tych, które nadają się do odróżnienia logiki klasycznej od intuicjonistycznej. Reguła dialogu, która na tyle ogranicza ruchy proponenta, że nie każdą tezę logiki klasycznej uda mu się obronić, na tyle jednak jest liberalna, że pozwala obronić wszystkie tezy intuicjonistyce, brzmi jak następuje:

Reguła NO (natychmiastowej obrony): proponentowi wolno zaatakować dowolne zdanie oponenta, co się natomiast tyczy obrony, to jest on zobowiązany bronić się przed tym atakiem, który został dokonany ostatnio. Tak więc, nie wolno proponentowi odłożyć obrony na dogodniejszy dla siebie moment, musi on podjąć ją natychmiast, co niekiedy utrudni wydobycie od oponenta potrzebnych proponentowi przesłanek. Możliwość tę daje inna reguła, brzmiąca jak następuje:

Reguła DO (obrony w dowolnym momencie): proponentowi wolno atakować dowolne zdanie oponenta, jak też

wolno mu bronić się przeciw dowolnemu argumetowi spośród tych, którymi przedtem atakował go oponent (zob. Lorenzen 1973; Lorenzen i Lorenz 1978 s. 226).

Fakt, że taka różnica w strukturze dialogu wyznacza linię demarkacyjną między logiką klasyczną i intuicjonistyczną, jest przedmiotem obszernego dowodu podanego przez Lorenza (1961). Zamiast referowania tego dowodu ograniczymy się do kilku przykładów naprowadzających na związek między strukturą dialogu a rodzajem logiki. Przykłady będą dotyczyć kilku twierdzeń logiki klasycznej nie będących twierdzeniami logiki intuicjonistycznej. Te same przykłady ilustrują sposób posługiwania się dialogowymi regułami wnioskowania, tj. regułami opuszczania koniunkcji, implikacji etc.

Przykład I

Oponent	Proponent	
	$\sim\sim p\to q$	
$\sim\sim p$	p	(obrona wg NO)
?	–	

Proponent, który się tu zastosował do reguły NO, nie może obronić przed atakiem oponenta tezy p, ponieważ nie dostarczył mu jej oponent, a tylko on może dostarczać proponentowi zdań atomowych (przyjmowanych w celu atakowania tezy proponenta). Inaczej przebiega spór o tę samą formułę, gdy P (proponent) uzyska większą swobodę ruchów, przyznaną przez DO.

Przykład I*

O	P	
	$\sim\sim p\to p$	
$\sim\sim p$	$\sim p$	(atak na $\sim\sim p$, skorzystanie z DO)
p	p	(obrona wg reguły dla implikacji, przez przyjęcie zdania p od oponenta)

Przy okazji następnego przykładu łatwo jest dostrzec jeszcze jedną cechę logiki dialogowej. Mianowicie proponent może się poddać restrykcji nałożonej przez NO, a pomimo tego wygrać dialog o każdą tezę logiki klasycznej, o ile oponent akceptuje prawo wyłączonego środka, na które proponent mógłby się w każdej chwili powołać (co byłoby ruchem obronnym, ponieważ nie atakuje się w tym momencie żadnej tezy przeciwnika, lecz wykorzystuje się pewną jego tezę do swoich celów). Dialog o prawo podwójnego przeczenia przebiegałby wtedy następująco.

Przykład I**

O	P
$p\vee\sim p$	$\sim\sim p\to p$
$\sim\sim p$	$p\vee\sim p$
?	$\sim p$
p	p

Zwróćmy uwagę, że P nie dopuszcza się sprzeczności, gdy raz powiada $\sim p$, a potem p, ponieważ za każdym razem inna jest sytuacja. W trzecim wierszu powiada on niejako: „przypuśćmy, że uznaję $\sim p$, co ty na to?" Zaś w następnym wierszu powiada: „skoro na moje pytanie reagujesz uznaniem p, to ja też, ostatecznie, uznaję p, ponieważ reguły dialogowe pozwalają mi uznać zdanie atomowe uznane przez ciebie".

Przykład II

Odwrotne prawo podwójnego przeczenia da się obronić nie tylko klasycznie, lecz także intuicjonistycznie.

O	P	
	$p\to\sim\sim p$	
p	$\sim\sim p$	(obrona wg NO)
$\sim p$	p	(zdanie oponenta)

Przykład III: prawo Peirce'a

Prawo $((p\to q)\to p)\to p$, zwane prawem Peirce'a, należy do logiki klasycznej, nie jest natomiast prawem logiki intuicjonistycznej, co widać z faktu, że nie udaje się go obronić przy prowadzeniu dialogu w myśl reguły NO.

O	P
	$((p\to q)\to p)\to p$
$(p\to q)\to p$	p
?	–

Obrona p (następnik prawa Peirce'a) nie jest możliwa, bo nie „wymusiło się" na oponencie wcześniejszego uznania p.

Przykład III*: wersja z odłożeniem obrony (wg reguły DO)

O	P	
	$((p\to q)\to p)\to p$	
$(p\to q)\to p$	$p\to q$	(atak na implikację oponenta)
p	p	

Przykład III**: wersja z użyciem prawa wyłączonego środka

O	P
$p\vee\sim p$	
	$((p\to q)\to p)\to p$
$(p\to q)\to p$	$p\vee\sim p$
?	$\sim p$
p	p

Gdy przedmiotem dyskusji jest formuła wyłączonego środka, to uniemożliwia jej obronę ograniczenie nałożone na dialog przez regułę NO. Próba obrony $p\vee\sim p$ przez uznanie p załamuje się z miejsca (bo nie ma skąd wziąć p); natomiast, gdy proponent przyjmie $\sim p$, zaś oponent zaprzeczy temu przez p, to ruch obronny polegający na

przejęciu p od oponenta jest opóźniony; a więc byłby dopuszczalny przy regule DO, nie jest natomiast dopuszczalny przy regule natychmiastowej obrony (NO).

F. van Dun: *On the modes of opposition in the formal dialogues of P. Lorenzen.* „Logique et Analyse" n. s. XV 1972; K. Lorenz: *Arithmetik und Logik als Spiele.* Kiel 1961 (fragm. w: Lorenzen i Lorenz – zob. niżej); – – *Main ideas of dialogic logic.* „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric I" (ed. by W. Marciszewski, J. Kopania) – seria czasop. „Zesz. Nauk. Filii UW w Białymstoku". 1980; – – (red.): *Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie".* 1979; P. Lorenzen: *Zur konstruktiven Deutung der semantischen Vollständigkeit klassischer Quoantoren- und Modalkalküle.* „Arch. f. Math. Logik u. Grundlagenforsch." XV 1972; P. Lorenzen, O. Schwemmer: *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie.* 1973; P. Lorenzen, K. Lorenz: *Dialogische Logik.* 1978 (wybór prac obu autorów, zawierający m. in. fragm. w/w pracy Lorenzena 1973); N. Tennant: *Language games and intuitionism.* „Synthese" XLII 1979.

W. M.

logika epistemiczna (z gr. *ἐπιντῆμῆ* – wiedza). Teoria, która charakteryzuje aksjomatycznie lub za pomocą reguł tzw. pojęcia epistemiczne, tj. odnoszące się do aktów lub stanów poznawczych, takie jak: wiedzieć, wierzyć, uznawać, odrzucać, przypuszczać, rozumieć itp.

Zaliczenie teorii tego rodzaju do logiki można uzasadniać jedną z tradycyjnych koncepcji logiki jako nauki o poprawnym myśleniu, lub występowaniem terminów epistemicznych (uznaje, odrzuca i in.) w metajęzyku pewnych działów logiki formalnej (np. w regułach dedukcyjnych rachunku zdań), lub wreszcie związkami tej teorii z działami, które zalicza się do szeroko pojętej logiki, jak pragmatyka lub semantyka intensjonalna. Klasyczną pracą w zakresie logiki epistemicznej jest rozprawa Hintikki (1962); logikę epistemiczną pojmuje się tam w ściślejszym znaczeniu: jako logikę pojęcia „wiedzieć", podczas gdy logika pojęcia „wierzyć" określana jest mianem doksastycznej (z gr. *δοξα*); rozróżnienie to nie przyjęło się jednak szerzej. Zyskała natomiast upowszechnienie, także poza logiką epistemiczną, stosowana w tej pracy metoda dedukcji naturalnej oparta na pojęciu zbioru modelowego (*Dedukcja naturalna – 4), uzupełnionym o dodatkowe warunki dla funktorów epistemicznych i doksastycznych.

Wprowadzenie do historii i piśmiennictwa logiki epistemicznej zawiera monografia Marciszewskiego (1972).

J. Hintikka: *Knowledge and belief. An introduction to the logic of the two notions.* 1962; W. Marciszewski: *Podstawy logicznej teorii przekonań.* 1972; R. Martin: *Intension and decision.* 1963; N. Rescher: *Topics in philosophical logic.* 1968; G. H. v. Wright: *An essay in modal logic.* 1951.

W. M.

logika filozoficzna. Dział badań, którego wyodrębnienie się można umieścić we wczesnych latach siedemdziesiątych, tj. od powstania kwartalnika „Journal of Philosophical Logic". Artykuł wstępny tego pisma uzasadniał jego potrzebę spostrzeżeniem, że przyszedł czas, kiedy wiele rzeczy powstaje w logice z motywacji lub inspiracji filozoficznej, a wiele z tego, co powstaje w filozofii, odwołuje się do metod i rezultatów logiki. Logika filozoficzna obejmuje te rachunki logiczne, które służą wyjaśnieniu i rozwijaniu pojęć filozoficznych. Do wyodrębnienia tej gałęzi logiki przyczynił się z jednej strony rozwój *analizy logicznej, obejmujący m. in. tworzenie systemów formalnych w celu *eksplikacji idei filozoficznych, z drugiej zaś strony rozwój logik nieklasycznych, po części motywowany problematyką filozoficzną, a po części biorący się z innych źródeł.

Pierwszym autorem, który stworzył rachunek nieklasyczny z motywacji filozoficznej, był Jan Łukasiewicz; jego *logika wielowartościowa miała się przyczynić do wyjaśnienia pojęć występujących w sporze indeterminizmu z determinizmem. Ważnym impulsem przygotowującym rozwój filozoficznych zastosowań logiki było stworzenie przez Lewisa *logiki modalnej, której głównym zadaniem było wyjaśnienie pojęcia dedukcji, a więc pojęcia należącego do filozofii nauki. Później ujawniły się inne aspekty filozoficzne logiki modalnej, zwłaszcza po dołączeniu do niej modalnego rachunku kwantyfikatorów, zapoczątkowanego w r. 1946, niezależnie, przez R. Barcan i przez R. Carnapa.

Aby zilustrować pewne filozoficzne aspekty logiki ograniczając się do jednego wybranego przykładu, wybierzemy problematykę ontologiczną związaną z tzw. formułą Barcan z pracy tej autorki (1946) zawierającej modalny rachunek kwantyfikatorów; wśród aksjomatów rachunku występuje formuła

$$\mathrm{M}((\mathrm{E}x)A) \Rightarrow (\mathrm{E}x)\mathrm{M}(A),$$

gdzie literę M czytamy „jest możliwe, że" a znak $\Rightarrow$ jest symbolem implikacji ścisłej. Formuła ta głosi, co następuje: jeśli możliwe, że istnieje coś, co spełnia warunek A, to istnieje coś, co może spełniać A. Nie trudno o przykład podający w wątpliwość filozoficzną trafność tej tezy. Niech będzie to podstawienie: jeśli możliwe jest istnienie króla polskiego w XXII wieku, to istnieje ktoś. kto może być królem polskim w XXII wieku. Jest przecież do pomyślenia taki świat, w którym nie istnieje nikt, kto miałby ową możliwość stania się królem (wtedy fałszywy jest następnik), ale ewentualność taka, nawet jeśli nie spełniona, nie jest sprzeczna z wiedzą o tym świecie, jest przeto czymś możliwym (a więc prawdziwy jest wtedy poprzednik).

W celu zapobieżenia tego rodzaju trudnościom została zainicjowana przez Barcan i innych nowa interpretacja kwantyfikatorów, którą nazwano podstawieniową (substitution interpretation) w odróżnieniu od klasycznej, którą zaczęto nazywać referencjalną (referential) – zob. Carnap 1942–43, Dunn i Belnap 1968, Hintikka 1962, Leblanc 1973, Marcus Barcan 1962.

Interpretacja podstawieniowa polega na odczytaniu for-

muły $(Ex)A(x)$ za pomocą zwrotu: niektóre podstawienia $A(x)$ są prawdziwe; interpretacja klasyczna każe czytać: przynajmniej jeden przedmiot spełnia $A(x)$. Problem stosunku między interpretacją podstawieniową i referencjalną jest w stadium dyskusji, w której zarysowuje się pogląd o istnieniu dwóch alternatywnych semantyk: klasycznej, pochodzącej od Tarskiego i związanej z interpretacją referencjalną, oraz nowej, związanej z interpretacją podstawieniową; tę drugą nazwano „truth value semantics" (zob. np. Leblanc 1976). Jedną z różnic jest to, że semantyka związana z interpretacją podstawieniową wymaga istnienia w języku stałych indywiduowych lub parametrów indywiduowych w takiej liczbie, żeby można było „ponazywać" wszystkie elementy uniwersum, ponieważ nazwy te służą do operacji podstawienia; konsekwencją tego warunku jest to, że zbiór elementów uniwersum może być co najwyżej przeliczalny. W zamian za takie ograniczenie uzyskuje się m. in. uproszczenie pewnych dowodów (zob. np. Smullyan 1968).

Filozoficzny sens interpretacji podstawieniowej staje się lepiej widoczny, gdy zestawi się ją z problematyką pracy Ajdukiewicza o pojęciu istnienia, w której pojęcie przedmiotów intencjonalnych (nie przysparzających kłopotu formule Barcan) definiuje się za pomocą pojęcia uznawania czegoś za prawdę (por. Marciszewski 1973).

W ten sposób pojęcia spełniania, denotacji, modelu itp., jeśli zechcemy je wprowadzić, będą pojęciami wtórnymi, a pierwotnym pojęciem semantyki będzie pojęcie prawdy. Tak np., jeśli uznaje się za prawdziwe zdanie „Zeus porwał Europę", to pociąga to przyjęcie pewnej dziedziny przedmiotów, można je nazwać intencjonalnymi, wśród których są obiekty spełniające formułę „*x* porwał *y*" i denotowane przez nazwy „Zeus" i „Europa"; w ten sposób punktem wyjścia w ustalaniu stosunków semantycznych jest przydzielenie zdaniom atomowym wartości logicznej. To samo posunięcie chroni przed falsyfikacją formułę Barcan, bo jeśli przyzna się prawdziwość zdaniu „*a* jest królem Polski w XXII wieku" (*a* jest tu parametrem indywiduowym), zagwarantuje to równoczesną prawdziwość poprzednika i następnika w odpowiednim podstawieniu w formule Barcan.

Alternatywność przeto rozważanych semantyk polega nie na odmienności repertuaru pojęć, lecz odmienności stosunków między pojęciami z tego samego repertuaru. Pewne podobieństwo do nowej semantyki wykazuje koncepcja zbiorów modelowych (model sets) pochodząca od Hintikki (*Dedukcja naturalna – 4).

Interpretacja podstawieniowa okazała się jednym z ważnych środków formalnych logiki filozoficznej. Innym ważnym środkiem stała się Kripkego semantyka możliwych światów (*Logika modalna – 3). Dzięki wynikom Kripkego różne teorie zaliczane do logiki filozoficznej stały się logiką sensu stricto, otrzymały bowiem odpowiednie semantyki. Posiadanie semantyki jest dla teorii logicznej istotne, ponieważ służy do rozstrzygnięcia, czy klasa twierdzeń danej teorii pokrywa się z klasą zdań (w jej języku) prawdziwych: teoria jest niesprzeczna, gdy wszystkie jej twierdzenia są prawdziwe, jest zaś pełna, gdy każda prawda (wyrażalna w jej języku) jest jej twierdzeniem. Rozstrzygnięcie o każdej z tych cech, że przysługuje lub nie przysługuje jakiejś teorii wymaga uprzedniego skonstruowania semantyki. Posiadanie odpowiednich semantyk podniosło znaczenie logik filozoficznych, a zarazem, niwelując pewną linię demarkacyjną dzielącą je od logiki zwanej matematyczną, przyczyniło się do większej jedności logiki.

Zakres logiki filozoficznej trudno jest określić, ponieważ rozszerza się on przez przybywanie nowych teorii. Można jednak wskazać na pewną niewątpliwą część tego zakresu, jaką stanowią logiki intensjonalne. *Intensjonalność języka jest dla teorii logicznej warunkiem wystarczającym jej charakteru filozoficznego, a spełniają go takie teorie, jak: *logika deontyczna, *logika epistemiczna, logika *implikacji relewantnej, *logika modalna, *logika temporalna.

Obszerny przegląd teorii i zagadnień logiki filozoficznej daje Rescher 1968. Reprezentatywne prace z logiki filozoficznej znaleźć można w zbiorach: Anderson i in. 1975, Davis i in. 1969, Körner 1976, Leblanc 1973. Obszernym opracowaniem historycznym, ukazującym związki współczesnej logiki z tradycyjnymi zagadnieniami ontologii jest monografia Künga 1967.

K. Ajdukiewicz: *W sprawie pojęcia istnienia.* [W:] – – *JiP.* T. 2; A. R. Anderson, R. Barcan Marcus, R. M. Martin (red.): *The logical enterprise.* 1975; R. C. Barcan: *A functional calculus of first order based on strict implication.* „JSL" XI 1946; R. Barcan Marcus: *Interpreting quantifiers.* „Inquiry" V 1962; Beth: *Foundations*; R. Carnap: *Studies in semantics.* 1942–43; – – *Modalities and quantification.* „JSL" XI 1946; J. W. Davis, D. J. Hockney, W. K. Wilson (red.): *Philosophical logic.* 1969; J. M. Dunn: *A truth value semantics for modal logic.* [W:] Leblanc (red.) 1973; J. M. Dunn, N. D. Belnap, Jr.: *The substitution interpretation of quantifiers.* „Nous" II 1968; J. Hintikka: *Knowledge and belief.* 1962; S. Körner (red.): *Philosophy of logic.* 1976; Küng: *Ontology*; H. Leblanc (red.): *Truth, syntax and modality.* 1973; H. Leblanc: *Truth-value semantics.* 1976; W. Marciszewski: *Problem istnienia przedmiotów intencjonalnych.* „St. Semiot. IV 1973; N. Rescher: *Topics in philosophical logic.* 1968; R. M. Smullyan: *First-order logic.* 1968.

W. M.

logika formalna (l. symboliczna). Podstawowy dział logiki, w którym bada się schematy, czyli formy rozumowań niezawodnych (tj. takich, które zawsze prowadzą do prawdziwych wniosków, o ile tylko przesłanki są prawdziwe) oraz mających najwyższy stopień ogólności (w tym sensie, że znajdują zastosowanie we wszelkich naukach i w języku codziennym).

Logikę formalną nazywa się też niekiedy logiką dedukcji w przeciwstawieniu do *logiki indukcji pojętej jako pewna teoria *prawdopodobieństwa, mianowicie prawdopodobieństwa logicznego. Logika indukcji przy tym ujęciu

również badałaby formy pewnych rozumowań: tych, które są pozbawione niezawodności, obdarzone za to zdolnością poszerzania naszej wiedzy o nowe informacje nie zawarte w przesłankach; wiązałoby się z tym ograniczenie jej zastosowań do nauk empirycznych (zob. Carnap). W dalszym ciągu słowo „logika" będzie używane jako skrót zwrotu „logika formalna".

Jako najogólniejsza charakterystyka logiki formalnej nasuwa się: szkicowe omówienie jej dwóch podstawowych działów, jakimi są *rachunek zdań i *rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu (dokładniejsze omówienia znajdują się w osobnych hasłach na te tematy), wskazanie na jej najbardziej rozpowszechnione interpretacje (logika jako teoria przedmiotów i jako teoria rozumowań), wreszcie informacja o jej podziałach, kierunkach i głównych datach w jej rozwoju.

1. Rachunek zdań. Z pojęciem formy rozumowania związane jest w pewien sposób pojęcie formy logicznej (inaczej: schematu, struktury) zdania. Logikę buduje się bądź jako system form rozumowania opisywanych przy pomocy reguł (*Dedukcja naturalna), bądź jako system pewnych form zdaniowych; ale również i w drugim przypadku znajduje ona zastosowanie jako charakterystyka poprawnych rozumowań, ponieważ zawsze możliwe jest przejście od formy zdaniowej do formy rozumowania (por. 3).

Pojęcie formy logicznej zdania trudno określić w sposób ogólny, łatwiej natomiast je wyjaśnić, biorąc pod uwagę jakiś język z określoną listą symboli stałych i zmiennych. Niech będzie to język *rachunku zdań, do którego należą m. in. symbole odpowiadające słówkom „lub" i „nie" (inaczej: nieprawda, że) i ewentualnie inne, ich dobór jest uzasadniony względem na badanie tego, jak zależy prawdziwość zdań złożonych od prawdziwości ich składników. Porównajmy wyrażenie [1] „Russell jest logikiem lub nieprawda, że Russell jest logikiem" z wyrażeniem [2] „Russell jest logikiem". To drugie jest prawdziwe, ale przejdzie w fałsz, gdy np. imię własne „Russell" zastąpi się imieniem „Charlie Chaplin" lub słowo „logik" słowem „generał". Żadne jednak tego rodzaju zabiegi nie zdołają przekształcić w fałsz zdania [1], ponieważ dla jego prawdziwości obojętna jest treść wyrażeń składowych, z wyjątkiem treści słówek „lub" i „nie"; dopiero gdyby te słowa opuścić lub zamienić na inne, możliwe byłoby przekształcenie [1] w fałsz. One więc stanowią elementy istotne dla prawdziwości [1], podczas gdy reszta wyrażeń może być dowolnie wymieniana bez wpływu na prawdziwość. Można to wyrazić pisząc [1] w ten sposób, że elementy wymienialne (nieistotne dla prawdziwości) zastąpimy kreskami. Powstanie w ten sposób schemat, czyli forma, dająca się wypełniać rozmaitą treścią, czyli materią: – – lub nieprawda, że – –.

Dogodniej jest zamiast kresek używać liter reprezentujących zdania i nazwanych dlatego zmiennymi zdaniowymi: wszystkie pozostałe symbole rozważanego języka noszą miano stałych logicznych. Pisząc zmienne zamiast kresek, otrzymuje się formułę (z łac. formula – foremka) „p lub nie p" (tzw. prawo wyłącznego środka). Inny przykład: „Jeśli (jest tak, że) jeśli grzmi, to błyska, to: jeśli nie błyska, to nie grzmi". Zastąpmy słowo „jeśli" literą C, słowo „nie" literą N, a resztę symbolami zmiennymi. Powstaje formuła (zwana prawem transpozycji): $CCpqCNqNp$; w innej notacji: $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$.

2. Rachunek kwantyfikatorów. Z terminów i twierdzeń rachunku zdań robi się użytek w teorii zwanej *rachunkiem kwantyfikatorów. Ale inaczej niż w rachunku zdań, w teorii tej uwidoczniona jest także wewnętrzna struktura, mianowicie forma logiczna zdań prostych (tj. bez spójników zdaniowych) w rodzaju zdania [2]. Wyróżnia się mianowicie podmiot, niech go reprezentuje zmienna nazwowa x, oraz orzeczenie, czyli predykat (tutaj: „jest logikiem"), które niech będzie symbolizowane przez literę L. Przyjmując umownie sposób pisania w kolejności: orzeczenie – podmiot, otrzymujemy zwrot $L(x)$. Tego rodzaju formuły przechodzą w zdania bądź w wyniku podstawienia za x jakiejś nazwy, bądź w wyniku poprzedzenia danej formuły symbolami, którym odpowiadają w języku potocznym słowa „każdy" i „niektóry". Zdanie [3] „Każdy x jest logikiem", napiszemy jako: $\wedge x L(x)$. Zdanie [4] „Pewien x jest logikiem", zapiszemy jako: $\vee x L(x)$. Symbole $\wedge x$ i $\vee x$ nazywają się kwantyfikatorami, zmienne zaś, do których odnoszą się kwantyfikatory, nazywają się zmiennymi związanymi.

Żeby móc oceniać prawdziwość zdań tak zbudowanych, trzeba jeszcze określić, do jakich przedmiotów chcemy odnosić zmienne nazwowe x, y, z etc. I tak wyrażenie [3] jest fałszywe w odniesieniu do przedmiotów ze zbioru ludzi, natomiast [4] jest w tym zbiorze spełnione, czyli prawdziwe. Prawami logicznymi rachunku kwantyfikatorów są jedynie te zdania zbudowane z predykatów, zmiennych nazwowych oraz kwantyfikatorów, które są prawdziwe w każdym niepustym zbiorze przedmiotów, a nie w samym tylko zbiorze ludzi, lub liczb, punktów, gwiazd, wyrażeń języka etc. Takim zdaniem jest np. formuła: [5] $\wedge x Q(x) \to \vee x Q(x)$, prawdziwa zarówno wtedy, gdy interpretujemy ją jako zdanie o zbiorze ludzi, jak i wtedy, gdy odnosimy ją do owadów, gwiazd, cząstek elementarnych itd. Prawdziwość zawdzięcza ona nie swojej treści, obojętna jest tu bowiem treść predykatu L i sposób interpretowania zmiennej x, ale układowi znaków logicznych: $\wedge x$, $\vee x$ oraz $\to$. Te właśnie znaki (i ewentualnie inne spójniki rachunku zdań) wyznaczają w rachunku kwantyfikatorów formę logiczną wyrażenia. Innym przykładem wyrażenia prawdziwego ze względu na swą formę niech będzie odpowiednik tradycyjnego sylogizmu Barbara *Sylogistyka zdań asertorycznych): [6] $\wedge x[P(x) \to Q(x)] \wedge \wedge x[Q(x) \to S(x)] \to \wedge [P(x) \to S(x)]$

(symbol „ $\wedge$ " odczytujemy jako „i"). Niezależnie od tego, co znaczą predykaty P, Q, S i jak interpretujemy zmienną x, wyrażenie to pozostaje prawdziwe. Formuła [6] dostarcza zarazem przykładu na tę grupę twierdzeń rachunku kwantyfikatorów, które są prawdziwe (w odróżnieniu np. od [5]) także w dziedzinie pustej.

3. Logika przedmiotowa i logika jako teoria rozumowań. Formuły, które są prawdziwe ze względu na formę logiczną, są tym samym spełniane przez wszystkie przedmioty z dowolnej (niepustej) dziedziny rozważań. Można je więc traktować jako schematy zdań prawdziwych w dowolnej dziedzinie przedmiotów. Z tego względu proponują niektórzy (np. K. Ajdukiewicz) tak pojętą logikę nazywać przedmiotową logiką formalną. Nie jest ona nauką o formach rozumowania, ale maksymalnie ogólną teorią rzeczywistości. Najczęściej buduje się logikę formalną w tej właśnie postaci, tj. jako formalną teorię przedmiotów, a nie jako naukę o formach rozumowania. Taki wykład logiki zawiera np. przeważająca większość podręczników. Nie oznacza to jednak poniechania tradycyjnej koncepcji logiki jako nauki o formach poprawnego wnioskowania. Istnieje bowiem przejście od formalnej logiki przedmiotowej do formalnej teorii rozumowań, które jest możliwe dzięki temu, że każdemu twierdzeniu logiki przedmiotowej w postaci okresu warunkowego przyporządkowany jest jednocześnie pewien schemat poprawnego wnioskowania, opisany pewną regułą. Oto reguła odpowiadająca zdaniu [5]: Jeśli uznaje się zdanie mające formę $\wedge xF(x)$, to wolno uznać na tej podstawie (tj. wyprowadzić jako wniosek) zdanie mające formę $\vee xF(x)$. Takie reguły uznawania przyjęło się zapisywać krótko w ten sposób, że zdanie będące podstawą uznania, czyli przesłanką wypisuje się nad poziomą kreską, wniosek zaś, który wolno uznać, pod tą kreską. Powstaje w ten sposób schemat w rodzaju:

$$\frac{\wedge xF(x)}{\vee xF(x).}$$

A oto schemat przyporządkowany tezie [6]:

$$\frac{\begin{array}{c}\wedge x[P(x)\rightarrow Q(x)] \\ \wedge x(Q(x)\rightarrow S(x))\end{array}}{\wedge x[P(x)\rightarrow S(x)]}$$

Zachodzi też dla logiki pierwszego rzędu zależność odwrotna, mianowicie, każdemu schematowi wnioskowania jest przyporządkowane jednoznacznie twierdzenie w formie implikacji, której poprzednikiem jest koniunkcja występujących w schemacie przesłanek, zaś następnikiem zdanie występujące w schemacie jako wniosek; zależność ta stanowi treść *twierdzenia o dedukcji. Wysoce ogólną teorią schematów wnioskowania jest tzw. rachunek sekwencji Gentzena (*Rachunek Gentzena; *Dedukcja naturalna – 2).

4. Podział logiki i okresy rozwojowe. Logikę (formalną) dzieli się na logikę tradycyjną i współczesną; początki tej drugiej przypadają na lata ok. połowy XIX w. Podział ten ma podstawę nie tylko chronologiczną; jest to jednocześnie podział na dwie dyscypliny logiczne różniące się genezą, zakresem i językiem. Wprawdzie *logika tradycyjna da się interpretować jako pewien fragment logiki współczesnej, ale nie przekreśla to jej swoistości; stąd w wielu podręcznikach lub wykładach poświęca się jej osobną uwagę.

W logice współczesnej odróżnia się tzw. klasyczny rachunek logiczny, który został naszkicowany wyżej, od rachunków nieklasycznych, takich jak *logiki modalne, *logiki wielowartościowe, *systemy Leśniewskiego, różne *logiki uogólnione, logiki *implikacji relewantnej, etc. Rachunek klasyczny składa się z rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów, do którego dołącza się niekiedy symbol *identyczności i symbole funkcyjne. Tak określony system zawiera wszystkie *tautologie logiczne i tylko tautologie logiczne. Ta jego własność sprawia, że przysługuje mu, w najbardziej ścisłym sensie, miano logiki formalnej (zob. Kneale).

W bliskim związku z logiką pozostaje dyscyplina matematyczna zwana *teorią mnogości. Znaczna jej część może być sformułowana jako przedmiotowy (w sensie przedmiotowej logiki – por. odcinek 3) rachunek kwantyfikatorów nieskończonego rzędu; takim ujęciem teorii mnogości jest *teoria typów. Ale także i wtedy, gdy teorię mnogości konstruuje się niezależnie od logiki (np. system Zermelo), zachowuje ona powiązania z logiką; pojęcia teorii mnogościowe odgrywają istotną rolę w metalogice, tj. w tym dziale *metodologii nauk dedukcyjnych, w którym bada się strukturę i własności teorii logicznych i matematycznych.

W tej części teorii mnogości, która da się sformułować w terminach logicznych, znajduje się tzw. rachunek klas, czyli algebra (Boole'a) zbiorów. Jest to jedna z interpretacji *algebry Boole'a, która traktowana jest czasem jako osobna teoria logiczna, a to z racji wyróżnionego miejsca, jakie zajmuje dzięki wielości zastosowań i dzięki temu, że jej powstanie uważa się za początek logiki współczesnej. Kontynuatorami badań algebraicznych Boole'a byli E. Schröder (1841–1902) i Ch. S. Peirce (1839–1914), którzy, niezależnie od siebie, rozwinęli teorię relacji oraz doszli do pojęcia kwantyfikatora. Prace tych dwóch autorów zamykają pierwszy okres w rozwoju algebraicznego nurtu logiki, który po kilkudziesięciu latach odżył w nowszych badaniach logicznych, m. in. A. Tarskiego.

Inicjatorami innego nurtu, postulującego ugruntowanie matematyki w logice byli G. Frege (1848–1925) oraz autorzy *Principia mathematica*: A. N. Whitehead i B. Russell. Od tych ostatnich pochodzi teoria typów; jej celem było m. in. zapobieżenie *antynomiom, mianowicie tzw.

antynomii klas, którą wykrył Russell w systemie Fregego. Zarówno w pracach Fregego, jak i w *Principia* został skonstruowany rachunek nazw i rachunek kwantyfikatorów, który w tym drugim dziele spleciony jest z teorią typów; ujęcie rachunku kwantyfikatorów jako systemu niezależnego od teorii typów wykrystalizowało się później, m. in. za sprawą Hilberta i Ackermanna.

K. Ajdukiewicz: *Logika, jej zadania i potrzeby w Polsce współczesnej*. [W:] *JiP*. T. 2; Beth: *Foundations*; R. Carnap: *Logical foundations of probability*. 1950; A. Church: *Logic, formal*. [W:] *A dictionary of philosophy*. 1942; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Kneale: *Development of logic*; Kotarbiński: *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej*. 1958 (1 wyd. 1929); Quine: *ML*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; W. I. Stjażkin: *Formirowanije matiematiczeskoj logiki*. 1967.

W. M.

logika indukcji. Podział metod naukowych na dedukcyjne i indukcyjne oraz traktowanie logiki jako narzędzia poznania naukowego (gr. *ὄργανον* – narzędzie; tytuł dzieł logicznych Arystotelesa) dostarcza naturalnej podstawy do wyróżnienia dwóch jej zasadniczych działów: logiki dedukcji i logiki indukcji.

Warunki dla powstania tej ostatniej pojawiły się w czasach nowożytnych, wraz z rozwojem badań empirycznych. W średniowieczu przyjmowano za Platonem i Arystotelesem koncepcję nauki, dla której wzorem była geometria (najdoskonalej wówczas zrealizowana w *Elementach* Euklidesa) i która warunek naukowości upatrywała w stosowaniu metody dedukcyjnej. Średniowiecze miało też prekursorów metod eksperymentalnych (Roger Bacon), ale dopiero na początek czasów nowożytnych przypada ich zastosowanie prowadzące do istotnych dla nauki wyników oraz próba teoretycznego ujęcia indukcji w *Novum Organon* (1620) Franciszka Bacona ('Novum' w stosunku do 'Organon' Arystotelesa, będącego logiką dedukcji). O ile F. Bacon, prawem kontrastu, mało cenił dedukcję, o tyle kontynuator jego logiki indukcji, J. Mill, zajął postawę bardziej wyważoną. Choć jego główne dzieło szerzej traktuje o sprawach indukcji, to jednak tytuł *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej* (1843) ustawia równolegle obie te gałęzie logiki. Od Bacona i Milla pochodzi teoria tzw. *indukcji eliminacyjnej, która przy pewnej interpretacji przechodzi w procedurę dedukcyjną. Przy takim ujęciu, które jednak nie rysowało się wyraźnie dla Bacona i Milla, nie ma potrzeby budowania specyficznej logiki rozumowań indukcyjnych. Potrzeba taka powstaje natomiast w przypadku tzw. *indukcji enumeracyjnej niezupełnej. Tej ostatniej dotyczy słynny problem indukcji.

1. Z historii problemu indukcji. Zasługa postawienia tego problemu należy do D. Hume'a, który w pracy *Badania dotyczące rozumu ludzkiego* (1748) sformułował alternatywę: albo wiedza jest pewna, ale wtedy dotyczy tylko idei skonstruowanych przez nasz umysł (takich, jak przedmioty matematyczne), albo dotyczy faktów realnego świata, ale wtedy pozbawiona jest pewności. Myśli te dla współczesnych Hume'a miały charakter paradoksu. A to dlatego, że istniała nauka, którą uważano za pewną i nieobalalną, a zarazem dotyczącą realnego świata, mianowicie fizyka Newtona (1642–1727). Toteż Kant, który podjął problem Hume'a, upatrywał główne zadanie krytyki rozumu w rozwikłaniu tego problemu; monumentalna konstrukcja systemu Kanta powstała jako rezultat tych usiłowań. Zwrotem w historii indukcji było powstanie fizyki relatywistycznej, a w rezultacie upadek problemu Kantowskiego: skąd bierze się pewność wiedzy przyrodniczej? Przyjęło się powszechnie mniemanie, że nie ma pewności, że wiedza nie jest skończonym systemem, ale ciągiem następujących po sobie teorii, z których następna wypiera poprzednią, zajmując jej miejsce jako lepsze przybliżenie do rzeczywistości, nigdy jednak jako ostateczne rozwiązanie.

Upadek problemu w wersji Kantowskiej nie likwidował go jednak, lecz tylko przygotował nową jego postać: zamiast pytania, co usprawiedliwia pewność, pojawiło się pytanie, co usprawiedliwia przyjęcie twierdzeń nauki jako prawdopodobnych lub lepszych niż już istniejące i dotyczące tego samego problemu. Zagadnienie to dało impuls współczesnym próbom ugruntowania logiki indukcji, podejmowanym w latach dwudziestych i następnych naszego wieku. Główny udział w sformułowaniu tego problemu od strony filozoficznej, a także w jego rozwiązywaniu poprzez proponowanie konkretnych teorii indukcji, mają autorzy z kręgu neopozytywizmu, czyli empiryzmu logicznego, w szczególności zaś R. Carnap. Podczas gdy jedni formułowali idee filozoficzne (Schlick, Neurath, Wittgenstein), inni zaś, korzystając z matematycznego aparatu teorii prawdopodobieństwa, opracowywali teorie indukcji (z neopozytywistów Reichenbach, a poza tym Keynes, Jeffreys, Braithwaite, Kneale, Kemeny i in.), Carnap był wybitnie aktywny na obu tych polach. Toteż jego propozycje stanowią próbę na tyle reprezentatywną, żeby móc ją przedstawić jako ilustrację problematyki indukcji (por. 3).

2. Treść problemu indukcji. Mówiąc współcześnie o problemie indukcji ma się na myśli jedną (lub obie) z następujących spraw: 1° problem uzasadnienia samej zasady indukcji (ang. justification of induction); 2° problem możliwości zbudowania logiki indukcji, tj. takiej teorii procedur indukcyjnych, która istotne cechy miałaby wspólne z logiką dedukcji, traktowaną jako logika, par excellence'.

Pierwszy problem rysuje się wyraziście na gruncie dualizmu przejętego od Hume'a przez neopozytywistów, tj. przekonania, że każde zdanie jest bądź o ideach, bądź o faktach. Pierwsze – to *zdania analityczne, czyli takie, które akceptuje się wyłącznie na podstawie rozumienia sensu terminów (np. „Żadne dziecko nie jest dorosłe").

Drugie – to zdania syntetyczne (inaczej: empiryczne), czyli takie, które uznaje się w wyniku indukcji wychodzącej od danych obserwacyjnych (np. „Żadne dziecko nie zna logiki matematycznej"). Powstaje pytanie, do którego z tych rodzajów wiedzy należy zasada indukcji, występująca również pod mianem zasady empirycznej *weryfikacji lub *konfirmacji – będącej osłabioną postacią weryfikacji. Zasada indukcji byłaby zdaniem pozwalającym na przejście logiczne od wyników obserwacji do twierdzeń ogólnych, takich jak prawa czy hipotezy.

Jeśli zasada indukcji należy do zdań analitycznych, to stanowi tylko wyraz umowy terminologicznej, nie informującej o niczym, co należy do rzeczywistości pozajęzykowej; wtedy jednak byłoby niezrozumiałe, dlaczego kierowanie się tą zasadą ma gwarantować (przynajmniej w większości przypadków) sukces poznawczy. Jeśli jednak uznać zasadę indukcji za zdanie empiryczne, wymagać ono będzie – w myśl teorii indukcji – uzasadnienia indukcyjnego, to zaś, aby było prawomocne, musi się opierać na zasadzie indukcji. Tak dochodzi się do błędnego koła lub do regresu w nieskończoność. Powyższa argumentacja godzi w zasadę indukcji, o ile jest ona sprzęgnięta z owym dualizmem cechującym doktrynę neopozytywizmu.

W drugiej części problemu indukcji, zakładając, że sama zasada indukcji jest dostatecznie usprawiedliwiona, stawia się pytanie: jak skonstruować logikę indukcji, a więc taką teorię, która na równi z teorią dedukcji zasługiwałaby na miano logiki? Tę część zagadnienia można by nazwać problemem logiki indukcji. Rozpada się ono znowu na dwa punkty.

Pierwszy punkt da się przedstawić jako pytanie: czy jest możliwa maszyna indukcyjna? Czy można by więc, dostarczywszy takiej maszynie danych obserwacyjnych, otrzymać od niej najlepszą z możliwych hipotez tłumaczących owe dane? Co do tego punktu istnieje zgoda, wyrażająca się w odpowiedzi negatywnej. Ale zwolennicy logiki indukcji nie uważają tego za istotną przeszkodę, ponieważ niemożliwość „mechanicznych" rozstrzygnięć (czy dokonuje ich człowiek, czy maszyna, to już sprawa drugorzędna) zachodzi również w tych teoriach logiki dedukcji, którym nie przysługuje cecha *rozstrzygalności (pewien dowód nierozstrzygalności logiki indukcji podał Hintikka).

Punktem drugim jest pytanie, czy hipotezy, do których doszło się w wyniku jakiejś „intuicji opartej na wczuciu się w doświadczenie" (niem. ...die auf Einfühlung in die Erfahrung sich stützende Intuition – wyrażenie Einsteina), można następnie sprawdzić metodami logicznymi. Innymi słowy, czy istnieje analogia z tymi działami logiki formalnej, które wprawdzie nie są rozstrzygalne (np. *rachunek kwantyfikatorów), ale jeśli istnieje dowód, to każdy krok legitymuje się odpowiednimi regułami dowodzenia, mówiącymi, jak przekształcać twierdzenia prawdziwe w celu otrzymania z nich nowych twierdzeń prawdziwych. Krytycy logiki indukcji nie widzą dla niej takich możliwości, zwolennicy natomiast sądzą, że sytuacja jest zasadniczo taka sama, jak w logice dedukcji.

3. Przykłady twierdzeń logiki indukcji. Decydującym argumentem na rzecz możliwości logiki indukcji byłoby zbudowanie takiej teorii. Bierze się pod uwagę dwie jej odmiany, jakimi są: porównawcza logika indukcji, pozwalająca ocenić, która z dwóch porównywalnych hipotez jest silniej uprawdopodobniona przez swoje przesłanki, oraz ilościowa logika indukcji, bardziej ambitna, bo zmierzająca do określenia stopnia prawdopodobieństwa (konfirmacji) rozważanych hipotez. Do tej odmiany należy też teoria *wnioskowania statystycznego, która doszła do stosunkowo najpoważniejszych wyników. Żadna z tych wersji, proponowanych przez różnych autorów, nie zyskała powszechnej aprobaty, a niejedno twierdzenie spotkało się z krytyką, wykazującą jego paradoksalne konsekwencje. Toteż osiągnięcie tej pozycji, jaką ma logika dedukcji, jest dla logiki indukcji wciąż nie zrealizowanym programem.

Jako przykład twierdzeń ilościowej logiki indukcji (w sprawie przykładów z porównawczej logiki indukcji zob. **konfirmacja**) oraz trudności, jakie towarzyszą tym sformułowaniom, może posłużyć następująca formuła z teorii Carnapa, podająca pewien sposób obliczania konfirmacji hipotezy h ze względu na przesłanki e, a więc Kon (h, e):

$$\text{Kon}\,(h, e) = \left(\frac{n}{N}\right)^i$$

gdzie n jest liczbą zaobserwowanych przypadków, N liczbą indywiduów należących do dziedziny rozpatrywanej przez daną teorię, zaś i określa stopień informacyjności predykatu występującego w zdaniu h (im więcej informacji dostarcza dane zdanie, tym mniejsze jest jego prawdopodobieństwo początkowe, czyli aprioryczne, tj. to, jakie mu przypisujemy przed uzyskaniem danych doświadczalnych). Wzór ten prowadzi do paradoksalnej konsekwencji, że stopień prawdopodobieństwa empirycznego (czyli konfirmacji) praw naukowych, które odnoszą się do nieskończonej liczby przypadków, równa się zeru; albowiem gdy N zmierza do nieskończoności, to Kon (h, e) maleje do zera. Ponadto wzór ten faworyzuje hipotezy mniej informacyjne. Tak np. z dwóch zdań: „Wszystkie kruki są czarne" i „Wszystkie kruki są czarne lub białe", każe wybrać to drugie (mniej informacyjne) jako mające wyższą konfirmację z racji mniejszego wykładnika potęgowego i $\left(\frac{n}{N}\right.$ jest ułamkiem właściwym$\left.\right)$. Kryterium to obowiązuje także i wtedy, gdy nie zaobserwowało się w ogóle żadnych białych kruków. Zachęca więc ono do sformułowań asekuracyjnych, w których na wszelki wypadek (a

nuż odkryje się kiedyś białego kruka) zmniejszałoby się zawartość informacyjną po to, żeby podnieść prawdopodobieństwo.

Carnap, świadom pierwszej z tych trudności, doszedł do wniosku, że w nauce należy zrezygnować z praw ogólnych, a zmierzać tylko do przewidywania jednostkowych zdarzeń. Zaproponował w tym celu inny wzór, mający służyć do obliczania prawdopodobieństwa owych zdarzeń opierając się na dotychczasowej wiedzy o przypadkach analogicznych. Jest to tzw. (ang.) instance-confirmation, obliczana wg wzoru:

$$\text{kon}\,(h, e) = 1 - \frac{z+i}{n+2^k}$$

gdzie n jest liczbą zaobserwowanych przypadków, z jest liczbą przypadków niezgodnych z h, zaś k jest liczbą predykatów elementarnych danej teorii. Propozycja ta budzi jednak nowe zastrzeżenia. Wszak dla pewności przewidywań istotną rolę odgrywa to, czy nie zaobserwowano żadnych przypadków niezgodnych z naszą hipotezą h, czy też zaobserwowano choćby jeden przypadek. Tymczasem powyższy wzór bagatelizuje tę różnicę między wiedzą bezwyjątkową a wiedzą statystyczną, bo w przypadku twierdzeń bezwyjątkowych w miejsce z wpisze się 0, w przypadku zaś znalezienia jednego wyjątku wpisze się 1; praktycznie nie wpłynie to na wartość Kon (h, e), chociaż różnica jest zasadnicza. Ponadto, wielkość k wprowadza do obliczeń niepożądany aprioryzm (podobnie, jak w poprzednim wzorze wielkość i będąca pewną funkcją k): jeśli wzbogaci się język naszej teorii o jakieś predykaty elementarne (tj. nie będące koniunkcjami innych predykatów), to otrzymamy natychmiast większą wartość dla Kon (h, e), choćby nie przybyły żadne nowe obserwacje.

4. Dane historyczno-bibliograficzne. Próby Carnapa, przedstawione tutaj z racji związanych z nimi trudności typowych dla problemu indukcji, reprezentują jeden kierunek badań, posługujący się charakterystyką *dziedziny teorii zawierającej rozważaną hipotezę h. Uwzględnia się więc we wzorach na prawdopodobieństwo takie dane, jak liczba indywiduów danej dziedziny czy liczba własności (predykatów). Inny nurt poszukiwań wiąże teorię indukcji z teorią decyzji przez wprowadzenie pojęć zysku (ewentualnie straty), jakiego oczekuje się w przypadku, gdy hipoteza, na której opieramy decyzję, okaże się prawdziwa (ewentualnie fałszywa). W polskiej literaturze logicznej istnieją na ten temat prace K. Ajdukiewicza oraz K. Szaniawskiego.

Logika indukcji była przedmiotem zainteresowania bardzo wielu autorów. Stosunkowo obszerna bibliografia przedmiotu (do roku 1950) znajduje się w pracy Carnapa. Wśród najczęściej wymienianych autorów znajdują się nadto: R. B. Braithwaite, C. Hempel, H. Jeffreys, J. M. Keynes, R. v. Mises, H. Reichenbach, H. v. Wright. Problematyce indukcji poświęcony jest tom V „Studia Logica" (prace M. Kokoszyńskiej, S. Łuszczewskiej-Romahnowej, Z. Czerwińskiego, H. Greniewskiego) i kilka monografii zawartych w innych tomach tego pisma. Ważne informacje historyczne zawarte są w pracach K. Poppera (1959) i J. Giedymina. Odniesienia do literatury związanej z teorią gier i decyzji znaleźć można w pracach K. Szaniawskiego.

Zob. też **konfirmacja**; **metodologia nauk empirycznych**; **prawdopodobieństwo**; **wnioskowanie statystyczne.**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zagadnienie racjonalności zawodnych sposobów wnioskowania.* [W:] *JiP.* T. 2; R. Carnap: *Logical foundations of probability.* 1950; J. Giedymin: *Indukcjonizm i antyindukcjonizm.* [W:] *LTN*; J. Hintikka: *Towards a theory of inductive generalization.* [W:] *Proceedings of* 1964 *International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science.* 1965; I. Lakatos (ed.): *The problem of inductive logic.* 1968; K. Popper: *Log. sc. disc.* – – *The demarcation between science and metaphysics.* [W:] *Conjectures and refutations.* 1963; M. Swain (ed.): *Induction, acceptance and rational belief.* 1970 (obszerna bibliografia); K. Szaniawski: *Wnioskowanie czy behaviour?* [W:] *LTN.*

W. M.

logika intuicjonistyczna. Logika intuicjonistyczna jest rachunkiem logicznym, który stanowi część intuicjonistycznej teorii dowodu, tj. teorii postępowania badawczego w matematyce, która realizuje postulaty *intuicjonizmu jako pewnej filozofii matematyki. Ze względu na powiązanie intuicjonizmu z *konstruktywizmem logika ta bywa także nazywana konstruktywistyczną, co należy rozumieć w ten sposób, że jest to jedna z logik konstruktywistycznych, mająca szczególną doniosłość ze względu na wymienione wyżej związki z teorią dowodu i filozofią matematyki.

Ważnym krokiem w rozwoju logiki intuicjonistycznej była podana przez Heytinga (1930, zob. też Heyting 1956) teorio-dowodowa interpretacja stałych logicznych. U jej podstaw leży idea, że przyjąć jakąś formułę jako twierdzenie matematyczne, to tyle, co mieć dowód tej formuły. Daje to następującą charakterystykę stałych logicznych.

(1) Dowodem formuły $A.B$ jest para d_1, d_2, taka, że d_1 jest dowodem formuły A, zaś d_2 jest dowodem formuły B.

(2) Dowodem formuły $A \vee B$ jest konstrukcja polegająca na tym, że wybiera się jedną z formuł A, B oraz dostarcza dowodu wybranej formuły.

(3) Dowód d formuły $A \rightarrow B$ jest konstrukcją, która każdemu (wykonanemu) dowodowi e formuły A przyporządkowuje procedurę dowodową $d(e)$ przekształcającą e w dowód dla B.

(4) Dowód formuły $\sim A$ jest dowodem na to, że z A wynika sprzeczność.

(5) Dowód formuły $(x)A(x)$ jest konstrukcją polegającą na wskazaniu (za pomocą odpowiedniej nazwy) przedmiotu n i podaniu dowodu, że n spełnia warunek A (tj., zachodzi $A(n)$).

(6) Dowód formuły $(x)A(x)$ jest konstrukcją, która każde-

mu przedmiotowi n (z danej dziedziny rozważań) przyporządkowuje dowód, że zachodzi $A(n)$.

Heyting (1930) stworzył także intuicjonistyczny rachunek zdań w formie aksjomatycznej. Oto jego aksjomaty.

I. $p \rightarrow (p.p)$
II. $(p.q) \rightarrow (q.p)$
III. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p.r) \rightarrow (q.r))$
IV. $((p \rightarrow q).(q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
V. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
VI. $(p.(p \rightarrow q)) \rightarrow q$
VII. $p \rightarrow (p \vee q)$
VIII. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
IX. $((p \rightarrow r).(q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q \rightarrow r)$
X. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
XI. $((p \rightarrow q).(p \rightarrow \sim q)) \rightarrow \sim p$

Gdy do systemu Heytinga doda się jako aksjomat prawo wyłączonego środka, przechodzi on w klasyczny rachunek zdań. Gdy opuści się z systemu Heytinga aksjomat X, otrzymuje się tzw. minimalny rachunek zdań, będący pewną odmianą rachunku intuicjonistycznego, pochodzącą od Johanssona (1936). Stałe logiczne rachunku intuicjonistycznego nie są wzajemnie przez siebie definiowalne, a więc wszystkie stałe występujące w powyższej aksjomatyce muszą być terminami pierwotnymi.

Oprócz prawa wyłączonego środka pozostają poza obrębem logiki intuicjonistycznej m. in. następujące formuły, będące twierdzeniami klasycznego rachunku zdań:

$\sim \sim p \rightarrow p$ (implikacja odwrotna należy do logiki intuicjonistycznej)
$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
$\sim (p.q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
$(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$
$(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Ostatnia z tych formuł znana jest pod nazwą prawa Peirce'a (jego dyskusja zawarta jest m. in. w pracy Betha 1970).

Teorio-dowodowa interpretacja logiki intuicjonistycznej została w oryginalny sposób rozwinięta w *logice dialogowej, gdzie asercję formuły rozważa się w kontekście dowodu nie wprost rozpisanego na dialog między rzecznikiem i przeciwnikiem rozważanej formuły.

Inne interpretacje logiki intuicjonistycznej, rozwijane w matematyce, to interpretacja topologiczna, algebraiczna oraz za pomocą tzw. modeli Kripkego (*Logika modalna; zob. też *Dic. of logic*). Istnieje także pewna interpretacja matrycowa (*Logiki wielowartościowe).

Intuicjonistyczny rachunek kwantyfikatorów powstaje przez dodanie aksjomatyki klasycznego rachunku kwantyfikatorów do intuicjonistycznego rachunku zdań (w szczególności, mogą to być aksjomaty i reguły podane w haśle Rachunek kwantyfikatorów – 3). Powstający w ten sposób zbiór twierdzeń intuicjonistycznego rachunku kwantyfikatorów jest częścią (właściwą) klasycznego rachunku kwantyfikatorów. Nie są np. tezami intuicjonistycznymi następujące formuły będące tezami rachunku klasycznego (np. ze względu na konieczność użycia w dowodzie prawa $\sim \sim p \rightarrow p$):

$\sim (x)A(x) \rightarrow (\mathrm{E}x) \sim A(x)$
$\sim (\mathrm{E}x) \sim A(x) \rightarrow (x)A(x)$
$\sim \sim (\mathrm{E}x)A(x) \rightarrow (\mathrm{E}x) \sim \sim A(x)$
$(x)(A \vee B(x)) \rightarrow (A \vee (x)B(x))$
$(x)(A(x) \vee \sim A(x))$

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest rozstrzygalny. Intuicjonistyczny rachunek kwantyfikatorów nie jest rozstrzygalny, nawet przy ograniczeniu do rachunku jedno-argumentowego, który jest rozstrzygalny w przypadku klasycznym (Kripke 1962).

E. Beth: *Aspects of modern logic*. 1970; M. A. E. Dummet: *Elements of intuitionism*. 1977; K. Gödel: *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*. „Anzeiger Akad. Wien" LXIX 1932; A. Grzegorczyk: *Klasyczne, relatywistyczne i konstruktywistyczne sposoby uznawania twierdzeń*. „St. Log." XXVII 1971; A. Heyting: *Die formale Regeln der intuitionistischen Logik*. „Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse" 1930; – – *Intuitionism*. 1956; S. Jaśkowski: *Recherches sur le systéme de la logique intuitioniste*. „Act. Congr. Intern. Phil. Sci." 1936; I. Johansson: *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*. „Compositio Math." IV 1936; Kneale: *Development of logic*; S. Krajewski: *Intuitionistic logic*. [W:] *Dic. of logic*; S. Kripke: *Semantical analysis of intuitionistic logic*. [W:] *Formal systems and recursive function theory* (wyd. J. N. Crossley, M. A. E. Dummett). 1965; J. J. C. McKinsey, A. Tarski: *Some theorems about sentential calculi of Lewis and Heyting*. „JSL" XIII 1948; A. S. Troelstra (red.): *Metamathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis*. 1973.

W. M.

logika kombinatoryczna. Mianem tym obejmuje się dwa rodzaje teorii logicznych; w jednym z nich podstawowe jest pojęcie tzw. kombinatora, w drugim pojęcie *lambda-operatora.

Pierwszy z wymienionych rodzajów logiki kombinatorycznej pochodzi od Schönfinkela (1924), który uogólnił pojęcie funkcji w taki sposób, że wartości argumentów, jak też wartości funkcji, mogą być również funkcjami. Np. $x+y$ czyli $+(x, y)$ można przedstawić jako $(+(x))(y)$, a więc pojmować $+(x)$ jako operację, czyli funkcję, którą się aplikuje (ang. applies) do argumentu y, a która powstaje z zaaplikowania (ang. application) $+$ do x; to drugie wyraża operację dodać-coś (podczas gdy sam znak $+$ wyraża operację dodać). Ogólnie, funkcję $f(x, y)$ można przedstawić jako funkcję $(fx)(y)$. Opuszczając nawiasy piszemy fxy, co znaczy, że operacja f jest aplikowana do x, a jej rezultat fx jest z kolei aplikowany do y; przy takiej konwencji nawiasy służą do wskazania, że zachodzi inna kolejność operacji niż powyższa.

System pochodzący od Schönfinkela zawiera symbole operacji na funkcjach zdefiniowane za pomocą następujących równań:

(1) $\mathrm{I}x = x$; operacja polega na pozostawieniu argumentu bez zmiany.

(2) $Cxy = x$; wartość funkcji równa się wartości pierwszego argumentu.
(3) $Tfxy = fyx$; operacja polega na przestawieniu argumentów.
(4) $Zfgx = f(gx)$; ponieważ fgx znaczy tyle, co $(fg)x$, operacja polega na przesunięciu nawiasów, analogicznie do algebraicznego prawa łączności.
(5) $Sfgx = (fx)(gx)$; operacja polega na przejściu do funkcji, w których f i g są aplikowane do trzeciego argumentu x, poczem funkcja fx jest aplikowana do gx.
Nie istnieje dotąd polska terminologia logiki kombinatorycznej; niemieckie nazwy powyższych operacji (Schönfinkel 1924), pomocne w zrozumieniu ich natury, są następujące: I – Identitätsfunktion, C – Konstanzfunktion, T – Vertauschungsfunktion, Z – Zusammensetzungsfunktion, S – Verschmelzungsfunktion. Symbole tych operacji można po polsku określić jako kombinatory, za ang. combinators.
Kombinatory C i S nadają się do zdefiniowania pozostałych. Definicje są następujące: I = SCC, Z = S(CS)C, T = S(ZZS)(CC). Np. pierwszą z tych równości otrzymuje się w wyniku następujących przekształceń:
$Ix = x = Cxy$ z (1) i (2); y reprezentuje cokolwiek, także Cx; stąd: $Ix = (Cx)(Cx)$
$(Cx)(Cx) = SCCx$ z (5); z trzech powyższych wierszy otrzymujemy: $Ix = SCCx$ czyli $I = SCC$.
Logika kombinatoryczna dostarcza języka, w którym można wyrazić rachunek kwantyfikatorów, korzystając z metody stworzonej przez Schönfinkela (1924). Pierwszym krokiem jest zapis *dysjunkcji Sheffera w rachunku kwantyfikatorów, mianowicie:
$fx/^{*}gx$ przyjmujemy jako skrót dla $(x) \sim (fx \,.\, gx)$.
Dalej, wprowadzamy kombinator U (Unverträglichkeitsfunktion), a wraz z nim wyrażenie Ufg jako skrót dla $fx/^{x}gx$. Teraz każdą formułę logiczną można wyrazić w terminach S, C, U, przy czym zmienne będą się pojawiać regularnie na końcu formuł, a więc będą mogły być opuszczane; także symbol U da się zawsze w wyniku odpowiednich przekształceń przesunąć na koniec formuły, może więc być opuszczany jako występujący „domyślnie". Wtedy każda formuła logiczna da się przedstawić jako ciąg złożony wyłącznie z symboli C i S. Przedstawmy w ten sposób tautologię $(x)(gx \vee \sim gx)$ czyli $gx/^{x}(gx/^{x}gx)$, którą zapiszemy za pomocą U jako formułę $Ug(Ugg)$; ta zaś podlega dalej następującym przekształceniom.

Ug(Ugg)	= Ug(Ug(Cg(Cg)))	por. (2) powyżej
	= Ug(Ug(SCCg))	(5)
	= Ug(SU(SCC)g)	(5)
	= SU(SU(SCC))g	(5)
	= SU(SU(C(SCC)U))g	(2)
	= SU(SS(C(SCC))U)g	(2)
	= SS(SS(C(SCC)))Ug	(5).

Odmianą logiki kombinatorycznej jest stworzony przez Churcha rachunek lambda-konwersji, w którym terminem pierwotnym jest *lambda-operator, nadający się do zdefiniowania wszystkich kombinatorów (zob. Feys i Fitch 1969). Związek ten dostrzegli Kleene i Rosser (1935).
Logika kombinatoryczna została pomyślana jako narzędzie w badaniach nad podstawami matematyki, służące m. in. wyjaśnieniu pojęcia zmiennej i operacji podstawiania. Dostrzeżono także możliwość jej zastosowań w gramatyce formalnej języka naturalnego. Gramatyka ta przypomina pod pewnym względem gramatykę funktorową Ajdukiewicza (1935), zwaną też gramatyką kategorialną. Podobieństwo staje się widoczne, gdy dopuści się, że każde wyrażenie mogło występować bądź w roli funktora bądź argumentu, bez stałego przyporządkowania kategorii syntaktycznej. Np. zwrot „mówi że dżdży" może być analizowany syntaktycznie na kilka sposobów, w zależności od tego, co uzna się za funktor i co za argument. Oto możliwe konstrukcje:

mówi (że(dżdży));
(że (mówi)) dżdży;
(mówi (że)) dżdży;

gdzie „mówi że" ma bądź strukturę że (mówi), tj. funktor „że" aplikowany do „mówi" daje funktor „mówi że", bądź też strukturę (nienaturalną, lecz dopuszczalną teoretycznie) mówi (że), tj. z „że" jako argumentem. Tego rodzaju sposób postępowania przyjęty jest, choć bez odniesienia do logiki kombinatorycznej, w pracy Marciszewskiego 1977. Typowe przykłady posługiwania się logiką kombinatoryczną jako narzędziem analizy języka naturalnego można znaleźć w pracach Geacha 1970 oraz Fitcha 1976, a przykład posłużenia się w tym celu operatorem lambda u Cresswella 1977. Związki między pojęciami kombinatora i funktora ukazuje Curry 1961.

K. Ajdukiewicz: *Die syntaktische Konnexität*. „St. Philos." I 1935 (przekł. polski *O spójności syntaktycznej* [W:] *JiP*; A. Church, J. B. Rosser: *Some properties of λ-conversion*. „Trans. Amer. Math. Soc." XXXIX 1936; A. Church: *The calculi of lambda-conversion*. 1941; M. J. Cresswell: *Categorial languages*. „St. Log." XXXVI 1977 z. 4; H. B. Curry: *Some logical aspects of grammatical structure*. [W:] R. Jakobson (ed.): *Structure of language and its mathematical aspects*. 1961; H. B. Curry, R. Feys, W. Craig: *Combinatory logic*, vol. 1. 1958; H. B. Curry, J. R. Hindley, J. P. Seldin: *Combinatory logic*, vol. 2. 1972; Rozdz. *Combinatory logic* [W:] R. Feys, F. B. Fitch (eds): *Dictionary of symbols of mathematical logic*. 1969; F. B. Fitch: *The relation between natural languages and formalized languages*. [W:] S. Körner (ed.): *Philosophy of logic*. 1976; P. T. Geach: *A program for syntax*. „Synthese" XXII 1970 (przedr. [W:] D. Davidson, G. Harman (eds): *Semantics of natural language*. 1972; A. Grzegorczyk: *Recursive objects in all finite types*. „Fundam. Math." LIV 1964; – – *Combinatory logic*. [W:] *Dic. of logic*; S. C. Kleene, J. B. Rosser: *The inconsistency of certain formal logics*. „Ann. of Math." Ser. 2 XXXVI 1935; Kneale: *Development of logic*; W. Marciszewski: *Opis syntaktyczny mowy zależnej na gruncie gramatyki kategorialnej*. „St. Semiot." VII 1977; M. Schönfinkel: *Über die Bausteine der mathematischen Logik*. „Math. Annalen" XCII 1924 (przedr. [W:] K. Berka, L. Kreiser, red.): *Logik-Texte*. 1973.

W. M.

logika matematyczna.
(1) Termin ten bywał używany dla oznaczenia współczesnej *logiki formalnej jako podzielającej z matematyką metody badawcze i symboliczny charakter języka; to drugie znalazło także wyraz w określeniu logika symboliczna. Związek z matematyką był ponadto uwydatniony przez nazywanie systemów logicznych rachunkami i przez fakt, że logika współczesna została stworzona (Frege, Peano, Russell, Peirce i in.) jako narzędzie do analizy rozumowań zachodzących w matematyce, jak też do badania struktury i własności teorii matematycznych; odróżniało ją to wyraźnie od *logiki tradycyjnej, która powstała w związku z problematyką filozoficzną oraz refleksją nad językiem naturalnym. W takim sensie, wyrażanym też mianem logistyki, pisał o logice matematycznej J. Łukasiewicz. (1929, 1937).
(2) Odróżnienie logiki matematycznej w sensie (1) od logiki tradycyjnej ustępuje miejsca nowszej opozycji: logika matematyczna a *logika filozoficzna. Dyscypliny te, nie różniąc się metodami ani poziomem technicznym, różnią się celem i przedmiotem badań: logika matematyczna bada metody i teorie matematyczne, a logika filozoficzna podejmuje zadanie precyzyjnej *eksplikacji pojęć filozoficznych. W takim sensie termin „logika matematyczna" występuje w tytułach podanych poniżej (poza pracą Łukasiewicza 1929) podręczników. Zawierają one *klasyczny rachunek zdań i kwantyfikatorów, niekiedy też rachunek intuicjonistyczny, wraz z odpowiadającą im metamatematyką; te same treści bywają też zawarte pod takimi pojęciami tytułowymi, jak wprowadzenie do matematyki (por. Rasiowa 1973); wprowadzenie do metamatematyki (por. Kleene 1952) lub podstawy matematyki (por. Hilbert i Bernays 1934–1939, Beth 1959).
Co się tyczy stosunku logiki do matematyki, to jedni autorzy, np. A. Grzegorczyk (1969, Dodatek) zaliczają współczesną logikę formalną do dyscyplin matematycznych, inni, jak E. Beth, uważają ją za autonomiczną dyscyplinę, która dzięki pewnym nowszym wynikom, np. *dedukcji naturalnej w postaci tabel semantycznych (lub analitycznych) zbliżyła się znowu do pewnych idei logiki tradycyjnej (Beth 1955, odc. 11). W tym drugim ujęciu związki logiki z matematyką mieszczą się w ogólniejszym zjawisku powiązań interdyscyplinarnych.

J. Barwise i in. (red.): *Handbook of mathematical logic*. 1977; J. L. Bell, M. Machover: *A course in mathematical logic*. 1977; E. W. Beth: *Semantic entailment and formal derivability*. 1955; – – *Foundations*; Church: *Math. log.*; H. Friedman: *One hundred and two problems in mathematical logic*. „JSL" XL 1975; Grzegorczyk: *Log. mat*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; S. C. Klene: *Introduction to metamathematics*. 1952; J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej*. 1929 (wznow. 1958); – – *W obronie logistyki*, 1937 [W:] – – *Z zagadnień logiki i filozofii*. 1961; E. Mendelson: *Introduction to mathematical logic*. 1964 (rozszerz. wyd. 1979); H. Rasiowa: *Introduction to modern mathematics*. 1973; J. Shoenfield: *Mathematical logic*. 1967.

W. M.

logika modalna. Współcześnie nazywa się tak teorię logiczną, w której oprócz stałych logicznych *klasycznego rachunku logicznego występują w charakterze stałych logicznych funktory zdaniotwórcze zwane modalnymi, których sens oddają zwroty: jest konieczne, że; jest możliwe, że. W roli terminu pierwotnego wystarczy jeden z tych zwrotów, ponieważ każdy z nich daje się zdefiniować przez drugi. „Jest możliwe, że *A*", to tyle, co „nie jest konieczne, że nie *A*"; „jest konieczne, że *A*" to tyle, co „nie jest możliwe, że nie *A*". Logika modalna jest logiką intensjonalną, ponieważ nie jest w niej tak, że wartość logiczna zdań złożonych zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań składowych.
Od czasów pracy G. H. von Wrighta *An essay in modal logic* 1951, odróżnia się modalność aletyczną („jest z konieczności prawdziwe, że *A*"), epistemiczną, tj. dotyczącą wiedzy koniecznej, oraz deontyczną, tj. dotyczącą obowiązku pojętego jako pewna konieczność. W węższym sensie, mającym wiekową tradycję, utożsamia się modalność jedynie z pierwszym z wymienionych rodzajów.
Inna dystynkcja, wprowadzona przez scholastyków, to odróżnienie modalności de dicto i modalności de re. Pierwsza odnosi się do całego zdania, np. „Możliwe, że pociąg się spóźni", druga odnosi się do faktu wskazanego przez orzeczenie, np. „Pociąg może się spóźnić". Współczesny modalny rachunek zdań zajmuje się wyłącznie modalnością de dicto, natomiast sylogistyka modalna Arystotelesa i scholastyków traktowała o modalności de re. Ta druga, choć nie jest tak dobrze określona w logice jak modalność de dicto, zasługuje na uwagę z racji filozoficznej problematyki możliwości i konieczności stanów rzeczy; dlatego poświęca się jej tu uwagę w postaci przedstawienia sylogistyki modalnej Arystotelesa (odcinek 1), a następnie przedstawia się modalny rachunek zdań w jego współczesnej postaci (co do modalnego rachunku kwantyfikatorów – zob. **logika filozoficzna**).

W. M.

1. Sylogistyka zdań modalnych Arystotelesa jest systemem logicznym bardzo podobnym pod względem struktury do *sylogistyki zdań asertorycznych Arystotelesa. Różnica polega na tym, że w sylogizmach modalnych przynajmniej jedna przesłanka jest zdaniem modalnym: apodyktycznym lub problematycznym. Zdanie apodyktyczne to takie zdanie, w którym występuje funktor „z koniecznością" lub jakiś inny równoważny z nim zwrot językowy, np. „musi". Zdanie problematyczne zawiera funktor „może". Przykłady: *P* z koniecznością przysługuje każdemu *S*, lub: Każde *S* musi być *P*; *P* może przysługiwać każdemu *S*, lub: Każde *S* może być *P*. Podane wyżej przykładowo zdania modalne są odpowiednikami ogólnotwierdzącego zdania asertorycznego zapisywanego ja-

ko *SaP*. Podobnie zbudowane są odpowiedniki modalne zdań: *SeP*, *SiP*, *SoP*.

Ze względu na to, jakiego rodzaju zdaniami (asertorycznymi, apodyktycznymi czy problematycznymi) są przesłanki, wszystkie sylogizmy modalne podzielone są na osiem grup, co uwidocznione jest w poniższej tabeli:

GRUPA	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Przesłanka większa	apod.	apod.	asert.	probl.	probl.	asert.	probl.	apod.
Przesłanka mniejsza	apod.	asert.	apod.	probl.	asert.	probl.	apod.	probl.

Sylogizmy każdej grupy dzielą się na figury (jak w sylogistyce zdań asertorycznych) i na tryby. Nie każdemu jednak poprawnemu trybowi modalnemu odpowiada analogiczny poprawny tryb asertoryczny. Są np. poprawne sylogizmy modalne o dwu przeczących przesłankach, a nie ma tak zbudowanych poprawnych sylogizmów asertorycznych.

Sylogistykę zdań modalnych ujął Arystoteles aksjomatycznie. Rolę *aksjomatów pełnią pierwsze cztery tryby pierwszej figury wszystkich grup z wyjątkiem szóstej i ósmej. Pozostałe sylogizmy dowodzone są przy pomocy tych aksjomatów metodami stosowanymi w sylogistyce zdań asertorycznych, tzn. przez konwersję i nie wprost. Ponadto dowodzi się jeszcze innymi sposobami, np. za zdanie twierdzące problematyczne podstawiając zdanie przeczące problematyczne o odpowiednio równokształtnych terminach, i na odwrót.

Sylogistyka zdań modalnych Arystotelesa jest systemem niedokończonym, zawierającym błędy i niejasności. Tak np. nie wiadomo, jak rozumieć funktory modalne „może" i „musi". Prawdopodobnie funktor „może" używany jest niekonsekwentnie, w dwu znaczeniach. W znaczeniu węższym możliwe jest to i tylko to, co nie jest konieczne i nie jest niemożliwe. W tym znaczeniu jeżeli *S* może być *P*, to *S* może nie być *P* i na odwrót. W znaczeniu szerszym możliwość przeciwstawia się tylko niemożliwości. Możliwe jest wówczas to, co konieczne, jak i to, co jest niekonieczne, o ile nie jest niemożliwe. Przy tym rozumieniu możliwości, ze zdania „*S* może być *P*", nie wynika zdanie „*S* może nie być *P*" (w przeciwnym kierunku też nie ma wynikania).

Słabą stroną tego systemu jest nieuświadomienie sobie przez Arystotelesa, że sylogistyka zdań modalnych zakłada modalny rachunek zdań. Do uświadomienia sobie założeń potrzebnych do poprawnego skonstruowania tej sylogistyki doszło dopiero w średniowieczu. Wówczas poprawiono większość zawartych w niej błędów. Arystotelesa sylogistyka zdań modalnych została ujęta w system dedukcyjny w dzisiejszym rozumieniu. System ten jest oparty na modalnym rachunku zdań (Łukasiewicz).

J. Angelelli: *The Aristotelian modal syllogistic in modern modal logic* [W:] K. Lorenz (red.): *Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie*. Bd. 1. 1979; I. M. Bocheński: *Z historii zdań modalnych*. 1938; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; J. Kalinowski: *Teoria zdań normatywnych*. „St. Log." I 1953; Kotarbiński: *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *Aristotle's syllogistic*. Wyd. 2 1957.

M. P.

2. Modalny rachunek zdań charakteryzuje się tym, że w języku tego rachunku występują funktory „jest konieczne to, że" (symbolicznie: $\Box$), „jest możliwe to, że" (symbolicznie: $\Diamond$). Współczesne badania w zakresie modalnych rachunków zdań inspirowane były pracami C. I. Lewisa. Lewis zwrócił uwagę na to, że wnioskowanie według reguły modus ponendo ponens:

$$\frac{(p \rightarrow q) \wedge p}{q}$$

jest możliwe właściwie wtedy, gdy wiadomo, że niemożliwe jest, aby zarazem poprzednik implikacji materialnej był prawdziwy a następnik fałszywy. Gdyby bowiem prawdziwość implikacji materialnej stwierdzało się na podstawie znajomości wartości logicznych jej członów, wówczas albo w ogóle nie byłoby potrzeby wnioskowania według reguły modus ponendo ponens (gdy wiadomo, że następnik implikacji jest prawdziwy), albo nie można by stosować tej reguły (gdy wiadomo, że poprzednik implikacji jest fałszywy). Jeśli jednak stosuje się wspomnianą regułę wnioskowania, to dlatego, że prawdziwość implikacji materialnej stwierdza się nie na podstawie znajomości wartości logicznych jej członów, lecz w oparciu o stwierdzenie, że dla danej implikacji materialnej niemożliwe jest, aby zarazem jej poprzednik był prawdziwy, a następnik fałszywy. W istocie więc przesłanką takiego wnioskowania nie jest implikacja materialna, lecz tzw. implikacja ścisła „$p \Rightarrow q$", która jest wtedy prawdziwa, gdy niemożliwe jest, aby jej poprzednik był prawdziwy, a zarazem następnik fałszywy. Lewis uważał, że w implikacji ścisłej, w odróżnieniu od implikacji materialnej stwierdza się zachodzenie wynikania następnika z poprzednika. Przypuszcza się, że Lewis nie uświadamiał sobie w należytym stopniu różnicy między zdaniem o zachodzeniu wynikania, które należy do metajęzyka określonego języka, a implikacją ścisłą, która jest zdaniem złożonym tego języka. W rezultacie Lewis traktował swoje systemy modalne jako teorię wynikania, a nie jako rachunki zdań modalnych. Uświadomienie sobie wspomnianej różnicy jest dzisiaj powszechne i rachunki Lewisa traktuje się jako teorię zdań modalnych, w której implikacja ścisła spełnia warunek

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim \Diamond (p \wedge \sim q)$$

W modalnym rachunku zdań funktory $\Box$, $\Diamond$ są funktorami zdaniotwórczymi od argumentu zdaniowego. Funktory modalne umieszcza się przed zdaniami (prostymi lub złożonymi), a nie wewnątrz zdania prostego, jak w przy-

padku modalnej sylogistyki Arystotelesa. Od strony interpretacyjnej znaczy to, że konieczny wzgl. możliwy jest pewien sąd (modalność de dicto),a nie przysługiwanie cechy przedmiotowi (modalność de re).

Przykładem modalnego rachunku zdań jest system R. Feysa oznaczany literą T.

Język rachunku.

1. Słownik.

1.1. Zmienne zdaniowe: $p, q, p_1, p_2 \ldots$ w ilości nieograniczonej.

1.2. spójniki klasycznego rachunku zdań: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

1.3. funktory modalne: $\Box, \Diamond, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

2. Formuły zdaniowe.

2.1. każda zmienna zdaniowa jest formułą zdaniową

2.2. jeżeli X, Y, są formułami zdaniowymi, to $\sim X$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \equiv Y$, $\Box X$, $\Diamond X$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$, są formułami zdaniowymi

2.3. każda formuła zdaniowa jest albo zmienną zdaniową, albo powstaje z takiej zmiennej lub zmiennych przez zastosowanie skończonej ilości razy reguł 2.2.

Aksjomaty.

ARZ: aksjomaty klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań

AM1 $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

AM2 $\Box p \rightarrow p$

Definicje.

DFRZ: definicje spójników klasycznego rachunku zdań (jak w rachunku implikacyjno-negacyjnym)

DF1 $\Diamond X =_{df} \sim \Box \sim X$

DF2 $X \Rightarrow Y =_{df} \Box(X \rightarrow Y)$

DF3 $X \Leftrightarrow Y =_{df} \Box(X \equiv Y)$

Reguły dowodzenia twierdzeń.

R1 dyrektywa podstawiania formuł zdaniowych języka rachunku za zmienne

R2 dyrektywa odrywania dla implikacji materialnej

R3 jeżeli X jest twierdzeniem rachunku, to $\Box X$ także jest twierdzeniem

R4 dyrektywa zastępowania członu definiującego członem definiowanym wedle definicji DFRZ, DF1–DF3.

Oprócz wszystkich twierdzeń klasycznego rachunku zdań, twierdzeniami systemu T są np.

T1 $\Box p \Rightarrow p$

T2 $p \Rightarrow \Diamond p$

T3 $\Box p \Rightarrow \Diamond p$

T4 $\Box(p \wedge q) \Leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

T5 $\Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

T6 $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$

T7 $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

T8 $\Box p \Leftrightarrow \Box(\sim p \rightarrow p)$

T9 $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

T10 $[(p \Rightarrow q) \wedge \Box p] \rightarrow \Box q$

T11 $[(p \Rightarrow q) \wedge \Diamond \sim q] \Rightarrow \Diamond \sim p$

T12 $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

T13 $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

T14 $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \rightarrow r)]$

T15 $\Box q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

T16 $\Box \sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

T17 $\Box(p \Rightarrow p)$

T18 $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$

T19 $q \Rightarrow (p \vee \sim p)$

Rozmaite modalne rachunki zdań różnią się bogactwem twierdzeń. Np. w systemie T jest twierdzeniem

T20 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

ale nie jest twierdzeniem

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$$

Ta ostatnia formuła jest twierdzeniem w modalnym rachunku oznaczonym symbolem S3.

W zaprezentowanym systemie T sensowne są wyrażenia, w których formuła rachunku zdań poprzedzona jest więcej niż jedną stałą modalną, np.

$$\Box\Diamond\Box p, \sim \Box\Diamond \sim \Diamond p$$

Wyrażenie, które jest zmienną p lub jest kształtu $\alpha_i, \ldots, \alpha_{np}$, gdzie α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jest bądź funktorem konieczności, bądź funktorem możliwości, bądź funktorem negacji – nazwiemy modalnością. W systemie T istnieje nieskończenie wiele nierównoważnych sobie modalności. Jeśli do aksjomatów systemu T dołączy się dodatkowy aksjomat:

AM3 $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

wówczas otrzymuje się system nazywany S4. W rachunku tym można udowodnić tzw. twierdzenia redukcyjne, np.

$$\Box\Box p \equiv \Box p$$

W konsekwencji rachunek S4 ma co najwyżej 14 następujących nierównoważnych sobie modalności:

$$\Box p, \quad \Box\Diamond p, \quad \Box\Diamond\Box p, \quad \Diamond p, \quad \Diamond\Box p, \quad \Diamond\Box\Diamond p,$$
$$\Box \sim p, \quad \Box\Diamond \sim p, \quad \Box\Diamond\Box \sim p, \quad \Diamond \sim p,$$
$$\Diamond\Box \sim p, \quad \Box\Diamond\Box \sim p, \quad \sim p, p$$

Każda inna modalność jest równoważna jednej z 14 wymienionych.

Np. jest twierdzeniem

$$\Box\Box\Diamond p \equiv \Box\Diamond p$$

Jeśli do aksjomatów systemu T dołączy się dodatkowy aksjomat

AM4 $\sim \Box p \rightarrow \Box \sim \Box p$

wówczas otrzymuje się rachunek (nazywany S5), w którym można udowodnić takie twierdzenia redukcyjne, na podstawie których można wykazać, że w tym rachunku jest najwyżej 6 nierównoważnych sobie modalności:

$$\Box p, \Diamond p, \sim \Box p, \sim \Diamond p, \sim p, p$$

Twierdzenia T18, T19 nazywają się paradoksalnymi twierdzeniami dla implikacji ścisłej. Ujawniają one, że implikacja ścisła nie jest identyczna co do znaczenia z okresem warunkowym z języka potocznego. Wątpliwe jest, czy uznamy za prawdziwe zdanie

jeżeli Ziemia jest okrągła i nie jest tak, że Ziemia jest okrągła, to $2+2=8$

Tymczasem zdanie to jest prawidłowym podstawieniem twierdzenia T18.

Lecz w omawianych wyżej systemach jest twierdzeniem

T21 $(p \Rightarrow q) \equiv \sim \Diamond(p \wedge \sim q)$

Powyższe zdanie, jako implikacja ścisła, jest więc równoważne zdaniu

nie jest możliwe to, że Ziemia jest okrągła i nie jest tak, że Ziemia jest okrągła i nie jest tak, że $2+2=8$

Zdanie to można uznać bez oporu, skoro nie jest możliwe, aby Ziemia była i nie była okrągła zarazem.

3. Semantyka modalna.

S. Kripke skonstruował modele dla niektórych modalnych rachunków zdań (wcześniej podobną konstrukcję dla logik deontycznych ogłosił S. Kanger). Przyjmuje się istnienie struktury modelowej, którą jest uporządkowana trójka $\langle G, K, R\rangle$. K jest zbiorem, którego jednym z elementów jest G, R jest relacją określoną na zbiorze K. G jest 'rzeczywistym światem', a K jest zbiorem 'światów możliwych'. Wyrażenie $H_1 \, R \, H_2$ czyta się „H_2 jest możliwe ze względu na H_1". Każde zdanie prawdziwe w świecie H_2 jest możliwe w świecie H_1. Podstawowym warunkiem, jaki nakłada się na relację R, jest zwrotność w zbiorze K, ponieważ każde zdanie prawdziwe w świecie H jest w tym świecie możliwe. Rozmaite struktury modelowe różnią się formalnymi warunkami, jakie spełnia relacja R. Strukturę modelową taką, że R jest relacją przechodnią w zbiorze K, nazywa się S4-strukturą modelową, a strukturę modelową taką, że R jest równoważnością w zbiorze K nazywa się S5-strukturą modelową.

Modelem na strukturze modelowej $\langle G, K, R\rangle$ jest funkcja dwuargumentowa $\Phi(P, H)$, gdzie zmienna P przebiega zbiór formuł zdaniowych języka rachunku modalnego, a zmienna H przebiega zbiór K. Funkcja Φ przybiera wartości ze zbioru $\{1, 0\}$. Przyjmuje się, że dla każdej zmiennej zdaniowej i każdego elementu zbioru K funkcja Φ przybiera jedną z wartości należących do zbioru $\{1, 0\}$. Wartości funkcji Φ dla formuł złożonych ustala się indukcyjnie:

1. jeżeli $\Phi(A, H)=1$ i $\Phi(B, H)=1$, to $\Phi(A \wedge B, H)=1$, a w przeciwnym razie $\Phi(A \wedge B, H)=0$
2. jeżeli $\Phi(A, H)=1$, to $\Phi(\sim A, H)=0$, a w przeciwnym razie $\Phi(\sim A, H)=1$

Odpowiednio dla innych spójników rachunku zdań.

3. jeżeli $\Phi(A, H)=1$ dla każdego H' takiego, że $H' \in K$ i HRH', to $\Phi(\Box A, H)=1$, a w przeciwnym razie $\Phi(\Box A, H)=0$

Pojęcie modelu pozwala wprowadzić określenie tautologii systemu modalnego, tj. formuły takiej, dla której każda funkcja Φ na odpowiedniej strukturze modelowej przybiera wartość 1. Np. tautologią systemu S5 jest formuła zdaniowa języka tego systemu, dla której każda funkcja Φ będąca modelem na S5-strukturze modelowej przybiera wartość 1. Skonstruowanie pojęcia tautologii danego systemu modalnego pozwoliło sformułować problem pełności systemów modalnych i konstruowanie dowodów, że dany system jest pełny, tzn. że każda i tylko taka formuła zdaniowa języka danego systemu, która jest tautologią tego systemu, jest twierdzeniem tego systemu. Dla niektórych systemów modalnych dowody takie przeprowadził S. Kripke.

Logika modalna stanowi dzisiaj potężną gałąź logiki formalnej. Skonstruowano nie tylko bardzo rozmaite rachunki modalne, ale osiągnięto też znakomite rezultaty w zakresie badania własności tych rachunków.

Carnap: *MaN*; R. Feys: *Modal logics*. 1965; G. E. Hughes, M. J. Cresswell: *An introduction to modal logics*. wyd. 2 1972; Kneale: *Development of logic*; E. J. Lemmon: *An introduction to modal logic*. [W:] *The Lemmon notes*. Ed. by Krister Segerberg. 1977; A. N. Prior: *Formal logic*. Wyd. 2 1962; J. A. Slinin: *Sovremiennaja modalnaja logika*. 1976.

Z. Z.

logika pytań (l. erotetyczna z gr. $\varepsilon'\rho\omega\tau\eta\,\sigma\iota\varsigma$ – pytanie). Współczesna analiza pytań w języku rachunku kwantyfikatorów została zapoczątkowana pracą Ajdukiewicza 1926; wśród jej prekursorów był Bernard Bolzano (1837). Pełny wykład idei Ajdukiewicza znajduje się w jego pracy z r. 1934 (*Pytanie).

W rozważaniach logicznych nad pytaniami przewijają się dwa problemy: 1° czy logiczna teoria pytań może być teorią dedukcyjną? 2° czy zdania pytajne są sprowadzalne do innych rodzajów wyrażeń, czy też stanowią niesprowadzalną kategorię? Odpowiedź przesądzająca na rzecz redukowalności nazywa się allogeniczną teorią pytań; odpowiedź przecząca nazywa się idiogeniczną teorią pytań. Jeżeli przyjmie się taką teorię allogeniczną, która sprowadza pytania do zdań oznajmujących, to pociąga to odpowiedź twierdzącą na pierwsze z powyższych pytań, mianowicie umożliwia budowanie teorii pytań jako systemu dedukcyjnego; za takim rozwiązaniem opowiada się Harrah 1961, Katz 1968 i in. Aquist 1965 postuluje sprowadzenie pytań do rozkazów o charakterze epistemicznym, tj. do zwrotów w rodzaju: niech będzie wiadomo, że to-a-to; wówczas logika pytań tłumaczy się na język logicznej teorii rozkazów i logiki epistemicznej. Belnap i Steel (1976), a także Kubiński (1970), uważają pytania za osobną i nieredukowalną do innych kategorię wyrażeń. Najbardziej zaawansowany system formalny logicznej teorii pytań zawiera monografia Kubińskiego (1970).

K. Ajdukiewicz: *Analiza semantyczna zdania pytajnego*. „Ruch Filozoficzny" X 1926; – – *Zdania pytajne* [W:] – – *Logiczne podstawy nauczania*. 1934; L. Åquist: *A new approach to the logical theory of interrogatives*. 1965 (wyd. 2 1975); N. D. Belnap, Jr., T. B. Steel, Jr.: *The logic of questions and answers*. 1976 (obszerna bibliografia); F. S. Cohen: *What is a question?* „Monist" XXXIX 1929; J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia*. 1964; D. Harrah: *A logic of questions and answers*. „Philos. of Sc." XXVIII 1961; – – *A system for erotetic sentences*. [W:] A. R. Anderson et al. (eds): *The logical enterprise*. 1975; H. Hiż: *Questions and answers*. „Journ. of Philos." LIX 1962; – – *Difficult questions*. [W:] – – (ed.) *Questions*. 1978; J. J. Katz: *The logic of questions*. [W:] *Logic, methodology and philosophy of*

science III (ed. by B. van Rootselaar i J. F. Staal) 1968; L. Koj: *Analiza pytań I. Problem terminów pierwotnych logiki pytań*. „St. Semiot. II" (wyd. J. Pelc) 1971; T. Kubiński: *Wstęp do logicznej teorii pytań*. 1970; W. Marciszewski: *Analiza semantyczna pytań jako podstawa reguł heurystycznych*. „St. Semiot. V" (wyd. J. Pelc) 1974; — — *Metody analizy tekstu naukowego* (rozdz. 1). 1977 (wyd. 2 1981); A. Prior, M. Prior: *Erotetic logic*. „Philosoph. Rev." LXIV 1955.

W. M

logika stoików (dialektyka stoików). System logiczny, który powstał w Grecji w III w. p.n.e. Jego najbardziej znani twórcy: Chryzyp, Filon z Megary i Diodoros Kronos. Głównym źródłem do poznania tej logiki są dzieła żyjącego później (II—III w.n.e.) sceptyka Sekstusa Empiryka. Logika stoików różni się pod kilkoma względami od powstałej o wiek wcześniej logiki Arystotelesa, która jest systemem tez logicznych zbudowanych ze stałych logicznych i zmiennych nazwowych, jest więc logiką nazw. Logika stoików nie jest logiką nazw, lecz logiką zdań i nie jest systemem tez, lecz systemem reguł wnioskowania. Reguły te zwane są sylogizmami hipotetycznymi dla odróżnienia od sylogizmów Arystotelesa nazwanych kategorycznymi. Oto przykład sylogizmu hipotetycznego: „Jeżeli *p* to *q*; otóż *p*; a więc *q*". Występują tu zmienne zdaniowe (*p*, *q*), stała logiczna „jeżeli..., to...", i charakterystyczne dla reguł wnioskowania słówko: „a więc".

W miejsce zmiennych zdaniowych (*p*, *q*) wolno podstawiać zdania. Np.: „Jeżeli dzisiaj jest sobota, to jutro jest niedziela; otóż dzisiaj jest sobota; a więc jutro jest niedziela". Mamy tu dwie przesłanki i wniosek połączony z nimi słówkiem: „a więc". Całość stanowi wnioskowanie, tj. rozumowanie, w którym na podstawie zdań uznanych (przesłanki), uznaje się inne zdanie (wniosek). Sylogizmy stoickie są regułami wnioskowania, tzn. przepisami podającymi różne sposoby niezawodnego wnioskowania: mówią, że uznawszy uprzednio takie a takie zdania, wolno uznać takie to a takie zdania.

Stoicy wyróżniali sylogizmy 'niedowodliwe', przyjęte bez dowodu jako słuszne, a z nich wyprowadzali wszystkie pozostałe. Do 'niedowodliwych' należą pochodzące podobno od Chryzypa następujące sylogizmy:

I. Jeśli *p*, to *q*; otóż *p*; a więc *q*.
II. Jeśli *p*, to *q*; otóż nie-*q*; a więc nie-*p*.
III. Nie zarazem: *p* i *q*; otóż *p*; a więc nie-*q*.
IV. Albo *p* albo *q*; otóż *p*; a więc nie-*q*.
V. Albo *p* albo *q*; otóż nie-*q*; a więc *p*.

Do pochodnych sylogizmów zaliczali stoicy m. in. następujące formuły:

Jeśli *p* i *q*, to *r*; otóż nie-*r*, ale *p*; a więc nie-*q*.
Jeśli *p*, to *q*; jeśli *p*, to nie-*q*; a więc nie-*p*.

W sylogizmach stoickich, oprócz zmiennych zdaniowych i słówka „a więc", występują jeszcze spójniki międzyzdaniowe „i", „jeżeli..., to...", „albo", i zaprzeczenie zdania „nie", które w dzisiejszej logice nazywają się *funktorami zdaniotwórczymi: *koniunkcji, *implikacji, *dysjunkcji (lub alternatywy wyłączającej) i *negacji.

Koniunkcję i negację stoicy definiowali tak, jak to się robi dzisiaj. Koniunkcja „*p* i *q*" jest prawdziwa wtedy i tylko, gdy prawdziwe są zarazem zdania *p* i *q*. Negacja „nie-*p*" jest prawdziwa wtedy i tylko, gdy zdanie *p* jest fałszywe. Każde zdanie jest bądź prawdziwe, bądź fałszywe, twierdzili stoicy. Tym twierdzeniem świadomie przeciwstawiali się poglądom rozpowszechnionym w szkole epikurejskiej i przypisywanym wówczas Arystotelesowi, że istnieją zdania, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, mianowicie zdania dotyczące przygodnych zdarzeń przyszłych. Logika stoików jest więc logiką dwuwartościową.

Sposób rozumienia implikacji był przedmiotem sporów, w których rywalizowały ze sobą dwie koncepcje. Jedna (reprezentował ją Diodoros Kronos z Megary) odpowiada dzisiejszej implikacji ścisłej w ujęciu Lewisa: „*p* ściśle implikuje *q*", znaczy: „Nie jest możliwe, że *p* jest prawdą i *q* fałszem" (*Logika modalna—2). Druga koncepcja implikacji, proponowana przez Filona, niczym nie różni się od dzisiejszej implikacji materialnej. Tak rozumiana implikacja: „Jeżeli *p*, to *q*", jest prawdziwa w trzech przypadkach: 1° poprzednik *p* jest prawdziwy i następnik *q* jest prawdziwy; 2° poprzednik *p* jest fałszywy i następnik *q* jest fałszywy; 3° poprzednik *p* jest fałszywy, a następnik *q* jest prawdziwy. To drugie rozumienie implikacji, pochodzące od Filona, przyjęło się w szkole stoickiej.

Definicji funktora „... albo ..." nie ma w znanych obecnie pismach stoickich, ale z reguł wnioskowania, w których występuje ten funktor, wynika, że wyrażenie „*p* albo *q*" rozumieli stoicy bądź jako dysjunkcję wyłączającą, bądź jako alternatywę nie wyłączającą. W pierwszym przypadku „*p* albo *q*" jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko, gdy *p* i *q* nie są zarazem prawdziwe i nie są zarazem fałszywe (IV sylogizm niedowodliwy). Alternatywa nie wyłączająca „*p* albo *q*" jest wtedy i tylko wtedy prawdziwa, gdy przynajmniej jedno ze zdań, *p* czy *q*, jest zdaniem prawdziwym (V sylogizm niedowodliwy).

Logika zdań stworzona przez stoików rozwijała się dalej w średniowieczu, w szczególności w traktatach o konsekwencjach. Niektórym sylogizmom hipotetycznym, np. wymienionym wyżej 'niedowodliwcom', nadano później do dziś używane nazwy łacińskie: *modus ponendo ponens, albo krótko: modus ponens — I sylogizm; *modus tollendo tollens, albo krótko: modus tollens — II sylogizm; *modus ponendo tollens — III i IV sylogizm; *modus tollendo ponens — V sylogizm.

W drugiej połowie XIX w. logika zdań została opracowana jako system dedukcyjny (Frege). Nowsze badania nad systemami dedukcyjnymi i nad sylogistyką Arystotelesa (Łukasiewicz) wykazały, że rachunek zdań jest systemem bardziej podstawowym niż sylogistyka. W sformułowaniu tez sylogistyki występują symbole rachunku zdań, a w

dowodach niektórych twierdzeń sylogistyki zakłada się pewne tezy rachunku zdań. Zasługą stoików jest stworzenie pierwszego systemu dwuwartościowej logiki zdań.

I. M. Bocheński: *Ancient formal logic*. 1971; Kotarbiński: *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *Z historii logiki zdań*. [W:] – – *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. 1961; B. Mates: *Stoic logic*. Przekł. polski: *Logika stoików*. 1971.

M. P.

logika temporalna. Dział logiki, zwany w jęz. ang. „tense logic" lub „temporal logic", nie mający dotąd ustalonej nazwy w jęz. polskim; proponuje się tu nazwę „logika temporalna".

Pierwsze pomysły co do środków logicznych odpowiadających czasom gramatycznym znajdują się w pracy Reichenbacha (1948), zaś pierwsze systemy formalne logiki temporalnej pochodzą od Priora (1957), inspirowanego pewnym rozumowaniem Diodora Chronosa. Ujęcie Priora, które polega na dołączeniu do rachunku klasycznego funktorów temporalnych przyjęło się szeroko i stanowi dziś główny nurt logiki temporalnej. Alternatywne doń ujęcie, rzadziej reprezentowane, polega na ograniczeniu się do logiki pierwszego rzędu, wzbogaconej jedynie o dodatkowy rodzaj zmiennych indywiduowych, mianowicie zmienne przebiegające momenty czasowe; jest to więc wielo-dziedzinowy (ang. many-sorted) rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu (zob. van Benthem 1977). W dalszym ciągu ograniczymy się do przedstawienia pierwszego z tych ujęć.

Logikę temporalną traktuje się z reguły jako pewien rodzaj logiki intensjonalnej, tj. szeroko rozumianej *logiki modalnej. Typowe stosunki między funktorami modalnymi występują w logice temporalnej w taki np. sposób (K jest poniżej skrótem funktora „jest konieczne, że", zaś M skrótem funktora „jest możliwe, że").

(1) Jeśli zawsze p, to niekiedy p (por. $Kp \rightarrow Mp$).
(2) Jeśli zawsze p, to p (por. $Kp \rightarrow p$).
(3) Jeśli p, to niekiedy p (por. $p \rightarrow Mp$).
(4) Nie zawsze p wtedy i tylko, gdy niekiedy nie-p (por. $\sim Kp \equiv M \sim p$).

Logika temporalna jest motywowana z jednej strony przez zagadnienia lingwistyczne, z drugiej zaś przez problemy filozoficzne. Przykładem tych ostatnich jest problem determinizmu, który na gruncie logiki temporalnej może być wyrażony tezą: „zdarzenie x zachodzi teraz, wtedy i tylko, gdy jest konieczne, żeby x zaszło teraz", wynikającą z pewnych rozważań na temat stosunku między przeszłością i teraźniejszością (zob. MacArthur 1977).

Motywacja lingwistyczna bierze się m. in. stąd, że pewne rozumowania intuicyjnie poprawne, odwołujące się do relacji między czasami gramatycznymi, nie dadzą się przedstawić formalnie w klasycznym rachunku logicznym, zachodzi więc potrzeba jego rozszerzenia. Oto przykład takiego wnioskowania: Kuba skosił żyto, a więc Kuba kosił żyto (wnioskowanie w przeciwnym kierunku nie jest poprawne).

Jednym ze sposobów zdania sprawy z logicznych aspektów czasów gramatycznych jest wprowadzenie funktorów: dla czasu przeszłego (P) i dla czasu przyszłego (F), przy czym czas teraźniejszy jest wyrażany brakiem funktora temporalnego. Za pomocą tych dwóch funktorów, jeśli je przyjąć jako pierwotne, można zdefiniować dwa inne:

$$G(A) =_{df} \sim F(\sim A),$$ tj. zawsze będzie tak, że A;
$$H(A) =_{df} \sim P(\sim A),$$ tj. zawsze było tak, że A.

Koniunkcja $G(A).H(A)$ może być interpretowana przez odczytanie: A jest prawdą „wieczną".

System K_t, pochodzący od Priora (1967), zwany minimalną logiką temporalną, zawiera następujące tezy jako aksjomaty:

$G(A \rightarrow B) \rightarrow (G(A) \rightarrow G(B))$
$H(A \rightarrow B) \rightarrow (H(A) \rightarrow H(B))$
$A \rightarrow HF(A)$
$A \rightarrow GP(A)$.

Oprócz reguły odrywania stosuje się jeszcze dwie reguły: z A wolno wywnioskować $G(A)$; z A wolno wywnioskować $H(A)$. To znaczy, jeśli A jest prawdą logiki temporalnej, to zawsze było i będzie prawdą tej logiki. Dla systemu K_t predykatów „jest prawdą" i „jest tezą" wolno używać zamiennie, ponieważ została udowodniona zupełność semantyczna (pełność) tego systemu. Potrzebna dla takiego dowodu definicja prawdy obejmuje, oprócz zwykłych warunków dotyczących klasycznego rachunku zdań, dwa następujące punkty, charakterystyczne dla logiki temporalnej ($M \models A_t$ czytamy: A w chwili t zachodzi w modelu M):

(1) $M \models F(A_t)$ wtedy i tylko, gdy: dla pewnego u, należącego do zbioru chwil T, takiego że t poprzedza u, $M \models A_u$.
(2) $M \models P(A_t)$ wtedy i tylko, gdy: dla pewnego u należącego do T i poprzedzającego t, $M \models A_u$.

Przegląd systemów będących rozszerzeniami K_t podaje MacArthur (1976), gdzie znajdują się też rozważania dotyczące temporalnej logiki kwantyfikatorów oraz semantyki logik temporalnych. W semantyce, biorąc pod uwagę różne formalne własności relacji poprzedzania czasowego, można zdefiniować różne odmiany czasu: czas ciągły, nieciągły, rozgałęziający się, itp.

Z. Augustynek: *Past, present and future in relativity*. „St. Log." XXXV 1976; D. M. Gabbay: *Model theory for tense logics*. „Ann. of Math. Logic" VIII 1975; – – *Investigations in modal and tense logics with applications to problems in philosophy and linguistics*. 1976; J. L. Gardies: *La logique du temps*. 1975; R. P. MacArthur: *Tense logic*. 1976; – – *Timelessness and theological fatalism*. „Logique et Analyse" XX 1977; A. N. Prior: *Time and modality*. 1957; – – *Tense-logic and the continuity of time*. „St. Log." XIII 1962; – – *Past, present and future*. 1967; Reichenbach: *Elements*; N. Rescher: *Topics in philosophical logic*. 1968 (ch. XII: Chronological logic); N. Rescher, A. Urquart: *Temporal logic*. 1971; C. Rohrer (red.): *The logical analysis of tense and aspect*. 1977; K. Segerberg: *Two-dimensional modal*

logic. „Journ. of Philos. Logic" II 1973; S. K. Thomason: *The logical consequence relation of propositional tense logic*. „Zeitschr. f. Math. Log. u. Grundl. Math." XXI 1975; J. F. A. K. Van Benthem: *Tense logic and standard logic*. „Logique et Analyse" XX 1977; – – *The logic of time*. 1982; G. H. v. Wright: *Time, change and contradiction*. 1969.

W. M.

logika tradycyjna. Nazwą tą obejmuje się zazwyczaj: teorię *wnioskowania bezpośredniego (*kwadrat logiczny, *konwersja, *obwersja, *kontrapozycja, *inwersja), teorię wnioskowania pośredniego, czyli *sylogistykę Arystotelesa rozumianą bądź jako system tez (zgodnie z intencjami jej twórcy), bądź jako system reguł, oraz *logikę stoików (teorię sylogizmu hipotetycznego). Niekiedy logikę tradycyjną rozumie się w sposób węższy: nie obejmując tym pojęciem logiki stoików.

K. Ajdukiewicz: *Założenia logiki tradycyjnej*. [W:] JiP. T. 1; I. M. Bocheński: *Ancient formal logic*. 1971; A. N. Prior: *Formal logic* 1962.

M. P

logiki uogólnione. Teorie pierwszego rzędu wydają się częstokroć zbyt wąskie dla wyrażania pewnych faktów matematycznych czy też własności pewnych zbiorów. Stąd też wzięły się próby uogólnienia *klasycznego rachunku logicznego.

1. Teorie wyższych rzędów. Prócz zwykłych zmiennych indywiduowych są tu także zmienne – w zależności od rodzaju logiki – a) dla skończonych zbiorów lub ciągów indywiduów (tzw. słabe logiki rzędu 2); b) dla zbiorów indywiduów – logiki rzędu 2; c) dla zbiorów indywiduów i zbiorów zbiorów indywiduów – logiki rzędu 3 etc. Logiki rzędu większego niż 2 są redukowalne do logiki rzędu 2 za pomocą wzbogacenia języka.

2. Logiki z wyrażeniami nieskończenie długimi – logiki typu $L_{\alpha,\beta}$. W logikach tych dopuszcza się koniunkcje i alternatywy nieskończenie wielu formuł (ale mniej niż $\aleph_\alpha$) oraz kwantyfikowanie ciągów nieskończonych (typu mniejszego niż ω_β).

3. Logiki z kwantyfikatorem uogólnionym – Q_α. Prócz zwykłych kwantyfikatorów $\vee$ oraz $\wedge$ rozważa się jeszcze kwantyfikator Q_α, gdzie $Q_\alpha\, xP(x)$ oznacza, że istnieje co najmniej $\aleph_\alpha$ x-ów takich, że $P(x)$.

Badania logik uogólnionych zostały zapoczątkowane przed II wojną światową. Bardzo ważną rolę odegrały w nich prace A. Tarskiego, A. Mostowskiego, J. Keislera, R. Vaughta, C. Carp, R. Montague'a i innych. W ostatnich latach rozwinęły się poważnie badania nad semantyką logik uogólnionych.

J. A. Addison, L. Henkin, A. Tarski: *Theory of models*. 1966; C. Carp: *Logic with infinitary long expresions*. 1963.

W. Mk

logiki wielowartościowe. Przez logikę rozumie się zazwyczaj zespół obejmujący trzy teorie: *rachunek zdań, *rachunek kwantyfikatorów i teorię *identyczności. Zespół ten stanowi pełną podstawę dla *wnioskowań dedukcyjnych (niezawodnych). Mówiąc o logikach wielowartościowych, ma się zazwyczaj na myśli rachunek zdań, gdyż dwa pozostałe działy, rzadko zresztą konstruowane, są jedynie jak gdyby nadbudówkami nad pewnymi wielowartościowymi rachunkami zdań. Wielowartościowe logiki więc to głównie rachunki zdań (czasem z nadbudowanym rachunkiem kwantyfikatorów z identycznością), odmienne od będącego w potocznym użyciu zwykłego dwuwartościowego rachunku zdań, nazywanego obecnie logiką klasyczną.

Systemy rachunku zdań określone mogą być wieloma metodami.

Metoda aksjomatyczna: ze zbioru zdań sensownych języka danego rachunku zdań wyodrębnia się pewien jego przeliczalny podzbiór, skończony lub nie, zwykle czyniący zadość pewnym intuicjom. Z tego zbioru zdań, jako z aksjomatów, wyprowadza się w oparciu o określone reguły inne zdania, które stanowią tezy danego rachunku zdań.

Metoda macierzowa: przyjmuje się odpowiednie niepuste dwa zbiory A, B liczb (zwykle naturalnych), przy tym zbiór B jest podzbiorem właściwym zbioru A. Zbiór A nazywa się zbiorem wartości logicznych, zbiór B – zbiorem wartości wyróżnionych. *Funktory danego rachunku zdań, jedno lub dwuargumentowe, traktuje się jako funkcje (odpowiednio: jedno lub dwu argumentowe) określone dla wszystkich elementów zbioru A i przyjmujące wartości również z tego zbioru. Wyrażenia rachunku zdań, które przy takiej interpretacji dla wszystkich układów dowolnych wartości zmiennych (lub zdań prostych) przyjmują wartości ze zbioru B, są tautologiami danego rachunku zdań. Funkcje interpretujące funktory rachunku zdań przedstawia się często jako macierze i stąd pochodzi nazwa „metoda macierzowa". Wielość elementów zbioru A, stanowiącego wartości logiczne, usprawiedliwia nazwę „logiki wielowartościowe".

Metoda interpretacyjna: polega na określaniu tez jakiegoś rachunku zdań jako tych zdań, które znajdują interpretacje w jakimś innym systemie, np. algebraicznym, topologicznym itp.

Pierwsze systemy logiki wielowartościowej skonstruowane zostały niezależnie od siebie przez Łukasiewicza (1920) oraz Posta (1921). Logik wielowartościowych jest bardzo wiele i stale powstają nowe systemy, toteż ograniczymy się tylko do opisu kilku ich rodzajów przedstawiających wartość historyczną lub znajdujących się w centrum zainteresowania logików.

Logiki wielowartościowe Łukasiewicza. Łukasiewicz opisał obszerną klasę logik wielowartościowych, obejmującą nieskończenie wiele systemów skończenie wielowartościowych: L_2, L_3 ..., L_i, ... i jeden system logiki nieskończenie wiele wartościowej: $L_{\aleph_0}$. Terminami tych logik są

następujące funktory C, N, A, K, E – odpowiedniki implikacji, negacji, alternatywy, koniunkcji i równoważności (*Symbolika Łukasiewicza). Wartościami logicznymi tych logik są liczby 0, 1 oraz ułamki (liczby wymierne zawarte między zerem a jedynką). Ogólnie, dla logiki n ($n = 3, 4 \ldots$) wartościowej L_n zbiór wartości logicznych $A_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. Zbiór wartości logicznych $A_{\aleph_0}$ dla logiki nieskończenie wielowartościowej $L_{\aleph_0}$ składa się z liczb 0, 1 oraz wszystkich liczb wymiernych (ułamków), zawartych między tymi liczbami. Zbiór wartości wyróżnionych dla wszystkich logik Łukasiewicza jest ten sam $B = \{1\}$. Macierze funktorów tych logik określone są następująco: $Cpq = 1$, gdy $p \leqslant q$, zaś $Cpq = 1 - p + q$, gdy $p > q$; $Np = 1 - p$; $Apq = \max(p, q)$; $Kpq = \min(p, q)$; $Epq = \min(\min(1, 1-p+q), \min(1, 1-q+p))$; dla p, q należących do A_n względnie do $A_{\aleph_0}$. Tautologiami logik Łukasiewicza są te wyrażenia zdaniowe, które przy wszystkich układach odpowiednich wartości logicznych redukują się do wartości wyróżnionej, tj. 1.

Wielowartościowe logiki Łukasiewicza L_n, $L_{\aleph_0}$ są systemami niezupełnymi, niepełnymi (tj. takimi, że nie wszystkie ich funktory definiują się przy pomocy funktorów pierwotnych), aksjomatyzowalnymi, a z uwagi na funktory C, N pozostałe funktory definiowane są jak następuje: $Apq = CCqpp$, $Kpq = NANpNq$, $Epq = KCpqCqp$.

W zasługującym na uwagę, historycznie pierwszym, wielowartościowym systemie Łukasiewicza L_3 zbiorem wartości jest zbiór $A_3 = \{0, {}^1/_2, 1\}$, zbiorem wartości wyróżnionych jest zbiór $B = \{1\}$. Funktory C, N, A, K i E mają następujące macierze:

C	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
1	0	$^1/_2$	1

x	Nx
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$
1	0

A	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1	1	1	1

K	0	$^1/_2$	1
0	0	0	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1

E	0	$^1/_2$	1
0	1	$^1/_2$	0
$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1

x	Tx
0	$^1/_2$
$^1/_2$	$^1/_2$
1	$^1/_2$

System L_3 aksjomatyzowany był przez Łukasiewicza, Tarskiego i Wajsberga. Aksjomatyka tego systemu składa się z następujących zdań: $CqCpq$, $CCpqCCqrCpr$, $CCCpNppp$, $CCNqCNpCpq$. System L_3 został przez J. Słupeckiego wzbogacony o nowy termin pierwotny T o własnościach $Tx = {}^1/_2$ dla $x = 0, {}^1/_2, 1$, oraz o dwa aksjomaty $CTpNTp$, $CNTpTp$. Dzięki tym modyfikacjom system ten stał się systemem pełnym (w tym sensie, że można w nim zdefiniować wszystkie jego funktory) oraz zupełnym (*Zupełność systemu).

Dla systemu logiki nieskończenie wielowartościowej $L_{\aleph_0}$ Łukasiewicz zaproponował następujące aksjomaty: $CpCqp$, $CCpqCCqrCpr$, $CCCpqqCqpp$, $CCCpqCqCqpCqp$, $CCNpNqCqp$. Wajsberg wykazał następnie, że układ tych zdań istotnie jest aksjomatyką systemu $L_{\aleph_0}$.

Łukasiewicz tworzył logiki wielowartościowe z myślą wykorzystania ich do realizacji swych filozoficznych koncepcji. W logice wielowartościowej upatrywał on argument na korzyść wyznawanego przez siebie indeterminizmu. Dla systemu logiki nieskończenie wielowartościowej $L_{\aleph_0}$ Łukasiewicz zaproponował następujące aksjomaty: $CpCqp$, $CCpqCCqrCpr$, $CCCpqqCqpp$, $CCCpqCqCqpCqp$, $CCNpNqCqp$. Wajsberg wykazał następnie, że układ tych zdań istotnie jest aksjomatyką systemu $L_{\aleph_0}$.

Logiki wielowartościowe Posta. Post jest twórcą obszernej nieskończonej klasy logik wielowartościowych. $P_2, P_3, \ldots, P_n$. Podstawowymi terminami tych logik są: funktor alternatywy „$\vee$" i negacji „$\sim$". Wartościami logicznymi logik Posta są liczby naturalne. Zbiorem wartości logicznych logiki n-wartościowej P_n jest zbiór $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, zbiorem wartości wyróżnionych jest zbiór $B_n = \{1, 2, \ldots, k\}$, gdzie $k < n$. Są to więc logiki n-wartościowe (skończone wielowartościowe) z k ($1 \leqslant k < n$) wartościami wyróżnionymi. Macierze odpowiadające alternatywie i negacji są bardzo proste: $p \vee q = \max(x, y)$; $\sim p = p+1$ dla $p < n$ i $\sim p = 1$ dla $p = n$.

Warto zaznaczyć, że konstruując swe logiki Post nie kierował się żadnymi względami filozoficznymi, ciekawiły go po prostu tylko związki formalno-logiczne.

Logiki wielowartościowe Sobocińskiego. Interesującą grupę logik wielowartościowych skonstruował i zbadał w r. 1933 B. Sobociński. Logiki te oznaczymy przez $S_3, S_4, \ldots S_n$. Logiki Sobocińskiego opierają się na dwu funktorach pierwotnych C i H, odpowiednikach implikacji i negacji. Wartościami tych logik są liczby naturalne. Dla logiki L_n zbiorem wartości jest zbiór $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, zbiorem wartości wyróżnionych jest zbiór $B_n = \{2, \ldots, n\}$. Są to logiki n-wartościowe z n-1 wartościami wyróżnionymi. Macierze funktorów C i H są następujące: dla p, q ze zbioru A_n $Cpq = q$, gdy $p \neq q$ i $Cpq = n$, gdy $p = q$; $Hp = p+1$ dla $p < n$ i $Hp = 1$, gdy $p = n$.

Logiki Sobocińskiego są systemami pełnymi i zupełnymi. Autor dla każdego systemu P_n podaje efektywną aksjomatykę.

Dla systemu S_3 funktory C, H mają następujące tabelki:

C	1	2	3
1	3	2	3
2	1	3	3
3	1	2	3

x	Hp
1	2
2	3
3	1

System S_3 opiera się na następujących wzajemnie niezależnych aksjomatach: $CCCpq\ CrsCtCCspCrp$, $CCHqCHHq$, $HpCHHpCpq$, $CCHHpHHqHHCpq$, $CHHCpqCHHpHHq$.

Logiki wielowartościowe Słupeckiego. W r. 1938 J. Słupecki skonstruował i zbadał maksymalnie bogatą klasę wielowartościowych logik skończonych. Logiki te oznaczał symbolami L_n^k, gdzie $n = 2, 3, ...$, zaś $k < n$, gdyż charakteryzować je będą dwa parametry: liczba n oznacza ilość wartości logicznych, liczba k ilość wyróżnionych wartości. Dla logiki L_n^k zbiorem wartości logicznych jest zbiór $A = \{1, 2, ..., n\}$, zaś zbiorem wartości wyróżnionych jest zbiór $B = \{1, 2, ..., k\}$. Terminami logik Słupeckiego są funktory C, R, S scharakteryzowane w następujący sposób: jeżeli $1 \leqslant p \leqslant k$, to $Cpq = q$; jeżeli $k+1 \leqslant p \leqslant n$ to $Cpq = 1$; jeżeli $1 \leqslant p \leqslant n-1$, to $Rp = p+1$, jeżeli $p = n$, to $Rp = 1$; jeżeli $p = 1$, to $Sp = 2$; jeżeli $p = 2$, to $Sp = 1$; jeżeli $3 \leqslant p \leqslant n$, to $Sp = p$.

Macierze tych funktorów przedstawia następująca tabela:

C	1 2 3...n	R	S
1*	1 2 3...n	2	2
2*	1 2 3...n	3	1
3*	1 2 3...n	4	3
4*	1 2 3...n	5	4
.	. . ...	.	.
.	. . ...	.	.
.	. . ...	.	.
k*	1 2 3...n	$k+1$	k
$k+1$	1 1 1...1	$k+2$	$k+1$
.	. . ...	.	.
.	. . ...	.	.
.	. . ...	.	.
$n-1$	1 1 1...1	n	$n-1$
n	1 1 1...1	1	n

Gwiazdki wskazują, które wartości liczbowe są wartościami wyróżnionymi. Każda z logik Słupeckiego L_n^k jest systemem pełnym i zupełnym. Autor dla każdego z tych systemów podaje efektywną aksjomatykę. Ponieważ logiki Słupeckiego obejmują wszystkie możliwe do pomyślenia pełne i zupełne systemy logik skończenie wielowartościowych, przeto wynik tego autora ostatecznie zamyka problem konstruowania logik skończenie wielowartościowych.

Intuicjonistyczny rachunek zdań. Intuicjonistyczny rachunek zdań stworzony został przez Heytinga w r. 1930 Jest on formalnym wyrazem filzoficzno-matematycznych idei twórcy *intuicjonizmu Brouwera. Rachunek zdań Heytinga realizuje w szczególności postulat efektywności uzasadniania poprzez wykluczenie szeregu praw logicznych (jak również ich równoważników), które umożliwiały dowody nieefektywne. Są to np. prawo wyłączonego środka $ApNp$, prawo Claviusa $CCNppp$, prawo Peirce'a $CCCpqpp$, prawo transpozycji $CCNqNpCpq$, jedno z praw podwójnego przeczenia $CNNpp$.

Intuicjonistyczny rachunek zdań określony został metodą aksjomatyczną. Można go oprzeć na różnych układach aksjomatów. Podany tu układ aksjomatów pochodzi od Łukasiewicza (1941).

[1] $CpCqp$.
[2] $CCpCCpqCpq$.
[3] $CCpqCCqrCpr$.
[4] $CKpqp$.
[5] $CKpqq$.
[6] $CCpqCCprCpKqr$.
[7] $CpApq$.
[8] $CqApq$.
[9] $CCprCCqrCApqr$.
[10] $CCpNqCqNq$.
[11] $CNpCpq$.

Z analizy tego układu aksjomatów wynika natychmiast, że intuicjonistyczny rachunek zdań jest częścią zwykłego rachunku zdań.

Przez długi czas usiłowano znaleźć macierzową charakterystykę systemu Heytinga, ale bez powodzenia. Posługiwano się wówczas nieadekwatnymi dla tego systemu macierzami trój- i czterowartościowymi. Nieadekwatnymi w tym sensie, że oprócz aksjomatów Heytinga i wynikających z nich twierdzeń spełniały je również pewne zdania nie wynikające z aksjomatów. W r. 1932 Gödel wykazał, że systemu tego nie można oprzeć na macierzach skończenie wielowartościowych. Adekwatną macierz dla systemu Heytinga udało się skonstruować Jaśkowskiemu dopiero w 1935 r. Są to macierze nieskończone i opis ich jest dość skomplikowany.

Należy podkreślić, że twórcom logiki intuicjonistycznej zupełnie nie przyświecała myśl wprowadzania jakichś dodatkowych wartości logicznych, stąd zaliczenie tej logiki do logik wielowartościowych tłumaczy się tym, że znajduje ona charakterystykę za pomocą macierzy wieloelementowych. W r. 1938 Tarski podał interesującą charakterystykę intuicjonistycznego rachunku zdań przez interpretację topologiczną.

Rachunki zdań Lewisa. Interesującą klasę logik wielowartościowych podał C. I. Lewis. Do stworzenia nowych logik doprowadziło go z jednej strony niezadowolenie z pewnych konsekwencji będącej w powszechnym użyciu zwykłej *implikacji, zwanej implikacją materialną, jak również chęć ścisłego formalnego ujęcia pojęć modalnych. Lewis dążył do skonstruowania logiki dotyczącej takiej implikacji, która możliwie najdokładniej oddawałaby intuicje potocznego okresu warunkowego zachodzącego

między zdaniami wyrażającymi zdarzenia, które łączy jakaś swego rodzaju „więź rzeczowa".

Lewis skonstruował kilka systemów rachunku zdań nazywanych w literaturze S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Terminami pierwotnymi tych systemów są funktory: „·" (koniunkcja), „$\sim$" (negacja), „$\Diamond$" (możliwość). Terminami zdefiniowanymi są: „$\dashv$" (implikacja ścisła), „=" (równoważność ścisła), „$\circ$" (zgodność), „$\Box$" (konieczność), „+" (alternatywa), „$\supset$" (implikacja materialna), „$\equiv$" (równoważność materialna). Ponieważ aksjomatyki tych systemów sformułowane są za pomocą terminów zdefiniowanych, podajemy wpierw definicje:

$[D_1]$ $p \dashv q \underset{\text{df}}{=} \sim \Diamond(p \cdot \sim q)$.
$[D_2]$ $\Box p \underset{\text{df}}{=} \sim \Diamond \sim p$.
$[D_3]$ $p = q \underset{\text{df}}{=} (p \dashv q) \cdot (q \dashv p)$.
$[D_4]$ $p \circ q \underset{\text{df}}{=} \sim (p \dashv \sim q)$.
$[D_5]$ $p + q \underset{\text{df}}{=} \sim (\sim p \cdot \sim q)$.
$[D_6]$ $p \supset q \underset{\text{df}}{=} \sim (p \cdot \sim q)$.
$[D_7]$ $p \equiv q \underset{\text{df}}{=} (p \supset q) \cdot (q \supset p)$.

Podamy teraz tezy, które będą konstytuować aksjomatyki systemów Lewisa:

$[A_1]$ $p \cdot q \dashv q \cdot p$.
$[A_2]$ $p \cdot q \dashv p$.
$[A_3]$ $p \dashv p \cdot p$.
$[A_4]$ $(p \cdot q) \cdot r \dashv p \cdot (q \cdot r)$.
$[A_5]$ $p \dashv \sim \sim p$.
$[A_6]$ $(p \dashv q) \cdot (q \dashv r) \dashv (p \dashv r)$.
$[A_7]$ $p \cdot (p \dashv q) \dashv q$.
$[A_8]$ $\Diamond(p \cdot q) \dashv \Diamond p$.
$[A_9]$ $\Diamond \Diamond p = \Diamond p$.
$[A_{10}]$ $\Box \Diamond p = \Diamond p$.
$[A_{11}]$ $(p \dashv q) \dashv (\Diamond p \dashv \Diamond q)$.

Aksjomatykami systemów Lewisa są następujące układy zdań:

S_1: $A_1 - A_7$.
S_2: $A_1 - A_7, A_8$.
S_3: $A_1 - A_7, A_{11}$.
S_4: $A_1 - A_7, A_8, A_9$.
S_5: $A_1 - A_7, A_8, A_9, A_{10}$.

Regułami dowodowymi dla systemów Lewisa są: reguła odrywania dla ścisłej implikacji, reguła $\frac{a,\ b}{a \cdot b}$ oraz reguła $\frac{a = b}{H(a) = H(b)}$, gdzie a i b są dowolnymi zdaniami logiki Lewisa, zaś $H(a)$ zdaniem zawierającym raz lub więcej razy zdania a, $H(b)$ zdaniem powstałym przez zastąpienie w $H(a)$ zdania a przez b.

Dla systemu Lewisa nie można podać skończonych macierzy adekwatnych. Systemy te natomiast mają interpretacje w topologii.

W logikach Lewisa wyrażenia zbudowane ze zmiennych oraz układów funktorów możliwości, konieczności i negacji noszą nazwę modalności. Modalnościami są np. $\Diamond p$, $\Box p$, $\sim \Diamond \Diamond \Diamond p$, $\Box \Diamond p$ itp. Systemy S_1 i S_2 mają nieskończenie wiele nierównoważnych sobie modalności. Zaś systemy S_3, S_4, S_5 skończoną ilość. Z tym, że S_4 ma ich czternaście, a S_5 – sześć.

Zamierzony przez Lewisa program usunięcia paradoksów implikacji materialnej został zrealizowany tylko częściowo; w systemach jego wyrażenia $p \dashv (q \dashv p)$ $\sim p \dashv (p \dashv q)$ nie są wprawdzie tezami, ale za to w systemach tych obowiązują tezy $\Box p \dashv (q \dashv p)$ oraz $\sim \Diamond p \dashv (p \dashv q)$ – czyli, jeżeli p jest koniecznie, to p wynika ściśle z dowolnego zdania: jeśli zaś p jest niemożliwe, to z p wynika ściśle dowolne zdanie. Zob. też **logika modalna.**

W badaniach dotyczących logik wielowartościowych można wyróżnić dwa nurty nie wykluczające się zresztą wzajemnie. Pierwszy cechuje konstruowanie systemów wielowartościowych dla celów prawie wyłącznie poznawczych – dla poznania nowych związków logicznych powstałych przez uogólnienie pojęcia wartości logicznej. Logiki wielowartościowe spełniały i nadal spełniają rolę 'królika doświadczalnego' w badaniach z zakresu metalogiki.

Drugi z tych nurtów charakteryzuje się tym, że logiki wielowartościowe służyły różnym badaczom do realizowania ich różnych koncepcji naukowo-filozoficznych: kierunek ten reprezentują Łukasiewicz, Lewis, Brauwer, Heyting. Wymienić tu należy również prace Reichenbacha i Destouche-Fevriera, którzy poprzez konstruowanie logik wielowartościowych usiłowali usunąć pewne trudności fizyki współczesnej. Należą tu również usiłowania Reichenbacha i Łukasiewicza dotyczące zastosowania logik wielowartościowych do teorii *prawdopodobieństwa. Obecnie logiki wielowartościowe znajdują zastosowanie w cybernetyce i teorii maszyn matematycznych. Należy jednak podkreślić, że do realizacji zasadniczego celu logiki, jakim niewątpliwie jest teoria wnioskowania, nadaje się, w jakimś stopniu, z całego mnóstwa logik wielowartościowych tylko jedna – logika intuicjonistyczna.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; A. Heyting: *Die formalen Regeln der intuitionistichen Logik*. „Sitzungsber. d. Preus. Akad. d. Wissensch. Physik. Mathem. Kl". 1930; Kotarbiński: *Wykłady*; C. I. Lewis: *A survey of symbolic logic* 1918; C. I. Lewis, C. H. Langford: *Symbolic logic*. 1932; J. Łukasiewicz: *Die Logik und das Grundlagenproblem*. „Les Entret. de Zurich sur les fondem. et la méthode de sc. math." 1941; – – *O logice wielowartościowej*. „Ruch Filoz." V 1920; – – *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*. Polski przekł. [W:] *Z zagadnień logiki i filozofii*. 1962; J. Łukasiewicz, A. Tarski: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*. „Comptes Rend. d. Sc. de la Soc. d. Sc. et d. Lettres de Varsovie" III 1930 23; E. L. Post: *Introduction to a general theory of elementary propositions*. „Amer. Journ. of Math." 1921 vol. 43; H. Rasiowa, R. Sikorski: *The mathematics of metamathematics*. 1963; J. Słupecki: *Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań*. „Comptes Rend. d. Sc. de la Soc. d. Sc. et d. Lettres de Varsovie". III 1939 32; B. Sobociński: *Aksjomatyzacja pewnych wielowartościowych systemów teorii dedukcji*. Roczn. Prac Nauk. Zrzesz. Asystentów Uniw. J. Pilsudskiego w Warszawie" I 1936; A. Tarski: *Der Aussagenkalkül und die Topologie*. „Fundam. Math." XXXI 1938; H.

Weyl: *The ghost of modality*. 1940; Z. Zawirski: *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*. „Kwart. Filoz." XVI 1946; A. A. Zinowjew: *Filosowskije problemy mnogoznacznoj logiki*. 1960.

H. S.

logistyka. Termin wprowadzony w początkach XX w. przez Couturata i Lalande'a jako nazwa dla *logiki formalnej, posługującej się językiem symbolicznym wzorowanym na matematyce. Termin „logistyka" wychodzi już z użycia, ustępując miejsca terminom „logika matematyczna", „logika symboliczna" i in.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; Kotarbiński: *Wykłady*.

M. P.

Łukasiewicz Jan (1878–1956). Ur. we Lwowie. Jeden z twórców i głównych reprezentantów polskiej szkoły logicznej; studiował filozofię w uniw.: we Lwowie pod kierunkiem K. Twardowskiego, w Berlinie i Louvain; doktoryzował się w 1902. Docent, później profesor nadzwyczajny logiki i filozofii uniw. we Lwowie (1906–1915) i Uniw. Warszawskiego (1915–1919); profesor zwyczajny Uniw. Warszawskiego (1920–1939), rektor tejże uczelni (1922/1923 i 1931/1932). Po wojnie profesor logiki w Royal Irish Academy w Dublinie (1945–1956). Członek Polskiej Akademii Umiejętności od 1937.

Do najbardziej znanych (w skali światowej) osiągnięć Łukasiewicza należą: badania nad *rachunkiem zdań, *logiki wielowartościowe i modalne, beznawiasowa symbolika logiczna (*Symbolika Łukasiewicza), nowe idee historii logiki, które znalazły wyraz głównie w badaniach nad *sylogistyką Arystotelesa i *logiką stoików. Logiki wielowartościowe wyrosły z problematyki filozoficznej podjętej już w 1910 r. w książce *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. Konstruując swe systemy logiki Łukasiewicz dążył do maksymalnej prostoty i elegancji, co wyrażało się m. in. w znajdowaniu możliwie najkrótszych układów aksjomatów (m . in. rachunek zdań oparty na jednym aksjomacie, tzw. *aksjomacie Nicoda-Łukasiewicza). Liczne prace Łukasiewicza, rozsiane po czasopismach, zostały częściowo zebrane w tomie *Z zagadnień logiki i filozofii* (1961).

W. M.

M

mathesis universalis (łac.; rachunek uniwersalny). Projektowana przez Leibniza metoda, która pozwoliłaby rozwiązywać w sposób rachunkowy wszelkie problemy.
Zob. też **characteristica universalis.**

W. M.

metajęzyk. Język służący do opisu jakiegoś innego języka. Na metajęzyk składają się nazwy wyrażeń opisywanego języka (można je tworzyć m. in. za pomocą *cudzysłowu), *predykaty opisujące stosunki między wyrażeniami, a tym, do czego się wyrażenia odnoszą (np. „oznacza", „denotuje"), reguły składni, reguły znaczeniowe etc. Metajęzyki tworzyć mogą hierarchię zaczynającą się od metajęzyka, który opisuje jakiś język zwany przedmiotowym, ten metajęzyk jest opisywany przez metajęzyk wyższego stopnia itd. Sformułowana w metajęzyku teoria opisująca jakąś teorię sformalizowaną nazywa się metateorią.
Grzegorczyk: *Log. mat.*; Tarski: *Pojęcie prawdy.*

W. M.

metoda indukcyjna. Metoda poznawcza nauk empirycznych polegająca na stosowaniu obserwacji i eksperymentu oraz *indukcji enumeracyjnej lub *indukcji eliminacyjnej itp.
Zob. **metodologia nauk empirycznych; logika indukcji.**

M. P.

metoda zerojedynkowa. Metoda rozstrzygania, czy dane wyrażenie *rachunku zdań jest tautologią, tj. funkcją zdaniową, która przybiera wartość prawdy przy wszelkich podstawieniach stałych za zmienne. Stosując metodę zerojedynkową, podstawiamy na miejsce zmiennych symbole 0 i 1 (reprezentujące pewne stałe interpretowane jako fałszywość i prawdziwość zdania) i sprawdzamy, któ wartości przysługuje całemu wyrażeniu przy danym układzie podstawień za zmienne. Jeśli istnieje choć jeden taki układ, przy którym całość przybiera wartość 0, wyrażenie nie jest tautologią. Ilość podstawień jest skończona, toteż metoda zerojedynkowa jest metodą efektywną (tj. prowadzącą do żądanych rozstrzygnięć w skończonej liczbie kroków). Jeśli w sprawdzanym schemacie dwuwartościowego rachunku zdań występuje n zmiennych, to istnieje 2^n układów podstawień. Ponieważ przy większej ilości zmiennych sprawdzanie wszystkich wariantów jest uciążliwe, stosuje się, przede wszystkim dla wyrażeń o postaci implikacji, tzw. skrótowa metodę zerojedynkową.

Oto przykład sprawdzania tą metodą. Badamy wzór:

$$(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \to \sim p.$$

Zakładamy, że wzór nie jest tautologią, a więc istnieje takie podstawienie stałych za zmienne p i q, że wzór staje się zdaniem fałszywym. Ponieważ ma on postać implikacji, stanie się fałszywy, gdy poprzednik $(p \to q) \wedge (p \to \sim q)$ będzie prawdziwy, a następnik $\sim p$ będzie fałszywy. Z fałszywości następnika $\sim p$ widać, że za zmienną p należy podstawić prawdę (co zapiszemy skrótowo: $p = 1$). Ponieważ poprzednik jest koniunkcją, będzie on prawdziwy, gdy oba czynniki, tj. $p \to q$ oraz $p \to \sim q$ będą prawdziwe. Z prawdziwości pierwszego czynnika $p \to q$, wiedząc już, że $p = 1$, wnosimy, że q ma być prawdziwe. Mamy już zatem: $p = 1$, $q = 1$. Wstawiając te stałe do drugiego czynnika $p \to \sim q$, otrzymujemy implikację, której poprzednik p jest prawdziwy, a następnik $\sim q$ fałszywy (gdyż q jest prawdziwe). Implikacja o prawdziwym poprzedniku i fałszywym następniku jest fałszywa. A więc drugi czynnik naszej koniunkcji jest fałszywy – wbrew założeniu. Tak więc przypuszczenie, że istnieje podstawienie, które z powyższego wzoru czyniłoby zdanie fałszywe, doprowadziło do sprzeczności. Wnosimy stąd, że przy wszystkich podstawieniach wzór ten staje się zdaniem prawdziwym, a więc że jest tautologią.

Tok rozumowania jest tutaj następujący. Zakładamy, że:
[1] $[(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \to \sim p] = 0$; zatem:
[2] $[(p \to q) \wedge (p \to \sim q)] = 1$ i
[3] $(\sim p) = 0$; stąd:
[4] $p = 1$. Z [2] otrzymujemy:
[5] $(p \to q) = 1$ i
[6] $(p \to \sim q) = 1$. Wstawiając wartość z [4] do [5], otrzymujemy:
[7] $(1 \to q) = 1$, przeto
[8] $q = 1$; wstawiając wartości z [4] i [8] do [6]:
[9] $(1 \to \sim 1) = 1$, czyli
[10] $(1 \to 0) = 1$, stąd
[11] $0 = 1$ co jest fałszywe; w ten sposób doszliśmy do sprzeczności.

Przykład sprawdzenia wzoru, którego głównym funktorem jest alternatywa: $(p \to q) \vee (q \to p)$.
Zakładamy, że istnieje podstawienie, przy którym: $[(p \to q) \vee (q \to p)] = 0$, wtedy
[1] $(p \to q) = 0$ i
[2] $(q \to p) = 0$; z [1] mamy:
[3] $p = 1$ i
[4] $q = 0$; z [2] mamy:
[5] $q = 1$,

[6] $p = 0$. Sprzeczność między [3] i [6] oraz między [4] i [5] wskazuje na tautologiczność badanego wzoru.

Kotarbiński: *Kurs logiki*; — — *Wykłady*.

K. Cz.

metodologia nauk. Etymologicznie znaczy to tyle, co „nauka o metodach nauk", byłoby to jednak określenie za wąskie, bo w metodologii nauk analizuje się nie tylko procedury badawcze, lecz również ich rezultaty: pojęcia twierdzenia, teorie itp. Ponieważ do tych rezultatów należą również twory językowe (zdania, systemy twierdzeń i in.), metodologia nauk graniczy na tym odcinku z logiką języka, czyli *semiotyką logiczną; stąd pewne zagadnienia zaliczyć można równie dobrze do jednej, jak i do drugiej z tych dyscyplin (np. problem sensowności poznawczej wyrażeń). Odróżnienie rozważań metodologicznych, mających za przedmiot czynności badawcze i ich metody, od rozważań mających za przedmiot wytwory tych czynności, odpowiada dwom znaczeniom słowa „nauka": (1) ogół czynności wykonywanych przez uczonych (jako takich), (2) ogół wytworów tych czynności. Przedmiotem więc metodologii nauk jest nauka w obu tych znaczeniach. Pozwala to wyróżnić dwa działy metodologii, określane przez K. Ajdukiewicza jako metodologia pragmatyczna (o czynnościach) i metodologia apragmatyczna (o wytworach).

Inny podział metodologii: metodologia ogólna, w której rozważa się czynności lub rezultaty poznawcze występujące we wszystkich naukach (np. wnioskowanie, definiowanie, klasyfikowanie) oraz metodologia szczegółowa, która z kolei dzieli się na metodologie rozmaitych typów nauki, różniących się rodzajem zabiegów poznawczych. W zależności od przyjętej *klasyfikacji nauk otrzyma się taką lub inną listę owych metodologii poszczególnych nauk. Najczęściej odróżnia się metodologię nauk formalnych, czyli dedukcyjnych, od metodologii nauk realnych, czyli empirycznych. Zakres tych ostatnich nie jest wyraźnie określony. Należą doń bezspornie nauki przyrodnicze: fizyka, astronomia, chemia, biologia itd. O ile jakaś nauka upodabnia się metodologicznie do tych wymienionych, a zmierzają w tym kierunku np. pewne działy psychologii, o tyle charakterystyka jej metod należy do metodologii nauk empirycznych. Przykłady problematyki metodologicznej tych nauk: obserwacja, pomiar, nadawanie sensu empirycznego terminom nieobserwacyjnym, uogólnianie statystyczne, warunki empirycznej weryfikacji lub falsyfikacji itp.

Pozostaje otwarta sprawa tzw. nauk humanistycznych, jak historia w jej różnych specjalizacjach, teoria literatury, estetyka i in. Jeśli podział nauk na formalne i empiryczne uznać za wyczerpujący, to powyższe nauki znajdą się niewątpliwie po stronie empirycznych. Zarówno jednak pewni teoretycy nauki, jak i sami uczeni humaniści akcentują specyfikę metodologiczną nauk tego typu. Według niektórych specyfika ta ma polegać na roli indywidualnej intuicji badacza (niem. Einsicht, Einfühlung, ang. Insight). Dzięki owej intuicji możliwe jest zrozumienie tekstu, dzieła sztuki, przeżyć innej osoby itp. Wybitnym przedstawicielem tego poglądu był Wilhelm Dilthey (1833–1911), od którego pochodzi termin „psychologia rozumiejąca" (niem. Verstehungspsychologie). Inną cechą różniącą nauki humanistyczne od przyrodniczych ma być to, że pierwsze ustalają fakty jednostkowe, drugie zaś prawa ogólne; stąd nazywa się pierwsze idiograficznymi (z gr. *ἰδιος* – pojedynczy), drugie zaś nomotetycznymi (z gr. *νόμος* – prawo). Pogląd ten i wyrażająca go terminologia pochodzą od niem. filozofa i historyka filozofii, W. Windelbanda (1848–1915); kontynuatorem tych idei był H. Rickert (1863–1936). Utożsamianie nauk humanistycznych z idiograficznymi spotyka się z zarzutem (zob. Tatarkiewicz), że zadaniem niektórych nauk humanistycznych, np. historii sztuki, nie jest opis faktów jednostkowych, ale budowanie *typologii. Trzecia cecha mająca różnić nauki humanistyczne od przyrodniczych, to obecność wartościowania, np. pod względem ważności faktu historycznego, wartości estetycznej dzieła sztuki itp.

Teza o specyfice nauk humanistycznych, domagającej się innych metod niż stosowane w przyrodoznawstwie, bywa nazywana antynaturalizmem, podczas gdy pogląd, iż specyfika ta jest pozorna, nosi nazwę naturalizmu.

Podana niżej literatura odnosi się do metodologii ogólnej i do metodologii nauk humanistycznych.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.* J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia*. 1964; Kotarbiński: *Elementy*. W. Marciszewski: *Metody analizy tekstu naukowego*. 1977; L. Nowak: *Wstęp do idealizacyjnej teorii nauki*. 1977; S. Nowak: *Studia z metodologii nauk społecznych*. 1965; T. Pawłowski: *Metodologiczne zagadnienia humanistyki*. 1969; W. Tatarkiewicz: *Skupienie i marzenie* (cz. 3 – Studia z metodologii). 1951; P. W. Tawaniec (red.) *Formalnaja logika i metodologija nauki*. 1964.

W. M

metodologia nauk dedukcyjnych. Nauka określana tą nazwą ma również inne nazwy, jak metanauka, metalogika, metamatematyka. Czasem nazwy te bywają używane zamiennie, czasem zaś na oznaczenie różnych działów metodologii nauk dedukcyjnych. Idąc za tą drugą praktyką, należałoby wyróżnić w metodologii nauk dedukcyjnych dwie części: pragmatyczną i apragmatyczną. Do części pragmatycznej należą takie zagadnienia, jak cel konstruowania teorii dedukcyjnych, obecność przy tym lub nieobecność postaw asertywnych, motywy przyjmowania aksjomatów itp. (zob. Ajdukiewicz: *Systemy*; Grzegorczyk: *Uzasadnianie*). Badania dotyczące tych spraw należą do rozważań humanistycznych, odznaczających się z natury mniejszą precyzją niż badania matematyczne. Dorównuje natomiast tym ostatnim apragmatyczna część metodologii nauk dedukcyjnych, dla której używa się często miana metalogiki lub metamatematyki.

Pierwotnie słowo „metamatematyka" było związane z tzw. programem Hilberta (*Formalizm) i oznaczało, w jego intencji, przede wszystkim badania mające na celu przeprowadzenie dowodu niesprzeczności arytmetyki; stąd druga jej nazwa: teoria dowodu. Z czasem słowo to zaczęło oznaczać wszystkie badania dotyczące struktury i własności systemów dedukcyjnych, a także ich stosunku do opisywanej przez nie rzeczywistości (*modelu); w tak szerokim znaczeniu obejmującym badania syntaktyczne i semantyczne występuje ono np. u Grzegorczyka (*Log. mat.*, Zarys historyczny). W innych jednak kontekstach (Mostowski, Fraenkel i Bar-Hillel, tytuł zbiorowego wydania dzieł Tarskiego) znajdują się sformułowania sugerujące, że nie włącza się do metamatematyki badań semantycznych.

Podobnie niejednolity jest sposób używania słowa „metalogika". Czasem używa się go zamiennie ze słowem „metamatematyka", odnosząc przy tym oba do badań apragmatycznych (zob. Ajdukiewicz: *Systemy*). Etymologicznie rzecz biorąc, każde z tych dwóch słów jest za wąskie dla objęcia całości owych badań, jedno bowiem sugeruje, że ich przedmiotem sa teorie logiczne, drugie zaś, że teorie matematyczne (podczas gdy w rzeczywistości jedne i drugie). A że przy tym linia demarkacyjna między matematyką i logiką jest sprawą sporną, tym trudniej dokonać wyboru na rzecz jednego z tych słów. Najwłaściwiej więc wydaje się pozostawić je w charakterze synonimów, a obszar ich badań podzielić między dwie bardziej szczegółowe teorie: syntaktykę systemów dedukcyjnych i semantykę systemów dedukcyjnych. Pierwszą przyjęło się nazywać syntaksą, a drugą semantyką logiczną. Otrzymuje się wówczas następującą 'mapę' metodologii nauk dedukcyjnych. Rozpada się ona na dwa działy: pragmatyczny i apragmatyczny. Ten drugi, zwany metalogiką lub metamatematyką, dzieli się na syntaktykę i semantykę. W rezultacie otrzymuje się dobrze już utrwalony podział logiki języka na badania pragmatyczne, syntaktyczne i semantyczne.

Metalogika jest obecnie bardzo rozległą nauką. Jako przykłady charakterystycznych dla niej pojęć i problemów można wymienić następujące: 1° Struktura *systemu dedukcyjnego, opisywana przy pomocy pojęć: *aksjomatyka, reguły dedukcyjne, *dowód, *konsekwencja, *wynikanie, *teoria dedukcyjna, *metajęzyk, *język sformalizowany. 2° Tzw. metodologiczne własności systemów: *niesprzeczność, *niezależność aksjomatów, *zupełność, *rozstrzygalność, *kategoryczność, etc. Z zagadnieniem niesprzeczności wiąże się problem *antynomii, który dał potężny impuls badaniom matealogicznym. 3° Semantyka systemów dedukcyjnych, operująca pojęciami: *spełnianie, *prawda, *dziedzina teorii, *model, *interpretacja, *tautologia i in.

K. Ajdukiewicz: *Systemy aksiomatyczne z metodologicznego punktu widzenia.* [W:] *JiP.* T. 2; – – *Log. pragm.*; Carnap: *Syntax*; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; A. Grzegorczyk: *Uzasadnianie aksjomatów teorii matematycznych.* „St. Log." XIII 1962; – – *Log. mat.*; Mostowski: *Log. mat.*; E. Nagel, J. R. Newman: *Twierdzenie Gödla.* 1966 (seria Omega); A. Tarski: *Logic, semantics, metamathematics.* 1956; – – *Undec. theories.*

W. M.

metodologia nauk empirycznych. Jako twórcę nowożytnego programu nauk empirycznych wymienia się F. Bacona (1561–1626) z jego teorią *indukcji eliminacyjnej, rozwiniętą przez J. S. Milla, którą Bacon przeciwstawiał arystotelesowskiej *indukcji enumeracyjnej, czyli przez proste wyliczenie. Rola doświadczenia była jednak podkreślana również przez innych myślicieli starożytności (epikurejczycy), średniowiecza (Roger Bacon) i renesansu (Leonardo da Vinci, Galileo Galilei i in.).

Współczesna metodologia nauk empirycznych postuluje nie tylko odwoływanie się do obserwacji i eksperymentu; za równie konieczny warunek uważa się stosowanie narzędzi dedukcyjnych dostarczanych przez matematykę. Prekursorami tej idei byli pitagorejczycy i Platon, który np. astronomię zaliczał do nauk matematycznych. W średniowieczu do Platona i do neoplatonizmu nawiązywali uczeni uprawiający optykę (franciszkanie oksfordzcy, uczony polski Witelo). Doceniając rolę doświadczenia, brali od Platona pogląd o niezbędności matematyki, a z neoplatonizmu czerpali inspirujące idee metafizyczne zawarte w tzw. metafizyce światła (idea przypisująca słońcu miejsce centralne z racji jego „godności" źródła światła miała inspirować również Kopernika).

W czasach nowożytnych (od w. XVI do pocz. w. XX) rysują się dwa kierunki dociekań metodologicznych: jeden uprawiany przez filozofów i związany terytorialnie głównie z Anglią (empiryzm brytyjski), drugi uprawiany przez przyrodników, głównie na terenie Francji. Do nurtu filozoficznego należą: T. Hobbes, J. Locke, D. Hume, G. Berkeley, J. St. Mill, a spoza Anglii I. Kant, A. Comte, E. Mach (będący również fizykiem) i in. Do metodologów z kręgu matematyczno-przyrodniczego należą m. in.: J. D'Alembert, M. A. Ampère, A. Cournot, C. Bernard, H. Poincaré, P. Duhem; z polskich uczonych wymienić tu należy M. Smoluchowskiego. Również w okresie po pierwszej wojnie światowej uczeni pracujący w naukach ścisłych przyczynili się w istotny sposób do rozwoju metodologii tych nauk (A. Einstein, P. W. Bridgman, W. Heisenberg i in.). Jednocześnie rozwinęła się wśród filozofów, w stopniu nie mającym uprzednio precedensu, dyskusja nad metodami i językiem nauk, biorąca często impuls i narzędzie z rozwijającej się intensywnie logiki matematycznej. Problemy i rezultaty tej dyskusji stanowią współczesną metodologię nauk empirycznych, zawierającą wśród swych głównych punktów problem bazy empirycznej, uzasadniania twierdzeń i definiowania pojęć.

1. Baza empiryczna. Wszelkie zdania teorii empirycznej są uzasadnione w ostatecznej instancji za pomocą zdań, które zdają sprawę z rezultatów obserwacji (bezpośredniej lub z użyciem przyrządów). Zdania takie noszą nazwę spostrzeżeniowych lub obserwacyjnych, lub sprawozdawczych (niem. Protokollsätze) lub podstawowych. Przykłady tego rodzaju zdań: [1] „Eksperyment z 24 kwietnia 1925: godz. 9.40, bodziec warunkowy – metronom, wydzielanie śliny – 40 kropel na pół minuty" (I. P. Pawłow: *Usłownyje refleksy*. 1932). [2] „Udało mi się dostrzec, że białe mleczne grudki limfatyczne zawsze widoczne były w niższej części dwunastnicy ok. 30 cm poniżej odźwiernika" (C. Bernard, cyt. za W. Beveridge: *Sztuka badań naukowych*. 1963 s. 114). [3] „Zauważyłem, że jeśli kąt łamiący pryzmatu jest zwrócony do góry, to oglądany przez pryzmat niebieski pasek papieru będzie się wydawać podniesiony wyżej niż leżący (w rzeczywistości) na jego przedłużeniu pasek czerwony" (I. Newton: *Optics*. 1730).

W sprawie pojęcia zdania spostrzeżeniowego ściera się stanowisko psychologistyczne, bronione w pewnym okresie przez Neuratha i Carnapa, ze stanowiskiem antypsychologistycznym, sformułowanym przez Poppera. Za odmianę psychologizmu można uważać fenomenalizm, wedle którego przedmiotem spostrzeżeń nie są przedmioty fizyczne, lecz pewne treści świadomości, tzw. dane zmysłowe (ang. sense data; zob. Ayer, Moore). Psychologizm występuje bądź w wersji mentalistycznej, wedle której zdania spostrzeżeniowe mówią o stanach umysłu obserwatora, bądź w wersji behawiorystycznej, uważającej zdania spostrzeżeniowe za relacje o stanach organizmu obserwatora (wersja behawiorystyczna w ujęciu Carnapa łączyła się z fizykalizmem, tj. z programem formułowania wszystkich twierdzeń nauki w języku mówiącym o ciałach). W praktyce naukowej, jak widać z podanych przykładów, występują zarówno zdania spostrzeżeniowe zredagowane psychologistycznie ([2], [3]), jak i zdania w redakcji apsychologistycznej ([1]). W przypadku [2] wybór redakcji wydaje się być tylko kwestią stylistyczną, ale w przypadku [3] za sformułowaniem psychologicznym przemawiają względy rzeczowe: obserwator relacjonuje za pomocą słów „będzie się wydawać" stan swych organów zmysłowych (zaopatrzonych w pryzmat), o którym wie skądinąd, że nie odpowiada mu obiektywny stan rzeczy. Rola obserwatora, czy raczej jego „części" utożsamiającej się z pewnym fragmentem systemu nerwowego, jest wówczas analogiczna do roli przyrządu pomiarowego, którego stany odczytuje się bezpośrednio, a dopiero z nich się wnioskuje o odpowiednich stanach rzeczy. Tego rodzaju sytuacja jest normalna w optyce i akustyce, nasuwa się więc rozwiązanie dopuszczające oba rodzaje zdań spostrzeżeniowych. Jeszcze inny sposób uzgodnienia stosunku elementów subiektywnych i obiektywnych w każdym zdaniu spostrzeżeniowym, został wskazany przez Ajdukiewicza: „Jakieś zdanie jest dla mnie w jakiejś chwili zdaniem spostrzeżeniowym, gdy motywem, który skłania mnie w danej chwili do jego uznania, jest przeżywane przeze mnie w owej chwili spostrzeżenie zmysłowe" (*Log. pragm.* s. 221). W tym ujęciu zdania spostrzeżeniowe nie mówią o stanach obserwatora, ale o zewnętrznych względem niego przedmiotach fizycznych; tym jednak, co je kwalifikuje do zdań spostrzeżeniowych, jest istnienie odpowiedniej motywacji, a więc pewnego stanu psychicznego, nie zaś jakieś czynniki pozapsychiczne, jak przedmiot spostrzeżenia lub forma zdania.

Radykalny antypsychologizm wyraża teoria K. Poppera, w której pojęcie zdania spostrzeżeniowego, jako zabarwione psychologicznie, zostało zastąpione pojęciem zdania podstawowego (basic). O zaliczeniu do zdań podstawowych nie decyduje ani fakt relacjonowania własnych spostrzeżeń (jak u Neuratha), ani motywowanie zdania przez spostrzeżenia (jak u Ajdukiewicza), ale dwa inne czynniki: 1° forma logiczna zdania, które winno podpadać pod jeden z dwóch schematów: „W miejscu m i czasie t zachodzi zdarzenie z", lub „W miejscu m i czasie t nie zachodzi zdarzenie z"; 2° zdarzenie z ma być obserwowalne, przy czym pojęcie obserwowalności daje się interpretować fizykalistycznie, w terminach wzajemnego położenia ciał (obserwatora i obserwowanego).

Inną dyskutowaną kwestią jest nieobalalność zdań spostrzeżeniowych. Przy pewnych wersjach psychologizmu, np. fenomenalistycznej, odpowiedź na jest przesądzona: o ile wiedza o własnych przeżyciach jest niepodważalna, o tyle przywilej ten przysługuje zdaniom relacjonującym spostrzeżenia. Tendencja do uważania zdań spostrzeżeniowych za niezawodny punkt wyjścia istniała także we wczesnej fazie empiryzmu logicznego (Wittgenstein, Schlick, Carnap). Została ona poddana krytyce przez Neuratha i Poppera, do których przyłączył się Carnap w fazie dyskusji w „Erkenntniss" 1932/33. Niezawodności pewnych zdań spostrzeżeniowych broni Ajdukiewicz (*Log. pragm.*): te zdania spostrzeżeniowe mają zagwarantowaną prawdziwość, które wyrażają spostrzeżenia dokonane w warunkach normalnych, tj. w takich samych warunkach jak te, które towarzyszyły uczeniu się terminów spostrzeżeniowych spełniających się na dane zdanie. Kto np. nauczył się w pewnych warunkach, co znaczy „to jest proste", ten uznając potem zdanie „tamto jest proste" w takich samych warunkach optycznych (a nie np. w sytuacji zanurzenia kija w wodzie), zabezpieczony jest przed błędem. Wg Poppera żadne zdanie podstawowe nie ma zagwarantowanej nieobalalności, może bowiem podlegać sprawdzeniu za pomocą innych zdań wydedukowanych z niego i z jakiejś teorii. Jakie zdania przyjmie się jako nie wymagające sprawdzania, to zależy od decyzji czy umów akceptowanych w kręgu badaczy danej specjalności.

Jednym z uszczegółowień powyższego problemu jest pytanie, ile w zdaniach spostrzeżeniowych jest 'czystego' spostrzeżenia, a ile elementów interpretacyjnych, biorących się bądź z wiedzy obserwatora, bądź z przyswojonych przez niego umiejętności i technik obserwacyjnych; od trafności owej interpretacji zależałaby również wiarogodność zdania spostrzeżeniowego.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; A. J. Ayer: *The foundations of empirical knowledge.* 1940; R. Carnap: *Über Protokollsätze.* „Erkenntniss" III 1932/33; J. Kotarbińska: *Ewolucja Koła Wiedeńskiego.* [W:] *LTN*; W. Marciszewski: *Redukcjonizm w świetle analizy zdań spostrzeżeniowych.* „St. Filoz." 1963 nr 3/4; G. E. Moore: *Visual sense data.* [W:] *Br. phil.*; Popper: *Log. sc. disc.*

2. Uzasadnianie. Ze względu na stanowisko w sprawie sposobów uzasadniania twierdzeń odróżnia się stanowiska konwencjonalistów, indukcjonistów i dedukcjonistów.

W zbiorze poglądów określanym jako konwencjonalizm wyróżnić trzeba elementy należące do szerzej uznawanych od tez skrajnych i dyskusyjnych. Tezy umiarkowane wiążą się z nazwiskiem H. Poincarégo (1854–1912), który uchodzi za twórcę konwencjonalizmu; bardziej skrajne występują u późniejszych autorów, powołujących się na idee Poincarégo (E. Le Roy, H. Dingler i in.), niekiedy wbrew jego protestom. Niniejsze przedstawienie konwencjonalizmu jest nie tyle relacją historyczną z poglądów Poincarégo, co zdaniem sprawy z obiegowego wśród filozofów stereotypu postawy konwencjonalistycznej. Można go streścić w następujących punktach. 1° Aksjomaty, czyli naczelne twierdzenia teorii przyrodniczej (np. zasady mechaniki Newtona) pełnią rolę *definicji arbitralnych definiujących aksjomatycznie podstawowe pojęcia teorii. 2° Dla tych samych faktów istnieje więcej niż jedna teoria wyjaśniająca owe fakty; o wyborze takiej, a nie innej teorii decyduje wzgląd na elegancję i prostotę. 3° W przypadku niezgodności teorii z doświadczeniem można dokonać uzgodnienia przez a) zmianę definicji lub b) przyjęcie dodatkowych hipotez. Ilustracją do 3a) może być przykład pochodzący od Poincarégo. Przypuśćmy, że zdanie „Fosfor topi się w temperaturze 44°" jest częścią definicji fosforu. Gdybyśmy odkryli, że ciało tak dotąd nazywane topi się w temperaturze 43,9°, moglibyśmy uczynić jedno z dwojga: bądź przestać nazywać je fosforem, bądź odpowiednio zmodyfikować definicję. Oba sposoby są jednakowo poprawne teoretycznie, ale pierwszy (zmiana terminologii po wykryciu nawet małej niedokładności w pomiarze) byłby praktycznie uciążliwszy niż drugi.

Postępowanie wedle programu zawartego w tych punktach jest stosowane w praktyce naukowej, akceptowane zaś teoretycznie nie tylko przez konwencjonalistów. Tym, co wyróżnia konwencjonalizm, to pozytywna ocena pewnej strategii, którą dopuszcza punkt 3b), a takie uciekanie się do hipotez stwarzanych ad hoc, by ratować teorię przed obaleniem przez fakty doświadczalne. Jest to procedura logicznie poprawna, ale – zdaniem jej krytyków – bezpłodna dla rozwoju nauki. To nastawienie protekcjonistyczne względem zagrożonych przez doświadczenie teorii oraz akcentowanie prostoty lub elegancji jako kryterium wyboru między teoriami, stanowią najbardziej dyskutowane punkty konwencjonalizmu.

Oprócz podniesionego przez konwencjonalizm problemu roli elementów apriorycznych, tj. niezależnych od doświadczenia, drugim doniosłym problemem metodologii nauk jest pytanie: Jak należy uzasadniać twierdzenia empiryczne przez powołanie się na obserwacje? Dwie różne odpowiedzi na to pytanie noszą miano indukcjonizmu i dedukcjonizmu (ang. deductionism – termin K. Poppera). Zamiast „indukcjonizm" mówi się też „redukcjonizm" (termin pochodzący od Quine'a) lub „empiryzm", w jednym ze znaczeń tego słowa i zwykle z jakimś bliższym określeniem, np. „empiryzm logikalny". Zamiast „dedukcjonizm" mówi się też „hipotetyzm".

Dopuszczając się uproszczeń, można powyższe stanowiska streścić następująco: Wedle indukcjonizmu podstawą do uznawania twierdzeń naukowych jest *indukcja enumeracyjna, przebiegająca w dwóch etapach: gromadzenie pojedynczych faktów opisywanych przez zdania spostrzeżeniowe, a następnie uogólnianie tych spostrzeżeń. Jeśli zauważymy, że przedmiot a_1 mający cechę A, ma także cechę B, również przedmiot a_2 ma cechy A i B, tak samo następne przedmioty, aż do jakiegoś a_n (przy czym nie obserwuje się przedmiotów mających A, nie mających zaś B), to stwierdza się na tej podstawie: $\wedge x(Ax \rightarrow Bx)$, gdzie $a_1 \ldots a_n$ należą do zbioru wartości zmiennej x. Powstaje jednak pytanie, co usprawiedliwia przejście od skończonej liczby obserwacji do uogólnienia obejmującego także przypadki niezaobserwowane. Pytanie to, stanowiące sławny problem indukcji, a sformułowane z całą ostrością przez Hume'a, dało początek obszernemu działowi logiki, zwanemu *logiką indukcji. Problem ten jest zwykle rozwijany w łączności z jakąś teorią *prawdopodobieństwa; pewne jego ujęcia znane są jako spór o zasadę *weryfikacji empirycznej lub *konfirmacji. Reguła pozwalająca na przejście od przypadków zaobserwowanych do twierdzenia obejmującego także przypadki niezaobserwowane, nosi nazwę zasady indukcji. Problem indukcji można więc sformułować jako pytanie: Co uzasadnia zasadę indukcji? Z licznych prób odpowiedzi na to pytanie wymienić trzeba prace R. Carnapa, H. Reichenbacha, J. M. Keynesa, W. Kneale'a, R. B. Braithwaite'a, K. Ajdukiewicza.

Antyindukcjonizm, czyli krytyka zasady indukcji, stanowiąca polemiczną część dedukcjonizmu, stawia pytanie o status metodologiczny zasady indukcji: Czy jest ona *tautologią, czy twierdzeniem empirycznym? Jeśli jest tautologią, to nie ma w ogóle problemu indukcji, bo tzw.

rozumowania indukcyjne sprowadzają się wówczas do dedukcyjnych. Nikt jednak nie uważa, że indukcja (enumeracyjna) jest szczególnym przypadkiem dedukcji, pozostaje więc druga odpowiedź: zasada indukcji jest zdaniem empirycznym. Ale jako takie wymaga ono uzasadnienia indukcyjnego; to zaś żeby było prawomocne, musi się powołać na zasadę indukcji wyższego rzędu, która znowu będzie wymagać usprawiedliwienia przez indukcję, itd. — w nieskończoność. Innym argumentem przeciw metodzie indukcyjnej jest to, że można za jej pomocą uzyskać potwierdzenia nawet dla wierzeń magicznych lub astrologicznych, czy też poglądów metafizycznych; tak bowiem można dobrać interpretację owych poglądów, wraz z odpowiednią interpretacją faktów, że wszystkie fakty będą przemawiały na ich korzyść. Jeszcze inna linia argumentacji polega na krytyce różnych konkretnych prób usprawiedliwienia indukcji; w wyniku owej krytyki istnieje przekonanie, że zagadnienie indukcji należy do problemów, które pozostają otwarte.

Trudności te wykorzystywane są jako argument na rzecz dedukcjonizmu, którego główna myśl jest następująca. Z nowej idei powziętej przez badacza (nieważne, jak do niej doszedł; mógł dojść np. w drodze indukcji) i na razie nie mającej uzasadnienia, wyprowadza się konsekwencje logiczne. Mając pewien zbiór konsekwencji, bada się, czy nie ma w nim sprzeczności, czy nie składa się on z tautologii, czy wnosi on coś nowego w stosunku do dotychczasowych teorii. Jeśli odpowiedzi na te pytania wypadną korzystnie dla proponowanej teorii, pozostaje ostatni krok: poddać ją testowi empirycznemu, czyli sprawdzeniu tych konsekwencji, które polegają na przewidywaniu faktów doświadczalnych. Jeśli przewidywania się nie sprawdzą, teoria upada. Jeśli się sprawdzą, pozostaje na placu przynajmniej do czasu następnej próby. Nie ma przy tym podstaw do przypuszczania, że któraś próba jest ostateczna i że po jej pomyślnym przejściu teoria pozostanie na zawsze ugruntowana; każde potwierdzenie jest tylko prowizoryczne.

Powyższy obraz sporu stanowisk jest uproszczony, ponieważ indukcjonizm w czystej postaci spotyka się rzadko. Pełniej występował on w pozytywistycznych kierunkach XIX w., współcześnie zaś jednym z nielicznych przykładów indukcjonizmu może być metodologia amerykańskiego behawiorysty B. F. Skinnera, który nawet neurofizjologię uważał za nienaukową, ponieważ hipotezy o czynnościach mózgu, zawierające pewne pojęcia teoretyczne, nie są rezultatem prostego uogólnienia obserwacji. Przewidywanie jako test dla teorii oraz pogląd, że spełnienie się przewidywań tym bardziej wzmacnia teorię, im mniej jest ono spodziewane (czyli im bardziej teoria podatna jest na obalenie) należy do ogólnie przyjętych. Także wprowadzanie pojęć abstrakcyjnych, których usprawiedliwieniem jest nie indukcja, lecz to, że zawierające je hipotezy są przesłankami trafnych przewidywań, jest wypróbowaną w nauce praktyką. Bliższy stanu faktycznego jest podział na tych, którzy dopuszczają indukcję jako jedną z metod badania i tych, którzy przypisują je co najwyżej wartość heurystyczną naprowadzania na pomysł, zaś jedyną podstawę do przyjęcia teorii upatrują w tym, że do danego momentu nie udała się żadna z podejmowanych prób obalenia. Do stanowczych antyindukcjonistów należy inicjator tego kierunku K. Popper.

Problem usprawiedliwienia indukcji odnosi się do twierdzeń mówiących coś o wszystkich bez wyjątku elementach pewnego zbioru, schematycznie: Wszystkie *A* są *B*. Osobne zagadnienie, to problem usprawiedliwienia tzw. *wnioskowania statystycznego, które prowadzi do uogólnień w rodzaju: przeciętnie (zazwyczaj, najczęściej, z reguły itp.) *A* są *B*. Np.: „Atom radu rozpada się — przeciętnie — w ciągu 1700 lat"; „Co drugi — przeciętnie — człowiek w danym kraju jest mężczyzną". Słowo „przeciętnie" wskazuje na to, że należy się liczyć z zaobserwowaniem odchyleń od podanej wielkości. Jeśli jednak z góry przewidziane są odchylenia, to prawa o tej postaci nie mogą zostać obalone, chyba że jest to odchylenie dostatecznie duże i zaobserwowane w dostatecznie długiej serii przypadków. Powstaje jednak pytanie, jak określić to pierwsze i drugie „dostatecznie". Próby odpowiedzi na to pytanie znaleźć można m. in. w pracach Braithwaite'a (rozwiązanie po linii teorii indukcji) i w Poppera *Log. sc. disc.* r. VIII (rozwiązanie po linii dedukcjonizmu).

Nowsza faza (lata siedemdziesiąte) dyskusji dotyczącej uzasadniania w naukach empirycznych pozostawia na boku spory dedukcjonizmu z indukcjonizmem i koncentruje się na prawidłowościach rozwoju nauki, z których można wydobyć pewne dyrektywy dotyczące uzasadniania (T. S. Kuhn i in.).

K. Ajdukiewicz: *Zagadnienie racjonalności zawodnych sposobów uzasadniania*. [W:] *JiP*. T. 2; R. B. Braithwaite: *Scientific explanation*. 1953; — — *Probability and induction*. [W:] *Br. phil.*; R. Carnap: *Logical foundations of probability*. 1950; Z. Czerwiński: *O stosunku wnioskowania statystycznego do dedukcji i indukcji tradycyjnej*. [W:] *LTN*; J. M. Keynes: *A treatise on probability*. 1921; W. C. Kneale: *Probability and induction*. 1949; T. S. Kuhn: *The structure of scientific revolutions*. 1962; H. Poincaré: *Science et méthode*. 1908; Popper: *Log. sc. disc.* (wyd. niem. pt. *Logic der Forschung*. 1935); W. V. O. Quine: *Two dogmas of empiricism*. [W:] *LPV*; M. Swain (ed.): *Induction, acceptance and rational belief*. 1970 (obszerna bibliografia); K. Szaniawski: *Wnioskowanie czy behaviour?* [W:] *LTN*; R. Wójcicki: *Metodologia formalna nauk empirycznych*. 1974.

3. Definiowanie. Problem roli definicji w naukach empirycznych i specyficznych dla tych nauk metod definiowania doszedł do głosu z początkiem XX w. Wcześniej pojawiła się teoria definicji w naukach dedukcyjnych (Pascal, Gergonne, Bolzano), ale metodologia nauk empirycznych koncentrowała się na problemie uzasadniania; u Milla np. uwagi o definicji mają charakter tak ogólny, że stosują się do wszelkich nauk. Związek definiowania z uzasadnieniem dostrzegł Poincaré; Carnap zaś oraz inni neopozyty-

wiści, stawiając pytanie o kryterium empirycznego sensu terminów, otworzyli dyskusję nad metodami definiowania mającymi zapewnić ów sens empiryczny. Neopozytywizm nawiązywał do idei Hume'a, wg którego tylko te terminy mają sens, które da się wywieść z jakichś wrażeń zmysłowych. Rozwijając tę ideę tłumaczono ją na pojęcia semantyczne oraz podjęto próby sprecyzowania, na czym ma polegać ów związek z wrażeniami. Wg pierwszej najbardziej radykalnej koncepcji Carnapa (*Aufbau*), tylko ta definicja nadaje sens terminowi, która polega na wyliczaniu wszystkich jego desygnatów. Teza ta nie dała się utrzymać, m. in. ze względu na to, że wartość logiczna zdania empirycznego byłaby przesądzona przez sens jego terminów; toteż w jednej z następnych prac Carnapa (*Testability*) została zastąpiona teorią *definicji cząstkowych. W teorii tej da się ująć również koncepcja definiowania, znana pod nazwą operacjonizmu i pochodząca od fizyka P. W. Bridgmana (*Definicja operacyjna). Analizy Bridgmana dotyczyły pojęć fizykalnych, ale późniejszy rozwój przyniósł rozpowszechnienie operacjonizmu w psychologii i socjologii, m. in. poświęcono temu tematowi „Psychological Review" 1945, nr 5.

Braithwaite, *op. cit.*; P. W. Bridgman: *The logic of modern physics*. 1927; R. Carnap: *Der logische Aufbau der Welt*. 1928; – – *Testability and meaning*. 1936; T. Pawłowski: *Dobór wskaźników w naukach społecznych*, „St. Log". XV 1964; K. Popper: *The demarcation between science and metaphysics*. [W:] – – *Conjectures and refutations*. 1963; M. Przełęcki: *Operacjonizm*. [W:] *LTN*; Zinowjew: *Osnowy*.

W. M.

Mill John Stuart (1806–1873). Jeden z głównych przedstawicieli empiryzmu brytyjskiego, filozof, działacz polityczny. Głównym osiągnięciem Milla jest teoria *indukcji eliminacyjnej. Mill osiągnął też cenne wyniki w rozważaniach o nazwach, a w szczególności o, *imionach własnych, o *znaczeniu nazw, o definicji; antycypował również teorię *deskrypcji. W kwestii podstaw matematyki stał na stanowisku empirystycznym.

W. M.

model. Konstruowanie modeli jest metodą stosowaną w naukach w celu uproszczenia problemów zwiększającego szanse ich rozwiązania. To metodologiczne pojęcie modelu należy odróżniać od pojęcia *modelu semantycznego. Modelem nazywa się bądź zbiór założeń upraszczających (takich np., jak założenie, że moneta stosowana do rzutów jest 'idealna', tj. daje takie same szanse wyrzucenia orła, jak reszki), bądź też sam przedmiot lub zbiór przedmiotów spełniających takie założenia. W pierwszym przypadku mówi się o modelu nominalnym lub teoretycznym, w drugim – o modelu realnym, zwanym też interpretacją lub realizacją modelu nominalnego.

Tak np. model teoretyczny wolnokonkurencyjnego kapitalizmu, to abstrakcyjny, uproszczony „obraz kapitalistycznych stosunków produkcji, w którym wszyscy kapitaliści działają w warunkach wolnej konkurencji" (Lange). Model realny może być otrzymany w jeden z dwóch sposobów. Czasem konstruuje się fizyczny układ przedmiotów, upraszczający badaną rzeczywistość, ale zarazem dostatecznie do niej podobny, by nadawał się – niejako w zastępstwie – do rozwiązywania problemów dotyczących tej rzeczywistości; taką rolę pełnią mapy, makiety itp. Modeluje się w ten sposób nie tylko układy statyczne, lecz również procesy fizyczne (np. w badaniach areodynamicznych), biologiczne ('sztuczne zwierzęta') i inne. Kiedy indziej model realny nie jest tworem fizycznym, ale przedmiotem lub zbiorem przedmiotów skonstruowanych myślowo, jak idealna moneta, przeciętny konsument etc. Jeśli tymi skonstruowanymi przedmiotami są przedmioty matematyczne, jak np. liczby czy twory geometryczne, mówi się wówczas o modelu matematycznym.

J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia*, 1964; H. Greniewski: *Elementy cybernetyki sposobem niematematycznym wyłożone*. 1959; O. Lange: *Ekonomia polityczna*. T. 1. 1967.

W. M.

model semantyczny. Modelem teorii nazywa się układ przedmiotów, tj. indywiduów, klas, stosunków, funkcji, które przyporządkowane są wyrażeniom danej teorii, bądź jako *denotacje jej terminów stałych, bądź jako *wartości zmiennych, spełniając przy tym aksjomaty owej teorii. Mówiąc swobodniej: modelem teorii jest jakiś układ przedmiotów opisywany prawdziwie przez tę teorię.

W definicji modelu występuje pojęcie układu przedmiotów, określonego też słowami: dziedzina, struktura, świat rozważań. Przyjęło się charakteryzować dziedzinę przez wyliczanie jej składników w określonej kolejności. Np.: 1° Zbiór indywiduów Z, którego elementy są wartościami zmiennych indywiduowych języka teorii. 2° Podzbiory zbioru Z będące denotacjami, czyli zakresami *predykatów jednoargumentowych; oznaczamy je jako $P_1 \ldots P_k$. 3° Relacje, czyli stosunki denotowane przez predykaty wieloargumentowe $R_1 \ldots R_1$. 4° Funkcje denotowane przez symbole działań, które wykonuje się na elementach zbioru Z i które dają w wyniku również elementy ze zbioru Z (jeśli Z jest np. zbiorem liczb naturalnych, to jednym z takich działań może być dodawanie). Oznaczmy funkcje symbolami: $F_1 \ldots F_m$. Czasem występują w języku teorii oprócz zmiennych indywiduowych również stałe indywiduowe (nazwy jednostkowe) $a_1, \ldots, a_m$ oznaczające pewne indywidua ze zbioru Z. Korzystając z wprowadzonych oznaczeń można scharakteryzować dziedzinę jako następujący układ:

$$\langle Z, P_1, \ldots, P_k, R_1, \ldots, R_1, F_1, \ldots, F_m, a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

Przykłady dziedzin. Jedną z dziedzin matematycznych jest układ $\langle C, +, 0 \rangle$, złożony ze zbioru liczb całkowitych, dodawania i wyróżnionego elementu 0. Pojęcie dziedziny może mieć również zastosowanie do określania przedmio-

tu badań teorii empirycznych, takich jak przyrodnicze, ekonomiczne, psychologiczne itp. Tak np. dziedzinę pewnej teorii zachowania można przedstawić jako układ $D = \langle Z, B, R, F \rangle$, gdzie Z jest zbiorem stanów interesujących psychologa; będzie to w danym przypadku suma zbiorów B (bodźce) i R (reakcje). F jest funkcją przypo rządkowującą każdemu bodźcowi reakcję. Taki sposób opisu zachowania, przypominający wczesny (klasyczny) behawioryzm, nie odpowiada jednak rzeczywistości, ponieważ nie ma jednoznacznego przyporządkowania między bodźcami i reakcjami; na te same bodźce różne indywidua reagują w różny sposób, zależnie od tego, w jakim znajdują się aktualnie stanie wewnętrznym. Lepszym więc przybliżeniem będzie teoria o następującej dziedzinie: $D' = \langle Z', B, R, W, F' \rangle$. Z' jest zbiorem takich zdarzeń, jak w D, ale uzupełnionym o zbiór stanów wewnętrznych W, zaś F' jest funkcją określoną na zbiorze par B, W i przybierają wartości ze wzoru R. Uwzględnianie czynnika W (w charakterze tzw. zmiennej pośredniczącej) jest tym, co odróżnia kierunek neobehawiorystyczny od klasycznego behawioryzmu. Metoda wyodrębniania dziedziny pozwala więc charakteryzować teorie naukowe w sposób zwięzły i przejrzysty, zmuszając jednocześnie do sprecyzowania czy rozważane w teorii zależności mają charakter funkcji, jak daleko posunięta jest ogólność twierdzeń teorii (określenie zbioru Z) itp. Innego rodzaju przykład zastosowania teorii modeli do charakterystyki nauk empirycznych, to analiza sensowności terminów teoretycznych, które z racji swej nieostrości podatne są na wiele interpretacji (zob. Przełęcki).

Jeśli jakiejś teorii przyporządkuje się określoną dziedzinę, to teoria staje się zinterpretowana. Jeśli aksjomaty tak zinterpretowanej teorii są zdaniami prawdziwymi w danej dziedzinie, to mówi się wtedy – zgodnie z określeniem podanym na wstępie – że dziedzina ta jest modelem teorii lub, innymi słowy, że teoria ma model w owej dziedzinie. Tak np. teorią, która ma model w dziedzinie $\langle N, =, S, +, \cdot \rangle$, gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych zaś S działaniem następnika, jest *arytmetyka elementarna. Jeśli istnieje model dla jakiegoś zbioru zdań, to zbiór ten jest niesprzeczny.

Każda teoria dedukcyjna (niesprzeczna) ma więcej niż jeden model, co wiąże się z faktem, że jej terminy dadzą się interpretować na wiele sposobów. Przykładem na to mogą być rozmaite interpretacje systemu *algebry Boole'a (inny prosty przykład – zob. Ajdukiewicz par. 56). Badanie modeli teorii matematycznych i różnych związków między nimi stanowi ważny i obszerny dział matematyki zwany *teorią modeli.

Zob. też **kategoryczność.**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; – – *Zastosowania logicznej metody wyodrębniania formalnej dziedziny rozważań w naukach, technice i gospodarce*. „St. Filoz." 1963 nr 3/4; Mostowski: *Log. mat.*; M. Przełęcki: *Z semantyki pojęć otwartych*. „St. Log." XV 1964; A. Robinson: *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. 1963.

W. M.

modus ponendo ponens (skrót: modus ponens; łac.; sposób wnioskowania przez twierdzenie stwierdzający). Przez określenie to rozumie się bądź pewien *schemat wnioskowania, bądź odpowiadające mu prawo rachunku zdań.

(1) Schemat wnioskowania:

Jeżeli p, to q,
p.
Zatem: q.

Przykład wnioskowania według tego schematu: Jeżeli masz podniesioną temperaturę, to jesteś chory. Masz podniesioną temperaturę. Zatem: jesteś chory.

(2) Odpowiadające powyższemu schematowi wnioskowania, następujące prawo rachunku zdań:

$$.p \leftarrow [q \wedge (p \leftarrow q)]$$

Ajdukiewicz: *Zarys*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

M. P.

modus ponendo tollens (łac.; sposób wnioskowania przez stwierdzenie zaprzeczający). Przez określenie to rozumie się bądź pewien *schemat wnioskowania, bądź odpowiadające mu prawo rachunku zdań.

(1) Schematy wnioskowania:

p albo q,	p albo q,
p.	q.
Zatem: nie-q.	Zatem: nie-p.

Przykład wnioskowania według jednego z tych schematów: Pójdę do kina albo pójdę do teatru. Pójdę do kina. Zatem: nie pójdę do teatru. Zdanie typu: „p albo q" rozumie się tutaj jako zdanie dysjunktywne, tj. prawdziwe wtedy i tylko, gdy przynajmniej jeden z jego członów jest zdaniem fałszywym.

(2) Odpowiadające powyższym schematom wnioskowania prawa rachunku zdań:

$$[(p/q) \wedge p] \rightarrow \sim q; [(p/q) \wedge q] \rightarrow \sim p.$$

Ukośna kreska: „/" jest tu znakiem *dysjunkcji.

Ajdukiewicz: *Zarys*; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

M. P.

modus tollendo ponens (łac.; sposób wnioskowania przez zaprzeczenie stwierdzający). Przez określenie to rozumie się bądź pewien *schemat wnioskowania, bądź odpowiadające mu prawo rachunku zdań.

(1) Schematy wnioskowania:

p lub q,	p lub q,
nie-p.	nie-q.
Zatem: q.	Zatem: p.

Przykład wnioskowania według jednego z tych schematów: Pójdę na spacer, lub zostanę w domu. Nie pójdę na spacer. Zatem: zostanę w domu. Zdanie typu: „p lub q" rozumie się tutaj jako zdanie alternatywne: prawdziwe wtedy i tylko, gdy przynajmniej jeden z jego członów jest zdaniem prawdziwym.

(2) Odpowiadające powyższym schematom wnioskowania prawa rachunku zdań:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q;\ [(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p.$$

Ajdukiewicz: *Zarys*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

M. P.

modus tollendo tollens (skrót; modus tollens; łac.; sposób wnioskowania przez zaprzeczenie zaprzeczający). Przez określenie to rozumie się bądź pewien *schemat wnioskowania, bądź odpowiadające mu prawo rachunku zdań.

(1) Schemat wnioskowania:

Jeżeli p, to q,
nie-q.
———————
Zatem: nie-p.

Przykład wnioskowania według tego schematu: Jeżeli dzisiaj jest wtorek, to jutro jest środa. Jutro nie jest środa. Zatem: dzisiaj nie jest wtorek.

(2) Odpowiadające powyższemu schematowi wnioskowania prawo rachunku zdań:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p.$$

Ajdukiewicz: *Zarys*; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

M. P.

Mostowski Andrzej (1913–1975). Dr, prof. zwyczajny (od 1951) w Uniw. Warszawskim i w Instytucie Matematycznym PAN, od 1966 członek rzeczywisty PAN. W l. 1971–1975 przewodniczący Sekcji Logiki w Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauki. W 1966 otrzymał nagrodę państwową I stopnia za działalność naukową. Kilkakrotnie zapraszany z wykładami do USA i krajów europejskich. Badania A. Mostowskiego dotyczą głównie teorii mnogości (m. in. dowód niezależności *pewnika wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości), podstaw matematyki oraz różnych zagadnień logiki matematycznej, takich jak: zagadnienia rozstrzygalności, zastosowania metod algebraicznych i topologicznych w logice matematycznej, klasyfikacji systemów logicznych, teorii modeli i in. Wśród ok. 80 prac dotyczących tej tematyki znajdują się następujące prace książkowe (większość wydana w serii „Studies in Logic..." w Amsterdamie): *Logika matematyczna* 1948; *Sentences undecidable in formalized arithmetic* 1952; *Undecidable theories* (wspólnie z R. M. Robinsonem i A. Tarskim) 1953; *Thirty years of foundational studies*. 1965; *Set theory* (wspólnie z K. Kuratowskim) 1967. Inne prace (przykładowo): *On definable sets of positive integers*. „Fundamenta Mathematicae" 1947; *On the rules of proof in the pure functional calculus of the first order*. „JSL" 1951; *Craig's interpolation theorem in some extended systems of logic*. [W:] *Logic, methodology and philosophy of science*. III 1968; *Foundational Studies. Selected works*. 1979.

W. M.

nazwa.
(1) Wyrażenie *W* jest nazwą, gdy nadaje się (tj. może zostać użyte bez spowodowania niedorzeczności) na podmiot lub orzecznik *zdania atomowego o budowie *x* jest *X* (zob. Kotarbiński).

(2) Wyrażenie *W* jest nazwą, gdy nadaje się na podmiot i tylko na podmiot zdania atomowego (zob. Czeżowski). Np. zarówno „Jan", jak i „logik" są nazwami wedle kryterium (1), bo pierwsza nadaje się na podmiot, a druga na orzecznik w zdaniu atomowym. Wedle (2) tylko „Jan" jest nazwą, ponieważ nadając się na podmiot w zdaniu atomowym, nie nadaje się w nim na orzecznik.

Określenie (1) można też wysłowić w sposób równoważny (na gruncie odpowiednich definicji): wyrażenie jest nazwą, gdy jest stałą indywiduową lub orzecznikiem jednoargumentowym. (2) utożsamia nazwy ze stałymi indywiduowymi. Zbiór nazw (2) zawiera się więc w zbiorze nazw (1), lecz nie odwrotnie. (1) podaje, jako sposób rozpoznania czy jakieś wyrażenie jest nazwą, możliwość jego zastosowania w zdaniu atomowym. Nie przesądza ono jak używać nazw w zdaniach nieatomowych, mianowicie, czy nazwy będącej orzecznikiem w zdaniu atomowym wolno użyć jako podmiotu w zdaniu innego rodzaju, np. typu *SaP*. W kategorii nazw zawierają się takie części mowy, jak rzeczownik, przymiotnik, pewne zaimki, pewne imiesłowy.

Podział nazw. Ze względu na liczbę desygnatów: nazwy puste – zero desygnatów, np. „Zeus"; jednostkowe – jeden desygnat, np. „Bolesław Chrobry"; ogólne – więcej niż jeden desygnat, np. „mężczyzna".
Ze względu na to czy nazwa nadaje się tylko na podmiot, czy też i na orzecznik: nazwy indywidualne, np. „Brutus"; nazwy generalne, np. „człowiek", „zabójca Cezara".
Ze względu na to czy desygnatami są indywidua, czy zbiory w sensie kolektywnym: nazwy zbiorowe, np. „bukiet"; nazwy niezbiorowe, np. „drzewo", „człowiek".
Ze względu na to czy nazwa jest używana z intencją odniesienia do jednego, czy do wielu przedmiotów: nazwy o intencji jednostkowej, nazwy o intencji ogólnej. Różnica między jednymi i drugimi rysuje się najwyraźniej w przypadku nazw pustych, które niekiedy używane są w taki sposób, jak gdyby miały jeden desygnat („Jowisz"), a niekiedy tak, jak gdyby miały wiele desygnatów („bóg olimpijski").

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949 cz. 1 rozdz. 2; P. T. Geach: *Nazwy i orzeczniki*. [W:] *Sem. pol.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

nazwa abstrakcyjna.
(1) Nazwa jednostkowa przedmiotu nie będącego (w dziedzinie danego języka) *indywiduum. W mowie potocznej z reguły nazwami abstrakcyjnymi są nazwy własności, relacji, klas, liczb itp.
(2) Wyrażenie nie będące nazwą, choć mające gramatyczne pozory nazwy przez to, że używane jest w roli podmiotu, a więc tak, jak gdyby odnosiło się do jakiejś rzeczy; takimi mniemanymi rzeczami są własności, zdarzenia, klasy, relacje, liczby itp. Inaczej: *nazwa pozorna (onomatoid).
Określenia (1) i (2) nie różnią się zakresowo: każde z nich zalicza te same wyrażenia do nazw abstrakcyjnych. Różnią się natomiast treścią, zakładając odmienne stanowiska ontologiczne (*nominalizm lub *reizm jest związany z drugim z tych znaczeń) lub przynajmniej różne stanowiska metodologiczne w semantyce. Zwolennik (1) dopuszcza w języku nazwy abstrakcyjne jako mające pewien korelat pozajęzykowy. Zwolennik (2) przyjmuje, że tego rodzaju wyrażeniom nie odpowiada nic spoza języka, toteż każdy zwrot zawierający nazwy abstrakcyjne da się przełożyć na zwrot, w którym te nazwy już nie występują: np. „Nie masz dzisiaj prawdziwej przyjaźni na świecie", to tyle, co „Nie ma dzisiaj prawdziwych przyjaciół na świecie". Przekład nie zawsze jest tak łatwy (nieporównanie trudniej wyeliminować np. wyrażenie „zbiór nieskończony"), ale według reizmu eliminacja taka jest w zasadzie możliwa.
Nazwy abstrakcyjne tworzy się z innych wyrażeń za pomocą specjalnego rodzaju operatorów. W logice jest to *operator abstrakcji, przekształcający np. formułę xRy w wyrażenie: $(\hat{x}\hat{y})(xRy)$, będące nazwą relacji R. W językach naturalnych analogiczną rolę pełnią pewne końcówki (np. zielon-*ość*).

Church: *Math. log.*; Kotarbiński: *Elementy*; Quine: *ML*; H. Stonert: *Język i nauka*. 1964.

W. M.

nazwa generalna (vs nazwa indywidualna). *Nazwa, która w zdaniu atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej nadaje się na orzecznik. Nazwa generalna może być ogólna, jednostkowa (tu należą *deskrypcje, np. „najwyższy szczyt świata") lub pusta.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; Kotarbiński: *Elementy*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

nazwa indywidualna (*nazwa–(2)). Nazwa, która w zdaniu atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej nadaje się jedynie na podmiot. Każda nazwa indywidualna jest zarazem jednostkową, ale nie odwrotnie (nazwami jednostkowymi nie-indywidualnymi są *deskrypcje). Do nazw indywidualnych należą imiona własne, o ile nie traktuje się ich jako skrótów zastępujących deskrypcje. Nazwa indywidualna pozbawiona jest funkcji denotowania rozumianego jako stosunek nazwy do jej zakresu (*Denotacja–(1)), a jeśli pojmuje się desygnaty jako elementy pewnego zakresu, to pozbawiona jest także funkcji desygnowania, czyli oznaczania; przypisuje się jej wówczas specyficzną dla niej funkcję nazywania (ang. naming) Istnieją próby (Quine) wyeliminowania z języka nazw indywidualnych na rzecz zmiennych indywidualnych przez przełożenie każdej takiej nazwy na deskrypcję (np. Napoleon = to, co ma cechę bycia Napoleonem), a następnie pozbycie się deskrypcji metodą proponowaną przez Russella (*Deskrypcja).

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; Kotarbiński: *Elementy*; W. V. O. Quine: *On what there is*. [W:] *LPV*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

nazwa jednostkowa. Nazwa posiadająca dokładnie jeden desygnat. Może być *nazwą generalną lub *nazwą indywidualną.

W. M.

nazwa konkretna. Nazwa oznaczająca takie przedmioty, jak ciała fizyczne lub osoby. Nazwy konkretne przeciwstawia się *nazwom abstrakcyjnym.

W. M.

nazwa konotatywna. W terminologii Milla; nazwa pełniąca funkcję *konotowania. Wg Milla nazwami konotatywnymi nie są *imiona własne.

Mill: *Syst. log.*

W. M.

nazwa ogólna. *Nazwa mająca więcej niż jeden *desygnat.

W. M.

nazwa okazjonalna. *Nazwa będąca *wyrażeniem okazjonalnym.

W. M.

nazwa pozorna (onomatoid). W terminologii reistycznej tyle, co *nazwa abstrakcyjna–(2). Reizm przeciwstawia nazwy pozorne nazwom rzetelnym, utożsamianym z konkretnymi.

Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

nazwa pusta (n. bezprzedmiotowa). Nazwa nie mająca *desygnatów. Nazwa pusta nie pełni więc funkcji desygnowania (oznaczania), pełni natomiast funkcję *denotowania, denotując klasę pustą. W konsekwencji wszystkie nazwy puste, jako mające ten sam zakres (denotację), są równoważne zakresowo.

Pomimo że nazwy puste nie mają desygnatów, w pewnych kontekstach używane są tak, jakby je posiadały. Te, których używa się, np. w kontekstach mitologicznych, w taki sposób, jak gdyby miały dokładnie jeden desygnat (np. „Jowisz"), noszą miano nazw pustych o intencji jednostkowej. Te, których używa się w taki sposób, jak gdyby miały więcej desygnatów (np. „nimfa"), noszą miano nazw pustych o intencji ogólnej.

Istnieje problem wartości logicznej zdań zawierających nazwy puste. W pewien sposób rozwiązuje go Russella teoria *deskrypcji. Przy odróżnieniu mocnej i słabej interpretacji *zdań ogólnych, zdanie ogólne z nazwą pustą jako podmiotem jest prawdziwe, jeśli traktować je jako tzw. zdanie słabe; fałszywe zaś, jeśli traktować je jako tzw. zdanie mocne. Na gruncie koncepcji istnienia przedstawionej przez Ajdukiewicza zdania z nazwą pustą są fałszywe w języku rzeczowym, tj. odnoszącym się do rzeczy danych w doświadczeniu; mogą natomiast być prawdziwe w języku intencjonalnym, tj. języku opisującym wytwory myśli; np. w języku *Iliady* prawdą jest zdanie „Achilles zabił Hektora".

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – *W sprawie pojęcia istnienia*. [W:] *JiP*. T. 2; I. Dąmbska: *W sprawie tzw. nazw pustych*. „Przegl. Filoz." 1948 z. 1/2 (także w *Sem. pol.*); Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

nazwa zbiorowa (n. kolektywna). Nazwa, której *desygnaty są zbiorami. Np. desygnatem nazwy „tłum" jest pewne zbiorowisko ludzi. Zbioru nie pojmuje się w tym przypadku jako przedmiotu abstrakcyjnego (*Zbiór w sensie dystrybutywnym), lecz jako materialny układ jednorodnych elementów (agregat). Nazwy zbiorowe bywają jednostkowe lub ogólne. Chcąc stosować pojęcie nazwy zbiorowej także do pewnych nazw pustych, trzeba się odwołać do intencji towarzyszących używaniu danej nazwy: nazwa jest dla kogoś zbiorowa, gdy myśli on o jej desygnatach jako o zbiorach (np. nazwa „wojsko Amazonek").

Kotarbiński: *Elementy*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

nazywanie. Stosunek semantyczny zachodzący między *nazwą indywidualną *N*, a *indywiduum, którego *N* jest nazwą, np. między imieniem własnym „Ludwik XIV", a osobą Ludwika XIV.

I. Dąmbska: *Z filozofii imion własnych*. „Kwart. Filoz." XVIII 1949 z 3/4; W. V. O. Quine: *Two dogmas of empiricism*. [W:] *LPV*.

W. M.

negacja.
(1) Wyrażenie powstające ze znaku negacji oraz innego wyrażenia, mianowicie zdania (negacja przyzdaniowa) lub nazwy (negacja przynazwowa). Symbol negacji przyzdaniowej, będący *funktorem zdaniotwórczym od jednego argumentu zdaniowego i odczytywany za pomocą słów „nie" lub „nieprawda, że", jest charakteryzowany w *rachunku zdań w sposób następujący: gdy zdanie p jest prawdziwe, to jego negacja, zdanie $\sim p$, jest fałszywa; gdy natomiast p jest fałszywe, to $\sim p$ jest prawdziwe. Tego rodzaju charakterystyka negacji jest odpowiednio rozszerzona na gruncie *logik wielowartościowych. Negację zdania p zapisuje się też: $\neg p$, $\overline{p}$, p'. Np. Słowo „negacja" występuje też czasem jako nazwa samego funktora, a nie całego wyrażenia utworzonego z tego funktora i jego argumentu.
Negacja przynazwowa (oznaczmy ją przez „non-A") da się zdefiniować za pomocą negacji przyzdaniowej w sposób następujący: $x \in \text{non-}A \equiv \sim (x \in A)$. Ze względu na obecność funktora negacji przyzdaniowej zdanie nazywa się przeczącym, w odróżnieniu od zdania twierdzącego.
(2) Pod pojęciem negacji rozumie się czasem stosunek między zdaniami, mówiąc, że jakieś zdanie jest negacją innego. Stosunek ten może być pojmowany jako symetryczny, w tym sensie, że zarówno $\sim p$ jest negacją p, jak i p jest negacją $\sim p$.
(3) Negacją nazywa się również akt negowania zdania, zwany też zaprzeczaniem lub odrzucaniem. Tak pragmatycznie pojęta negacja przeciwstawia się aktowi afirmacji, czyli *asercji zdania.

A. J. Ayer: *Negation*. [W:] – – *Philosophical essays*. 1959; Beth: *Foundations*; H. B. Curry: *Foundations of mathematical logic*. 1963; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; H. Rasiowa: *An algebraic approach to non-classical logics*. 1974.

W. M.

niedopowiedzenie. Błąd wysłowienia popełniany wtedy, gdy w jakimś wyrażeniu został opuszczony któryś istotny jego składnik. Przykłady niedopowiedzeń: Anglicy są flegmatyczni. Logarytm z liczby 100. W pierwszym przykładzie nie dopowiedziano, czy chodzi tu o wszystkich Anglików, czy o ich większość, czy tylko o niektórych. Tego rodzaju błąd nazywamy niedopowiedzeniem kwantyfikacji. W drugim przykładzie nie podano zasady tego logarytmu. Popełniono tu błąd zwany niedopowiedzeniem relatywizacji. Niedopowiedzenia bywają przyczyną niezrozumienia intencji mówiącego lub jej wypaczenia.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Kurs logiki*.

M. P.

niesprzeczność systemu.
(1) System jest niesprzeczny, jeśli nie ma w nim ani jednego wyrażenia Φ, takiego że Φ jest tezą i $\sim \Phi$ jest tezą, czyli gdy nie zawiera pary wyrażeń sprzecznych. Jest to podstawowe pojęcie niesprzeczności i w tym właśnie sensie używa się wyrażenia „niesprzeczność" bez dodatkowego określenia. Zbiór zdań jest niesprzeczny, gdy nie da się z niego wywieść pary zdań sprzecznych. Posługując się symbolem operacji konsekwencji Cn, można formalnie opisać fakt, że zbiór formuł X jest niesprzeczny:

$$\wedge \Phi\{\sim [\Phi \in \mathrm{Cn}(X) \wedge (\sim \Phi) \in \mathrm{Cn}(X)]\},$$

gdzie Φ jest dowolną formułą.
(2) W drugim, również doniosłym znaczeniu, system jest niesprzeczny, gdy nie wszystkie jego wyrażenia sensowne są w nim tezami. System sprzeczny w tym sensie nazywany jest często przepełnionym.
Dla systemów zawierających klasyczny rachunek zdań dwa wyżej wymienione określenia niesprzeczności są równoważne, tzn. jeśli dany system jest niesprzeczny wedle jednego z tych określeń, to jest niesprzeczny także wedle drugiego z nich. Aby stwierdzić, że tak jest rzeczywiście, wystarczy zauważyć: jeśli system jest niesprzeczny w sensie (1), to istnieje zdanie Φ takie, że jedno z pary zdań sensownych Φ, $\sim \Phi$ nie należy do systemu, zatem jest on niesprzeczny w sensie (2). Gdy zaś system jest sprzeczny w sensie (1), to istnieje zdanie Φ takie, że zarówno Φ, jak i $\sim \Phi$ należy do tego systemu; stąd na mocy *prawa Dunsa Szkota należy do systemu dowolne zdanie sensowne, czyli system jest sprzeczny również w sensie (2).
Ogólnie jednak pojęcia te nie są równoważne, np. Jaśkowski skonstruował 'systemy' dyskusyjne, które mogą zawierać parę zdań sprzecznych, co nie powoduje ich przepełnienia.
W naukach dąży się wyłącznie do budowy systemów niesprzecznych i wykazanie sprzeczności jest równoznaczne z obaleniem systemu. Niesprzeczności danego systemu można dowieść przez jego *interpretację na gruncie innego systemu, którego niesprzeczność jest zagwarantowana. Dla teorii prostych, jak np. *rachunek zdań, dowód niesprzeczności polega na wskazaniu takiej własności, która przysługuje wszystkim *aksjomatom systemu i jest dziedziczna względem wszystkich reguł dedukcyjnych, czyli reguł przekształcania, a nie przysługuje przynajmniej jednemu wyrażeniu sensownemu tego systemu. Wszystkie tezy będą tę cechę posiadały, jako że posiadają ją aksjomaty, a każdą tezę otrzymujemy z aksjomatów, stosując reguły przekształcania, które wyróżnioną własność zachowują; zatem wyrażenie nie posiadające tej cechy nie będzie tezą systemu, czyli system będzie niesprzeczny w sensie (2).
Np. dla klasycznego rachunku zdań taką cechą jest bycie *tautologią, a dla podstawieniowo-odrywaniowego równoważnościowego rachunku zdań (jak stwierdził Leśniewski) taką cechą jest posiadanie parzystej ilości zmiennych równokształtnych, co jest własnością czysto strukturalną (zob. Łukasiewicz).

Dla teorii bogatszych dowód niesprzeczności polega na wskazaniu ich modelu teoriomnogościowego.

Church: *Math. log.*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; J. Łukasiewicz: *Równoważnościowy rachunek zdań.* [W:] — — *Z zagadnień logiki i filozofii.* 1961.

K. Cz.

niezależność formuł (vs zależność). Zbiór formuł X danego systemu jest niezależny, gdy żadnej z nich nie da się uzyskać z pozostałych, posługując się regułami przekształcania tego systemu. Czyli, gdy dla każdej formuły Φ ze zbioru X, Φ nie należy do konsekwencji zbioru X pomniejszonego o formułę Φ: $\wedge\, \Phi \in X[\Phi \notin \mathrm{Cn}(X-\{\Phi\})]$. Najczęściej bada się niezależność układu aksjomatów. Zależność formuły od pozostałych wykazuje się poprzez podanie jej wyprowadzenia z nich. Niezależność można udowodnić, podając kolejno dla każdej formuły tego zbioru taką własność, która przysługuje wszystkim pozostałym formułom i jest dziedziczna ze względu na wszystkie reguły przekształcania systemu, a tej właśnie formule nie przysługuje. Najczęściej własność taka dla rachunków zdaniowych polega na spełnianiu pewnych wielowartościowych matryc. Podaje się więc wielowartościowe matryce kolejno dla każdej z formuł takie, że odpowiednio wszystkie formuły prócz jednej spełniają dane matryce i matryce te są dziedziczne ze względu na reguły przekształcania przyjęte dla danego systemu, czyli że jeśli jakieś formuły spełniają matryce, to formuła z nich uzyskana poprzez zastosowanie do nich reguły przykształcania — również matryce te będzie spełniała.

Np. Łukasiewicza układ aksjomatów klasycznego rachunku zdań z regułami odrywania i podstawiania:

[1] $(p\to q)\to[(q\to r)\to(p\to r)]$,
[2] $(\sim p\to p)\to p$,
[3] $p\to(\sim p\to q)$,

jest niezależny, ponieważ matryce:

p	$\sim p$
0	1
1	0
2	2

$p\to q$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	0
2	1	1	0

gdzie 1 jest wartością wyróżnioną, są dziedziczne ze względu na reguły odrywania i podstawiania, i spełnione przez aksjomaty [2] i [3], zaś dla $p=2$, $q=0$, $r=2$ aksjomat [1] daje 0, czyli nie spełnia tych matryc.

Z kolei matryce:

p	$\sim p$
0	0
1	0

$p\to q$	0	1
0	1	1
1	0	1

gdzie 1 jest wartością wyróżnioną, są dziedziczne względem reguł odrywania i podstawiania i spełnione przez aksjomaty [1] i [3], zaś dla $p=0$ aksjomat [2] daje 0.

Wreszcie matryce:

p	$\sim p$
0	1
1	1

$p\to q$	0	1
0	1	1
1	0	1

są dziedziczne względem reguły odrywania i spełnione przez aksjomaty [1] i [2] zaś dla $p=1, q=0$ aksjomat [3] daje 0.

Niezależności danej formuły względem zbioru danych formuł w teoriach bardziej rozwiniętych dowodzi się za pomocą konstrukcji odpowiednich *modeli, w których prawdziwe są formuły z tego zbioru, a dana formuła jest fałszywa.

T. Czeżowski: *Logika.* 1949; Mostowski: *Log. mat.*

K. Cz.

nominalizm. Kierunek filozoficzny rozwijany już w średniowieczu w zakresie *ontologii oraz teorii poznania i języka, a współcześnie wpływający także na *filozofię nauki. Przykładem współczesnego nominalizmu jest jego wersja zwana *reizmem, pochodząca od T. Kotarbińskiego. Nominalizm, będący w skrajnej opozycji do *platonizmu, odrzuca istnienie przedmiotów abstrakcyjnych, jak własności, zbiory, liczby itp. Stąd aktualność nominalizmu w dyskusji nad istnieniem i naturą przedmiotów matematycznych, toczącej się w filozofii matematyki.

Zob. też **uniwersalia.**

N. Goodman, W. V. O. Quine: *Steps toward a constructive nominalism.* „JSL" XII 1947; H. Hiż: *O rzeczach.* [W:] *Fragmenty filozoficzne.* 1959; Kotarbiński: *Elementy*; Küng: *Ontology.*

W. M.

nonsens.

(1) Układ wyrazów U jest nonsensem (ze względu na język J), gdy jest ciągiem wyrazów zbudowanym niezgodnie z regułami składni języka J, czyli niespójnym syntaktycznie (*Spójność syntaktyczna). Przykład: Róża lub leży. Na gruncie np. *teorii typów nonsensem jest napis $x\in x$, ponieważ narusza on regułę syntaktyczną, wedle której po obu stronach symbolu „$\in$" nie mogą figurować wyrażenia odnoszące się do tego samego typu logicznego. Nonsens, czyli wyrazenie nonsensowe, nazywa się też wyrażeniem bezładnym semantycznie.

(2) Słowa „nonsens" używa się też niekiedy w znaczeniu *absurd, czyli „wypowiedź wewnętrznie sprzeczna", np. Jan jest żonatym człowiekiem stanu wolnego. Żaden absurd nie jest nonsensem w znaczeniu (1), bo aby wyrażenie mogło być sprzeczne, musi być poprawnie zbudowane pod względem składniowym.

(3) Wyrażeniem bezsensownym nazywa się też, w terminologii neopozytywizmu, wyrażenie pozbawione sensu empirycznego, czyli nie spełniające warunków* sensowności empirycznej.
(4) Dyskutowaną grupę stanowią wyrażenia w rodzaju „Cezar jest liczbą pierwszą" lub „Cebula pachnie niebiesko". Ulegają tu pomieszaniu pewne kategorie, które odróżniamy intuicyjnie, ale które nie są uwzględniane w wykazie *kategorii semantycznych języka; stąd niemożność wykazania bezładu semantycznego. Gdyby odpowiednio uzupełnić listę kategorii, to — według jednego stanowiska — można by zdać sprawę z intuicyjnie dostrzeganego bezsensu. Innym rozwiązaniem jest propozycja uważania tego rodzaju zdań za fałszywe.

Carnap: *Syntax*; Kotarbiński: *Elementy*; A. Pap: *Analytische Erkenntnistheorie*. 1955; Reichenbach: *Elements*.

W. M.

numery Gödla. Niech język L oparty będzie na skończonym zbiorze predykatów $P_0, ..., P_k$ oraz funkcji $f_0, ..., f_l$. Definiujemy następujące przyporządkowanie Num:

Num:	(	)	~	∨	∧	→	≡	∀	∃	=
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

$$\text{Num}\,(P_i) = 11+i \quad \text{dla} \quad i \leqslant k$$

$$\text{Num}\,(f_i) = 12+k+i \quad \text{dla} \quad i \leqslant 1$$

$$\text{Num}\,(x_n) = 12+k+l+n.$$

Teraz wyrażeniu $A = a_0 a_1 \ldots a_n$ przyporządkowujemy w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbę

$$\text{Num}(A) = 2^{\text{Num}(a_0)} \cdot 3^{\text{Num}(a_1)} \ldots p_n^{\text{Num}(a_n)},$$

gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą.
W ten sposób formule przyporządkowaliśmy liczbę, którą nazywamy jej numerem Gödla. Podobnie ciągowi formuł α: $A_0 \ldots A_n$ możemy przyporządkować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbę

$$\text{Num}\,\alpha = 2^{\text{Num}\,A_0} \ldots p_n^{\text{Num}\,A_n}.$$

W ten sposób, jako że dowód jest uporządkowanym zbiorem formuł, definiujemy numer Gödlowski dowodu. Dla uproszczenia przykładu ograniczymy się do języka z jednym predykatem jednoargumentowym P_0 i jedną funkcją f_0. Np. formule $\sim P_0(x_2)$ przyporządkowujemy liczbę:

$$\text{Num}(\sim P(x_2)) = 2^3 \cdot 3^{11} \cdot 5^2 \cdot 7^{14} \cdot 9^1,$$

zaś formule $f_0(x_1) = x_2$ liczbę:

$$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^{13} \cdot 7^1 \cdot 11^{10} \cdot 13^{14}.$$

K. Gödel: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. „MMP" XXXVIII 1931; Grzegorczyk: *Log. mat.*; E. Nagel, R. J. Newman: *Twierdzenie Gödla*. 1966 (seria Omega).

W. M.

O

obalalność (pełniej: obalalność empiryczna). Zdanie jest obalalne empirycznie, gdy istnieje możliwość wykazywania jego fałszywości na podstawie doświadczenia. Koniecznym i wystarczającym warunkiem obalalności jest to, żeby zdanie miało konsekwencje logiczne wśród *zdań obserwacyjnych. Np. z twierdzenia „Prąd elektryczny przepływa tylko w obwodzie zamkniętym", wynika, na gruncie teorii elektryczności, że jeśli przerwie się obwód, to igła magnetyczna, która przed przerwaniem obwodu wychylała się ze swego zwykłego położenia, teraz nie będzie wykazywać odchyleń . Gdyby obserwacje zaprzeczyły temu przewidywaniu, należałoby odrzucić twierdzenie, z którego to przewidywanie wynika.

Brak konsekwencji obserwacyjnych bierze się bądź ze struktury logicznej zdania, bądź z jego treści. Do pierwszej z tych kategorii należą *tautologie logiczne, a także zdania egzystencjalne o schemacie $\vee xF(x)$, w których stwierdza się istnienie przedmiotu o pewnej własności (np. „Istnieje śnieżny człowiek"), bez podania miejsca i czasu, w jakim ów przedmiot można by zaobserwować. Do drugiej kategorii należą np. te twierdzenia filozoficzne, które mają być niezależne od kontroli doświadczenia, jako sądy wyprzedzające wszelkie doświadczenie. Np. zdanie „Istnieje świat" nie da się obalić doświadczalnie, bo korzystanie z obserwacji, pojętych jako oddziaływanie bodźców na zmysły, zakłada już istnienie owych bodźców, a więc istnienie świata zewnętrznego.

Zob. też **falsyfikacja; hipoteza; metodologia nauk empirycznych; weryfikacja.**

J. Giedymin: *Indukcjonizm i antyindukcjonizm*. [W:] *LTN*; Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

obraz zbioru wedle relacji R (R-owy obraz zbioru). Obrazem zbioru X wedle relacji R nazywamy zbiór tych przedmiotów, do których elementy zbioru X pozostają w relacji R. Oznaczając obraz zbioru X wedle relacji R symbolem $R(X)$ zapisujemy tę definicję symbolicznie w postaci: $y \in R(X) \equiv \vee x(x \in X \wedge xRy)$. Przykład: obrazem zbioru poetów wedle relacji bycia autorem jest zbiór dzieł, których autorami są poeci.

Zob. też **teoria relacji**.

B. S.

obwersja (z łac. obversio). Wnioskowanie oparte na następujących prawach logiki tradycyjnej:

$$SaP \rightarrow SeP',\ SeP \rightarrow SaP',\ SiP \rightarrow SoP',\ SoP \rightarrow SiP'.$$

Przykłady: Każdy wróbel jest ptakiem. A więc: żaden wróbel nie jest nie-ptakiem. Żaden wilk nie jest osłem. Zatem: każdy wilk jest nie-osłem.

Wnioskowanie to polega na przekształceniu przesłanki ze zdania twierdzącego na przeczące i na odwrót z przeczącego na twierdzące, przy jednoczesnym zaprzeczeniu orzecznika. Obwersja jest jedną z form tzw. *wnioskowania bezpośredniego.

Ajdukiewicz: *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*.

M. P.

ontologia.

(1) System rachunku nazw pochodzący od S. Leśniewskiego (*systemy Leśniewskiego).

(2) Dział filozofii, w którym rozważa się własności przedmiotów związane ze 'sposobem istnienia' (np. istnienie rzeczy, istnienie własności; istnienie realne idealne, intencjonalne etc.). Klasę przedmiotów o tym samym 'sposobie istnienia' nazywa się często kategorią ontologiczną; tak np. wyróżnia się kategorię rzeczy, czyli substancji i kategorię cech, czyli własności. Tym, co różni między sobą systemy filozoficzne, jest przede wszystkim liczba i rodzaje wyróżnianych przez nie kategorii ontologicznych; tak np. wedle kierunku ontologicznego zwanego *reizmem istnieją tylko przedmioty z kategorii rzeczy, przykładem ontologii „bogatej", dopuszczającej wiele kategorii, jest *platonizm. Związek między logiką a ontologią, nazywany przez niektórych ontologicznym zaangażowaniem logiki (ang. ontological commitment) polega na tym, że *kategoriom syntaktycznym zmiennych przyjmowanym w teorii logicznej przyporządkowane są odpowiednie kategorie ontologiczne w *modelu semantycznym tej teorii, np. *indywidua jako wartości zmiennych indywidualnych (zob. Quine).

Zob. też. **logika formalna** – 3.

G. Bergmann: *Logic and reality*. 1964; Küng: *Ontology*; W. V. O. Quine: *On what there is?* [W:] *LPV*; R. Suszko: *O kategoriach syntaktycznych i denotacjach wyrażeń w językach sformalizowanych*. [W:] *Rozpr. log.*

W. M.

onus probandi (łac.; ciężar dowodzenia). Miano to nadaje się regule dyskutowania określającej, na kim w danej sytuacji dyskusyjnej spoczywa obowiązek uzasadniania swego stanowiska. Tak np. gdy jedna ze stron wygłasza twierdzenie, a druga wstrzymuje się od zajęcia stanowiska, obowiązek uzasadniania ciąży na zwolenniku tego twierdzenia.

Kotarbiński: *Kurs logiki*; A. Lalande: *Vocabulaire philosophique*. 1956; W. Marciszewski: *Sztuka dyskutowania*. 1969.

W. M.

operacjonizm. Kierunek w *metodologii nauk, formułujący pewne postulaty co do metody wprowadzenia pojęć do teorii. Tą postulowaną metodą jest *definicja operacyjna.

W. M.

operator. Operator określa się zwykle jako wyrażenie wiążące zmienne. Określenie takie zakłada, że pojęcie wiązania zmiennej jest wcześniej zdefiniowane. Jeśli zaś nie zakłada się tego pojęcia, można scharakteryzować operatory pewnego języka przez ich wyliczenie wraz z podaniem reguł mówiących, jak budować z nich (i z innych wyrażeń) całości sensowne w danym języku. Tak więc reguły syntaktyczne dla kwantyfikatorów podaje się w *rachunku kwantyfikatorów, reguły dla operatora *deskrypcji w teorii deskrypcji itd. Jako przykłady operatorów wymienić jeszcze można logiczny *operator abstrakcji, matematyczne znaki iloczynu, sumy, całki itd.

K. Ajdukiewicz: *O spójności syntaktycznej*. [W:] *JiP*. T. 1.

W. M.

operator abstrakcji. Operatorem abstrakcji lub znakiem abstrakcji nazywa się symbol, który przekształca *funkcję propozycjonalną w nazwę zbioru przedmiotów spełniających tę funkcję. Niech taką funkcją będzie formuła $Q(x)$; wtedy wyrażenie $(\hat{x})Q(x)$, gdzie daszek nad x, wraz z nawiasami wokół zmiennej, jest operatorem abstrakcji, stanowi nazwę zbioru tych przedmiotów, które spełniają funkcję $Q(x)$. Np. wyrażenie $(\hat{x})$ (x jest logikiem) stanowi nazwę zbioru logików. Wyrażenie $(\hat{x})$ $(\hat{y})$ $(x < y)$, gdzie zmienne x, y przebiegają zbiór liczb naturalnych, oznacza zbiór takich par uporządkowanych które spełniają powyższą nierówność, mianowicie: $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, ..., $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 2, 4\rangle$, itd. Definicją operatora abstrakcji, ograniczoną do formuł jednoargumentowych, jest wyrażenie:

$$z \in (\hat{x})Q(x) \equiv Q(z)$$

tj. z należy do zbioru określonego przez funkcję $Q(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy z spełnia tę funkcję. Np. w dziedzinie liczb naturalnych (z zerem) liczby 0, 1, 2, 3, i tylko one, spełniają funkcję $x \leqslant 3$, a więc wyrażenie $(\hat{x})$ $(x \leqslant 3)$ oznacza zbiór $\{0, 1, 2, 3\}$. Definicja operatora abstrakcji dla formuł dwuargumentowych przybiera postać:

$$\langle w, z\rangle \in (\hat{x})\,(\hat{y})R(x, y) \equiv R(w, z).$$

Analogicznie – dla formuł o większej liczbie argumentów. Operator abstrakcji, zanim w kształcie wyżej podanym i pod tą nazwą pojawił się w *Principia Mathematica*, został wprowadzony przez Fregego (1893) w kształcie znaku przydechu przed grecką literą, np. $'\alpha\,(\alpha^2 = 4)$; jeszcze innego symbolu używał Peano. Obecnie używa się często notacji $\{x.\, Q(x)\}$ lub $\{x|\, Q(x)\}$ zamiast tradycyjnej $(\hat{x})Q(x)$. Notacja ta pozwala także uogólnić zapis abstrakcji w taki sposób, że zamiast pojedynczych zmiennych operator abstrakcji wiąże formuły funkcyjne, np. $\{x.\, y|x \in X \,\&\, y \in Y\}$ oznacza zbiór iloczynów liczb, takich, że pierwszy czynnik należy do zbioru X, zaś drugi do zbioru Y, zaś znak & oznacza koniunkcję.

Operator abstrakcji może być dołączony do języka rachunku kwantyfikatorów za pomocą definicji takich, jak podane wyżej, a więc może być również eliminowany za pomocą tychże definicji. Choć nie jest on niezbędny z teoretycznego punktu widzenia, jest jednak dla pewnych celów użyteczny, pozwala bowiem zdefiniować inne pojęcia logiczne, które bez niego byłyby traktowane jako pierwotne. Tak np. dogodnie jest móc zdefiniować zbiór uniwersalny jako $(\hat{x})\,(x = x)$, zaś zbiór pusty jako $(\hat{x})\,(x \neq x)$, co pozwala nadbudować teorię zbiorów nad rachunkiem kwantyfikatorów. Można też przyjąć operator abstrakcji jako termin pierwotny rachunku logicznego, wprowadzony przez odpowiednie postulaty, i za jego pomocą zdefiniować kwantyfikatory jako symbole wtórne. Definicja kwantyfikatora ogólnego byłaby wtedy następująca:

$$(x)Q(x) \equiv ((\hat{x})Q(x) = (\hat{x})\,(x = x)).$$

Z lingwistycznego punktu widzenia operator abstrakcji może być uważany za środek gramatyczny, który z funkcji propozycjonalnej tworzy nazwę przedmiotu abstrakcyjnego, takiego jak zbiór czy relacja. Zachowuje się on więc analogicznie jak operator *deskrypcji, który z funkcji propozycjonalnej tworzy wyrażenie odnoszące się do jakiegoś indywiduum.

Zob. też **lambda-operator.**

K. Ajdukiewicz: *O spójności syntaktycznej*. (1935) [W:] *JiP*. T. 2; G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*. 1893; *Principia*; Quine: *ML*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

orzecznik. Wyrażenie, które w zdaniu o schemacie x jest P, znajduje się na miejscu P, np. słowo „lekarz" w zdaniu „Hipokrates jest lekarzem". Orzecznik odróżnia się od orzeczenia, czyli *predykatu, które w powyższym przykładzie stanowi zwrot „jest lekarzem".

Czasem jednak używa się słowa „orzecznik" jako równoznacznika słowa „predykat" (zob. np. Czeżowski). Wtedy trzeba odróżniać orzeczniki bezwzględne, czyli jednoargumentowe (jak w powyższym przykładzie) oraz względne, o schemacie $R(x, y)$, $R(x, y, z)$ itd. Np.: x kocha y, y leży między x i z. Używając słowa „orzecznik" bez przymiotnika ma się zwykle na uwadze orzecznik bezwzględny.

Kotarbiński: *Kurs logiki*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

orzecznik autosemantyczny (o. autologiczny; vs orzecznik heterosemantyczny (heterologiczny)). Autosemantycznym jest taki orzecznik, który orzeka się prawdziwie o sobie samym. Np. wyraz „rzeczownik" jest rzeczowni-

kiem. Zwrot „wyrażenie polskie" jest wyrażeniem polskim. Jeśli orzecznik nie spełnia tego warunku, należy do heterosemantycznych.
Pojęcie orzecznika heterosemantycznego prowadzi do paradoksu, gdy postawi się pytanie, czy wyrażenie „orzecznik heterosemantyczny" samo jest heterosemantyczne. Jeśli jest heterosemantyczne, to nie orzeka się o nim samym, a więc nie orzeka się o nim, iż jest heterosemantyczne; nie jest przeto heterosemantyczne. Jeśli zaś nie jest heterosemantyczne, to jest autosemantyczne, czyli orzeka się prawdziwie o sobie samym, a zatem prawdziwie orzeka o sobie, że jest heterosemantyczne. Przed *antynomią tą, podobnie jak przed innymi tego samego typu, zabezpiecza odróżnianie języka przedmiotowego od *metajęzyka.
Zob. też **antynomie w logice.**

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; H. Stonert: *Język i nauka*. 1964.

W. M.

orzecznik heterosemantyczny (o. heterologiczny; vs orzecznik autosemantyczny). Orzecznik, który nie orzeka się o sobie samym; jeśli np. przyjąć, że długi jest taki wyraz, który ma więcej niż dwie sylaby, to słowo „długi" trzeba uznać za orzecznik heterosemantyczny, ponieważ nie można o nim orzec prawdziwie, że jest długi. Inny przykład: Wyraz „czasownik" jest orzecznikiem heterosemantycznym, ponieważ wyraz ten nie jest czasownikiem, a więc nie orzeka się o sobie samym (inaczej niż np. wyraz „rzeczownik").

T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

orzecznik uniwersalny. Wyrażenie, które orzeka się prawdziwie o wszystkich przedmiotach rozważanej dziedziny, np. wyrażenie „liczba naturalna" odnoszone do dziedziny liczb naturalnych.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

orzecznik zerowy. Orzecznik, który nie da się orzec prawdziwie o żadnym przedmiocie. Takimi są orzeczniki wewnętrznie sprzeczne, np. „zielony i niezielony", „żonaty kawaler" itp.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

oznaczanie. (1) Stosunek nazwy do desygnatów; nazwa oznacza każdy ze swych desygnatów, czyli każdy przedmiot, o którym można tę nazwę – przy danym jej znaczeniu – zgodnie z prawdą orzec. Np. słowo „żołnierz" oznacza każdego z żołnierzy, słowo „niebieski" oznacza każdy przedmiot niebieski, itp. Zamiast „oznaczanie" (1) mówi się też „desygnowanie". Oznaczanie jest funkcją wszystkich nazw z wyjątkiem *nazw pustych; przy pewnym założeniu również z wyjątkiem *nazw indywidualnych, którym przypisuje się wówczas – w miejsce oznaczania funkcję *nazywania.
(2) Jakiekolwiek odnoszenie się znaku do rzeczywistości, której ten znak dotyczy. Termin „oznaczanie", tak rozumiany, odpowiada angielskiemu terminowi „reference", dla którego nie ma poza tym odpowiednika w polskiej terminologii semantycznej (jeśli nie brać pod uwagę potocznych wyrażeń, takich jak „odnosić się" lub „dotyczyć").

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

oznaka (symptom, objaw, wskaźnik). Rzecz (zjawisko) x jest oznaką rzeczy (zjawiska) y, gdy z obecności x można wnosić o obecności y, przy czym związek zachodzący między x i y jest więzią naturalną, a nie konwencjonalną. W przypadku więzi konwencjonalnej, tj. ustanowionej w drodze umowy, mówi się (najczęściej), że x jest znakiem y. Przykłady: dym jako oznaka ognia, pewien rodzaj ruchów ciała jako oznaka gniewu, gorączka jako oznaka choroby.
Zob. też **znak.**

A. Schaff: *Wstęp do semantyki*. 1960; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

para uporządkowana. Układ dwóch przedmiotów, których kolejność jest ustalona. Parę uporządkowaną, której pierwszym elementem jest x a drugim y, oznacza się symbolicznie: $\langle x, y\rangle$. W odróżnieniu od *zbioru dwuelementowego złożonego z przedmiotów x i y (zwanego parą nieuporządkowaną i oznaczanego symbolem $\{x, y\}$), dla którego zachodzi równość: $\{x, y\} = \{y, x\}$, parę uporządkowaną obowiązuje wzór: $x \neq y \rightarrow \langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$. Ogólniej: $\wedge x \wedge y \wedge u \wedge v[\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \equiv (x = u \wedge v = v)]$.

Parę uporządkowaną można zdefiniować za pomocą pary nieuporządkowanej, np.: $\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}$ bądź: $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$; natomiast za pomocą pary uporządkowanej można określić trójkę uporządkowaną: $\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$, za pomocą trójki uporządkowanej – czwórkę uporządkowaną itd.

Zbiory par uporządkowanych przedmiotów należących do pewnego zbioru identyfikuje się z relacjami dwuczłonowymi (*Teoria relacji) określonymi w tym zbiorze; zbiory trójek uporządkowanych – z relacjami trójczłonowymi itd.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

paradoks implikacji. Mianem tym określa się (używając terminu „paradoks" w nader szerokim sensie) kwestię wzajemnego stosunku między znaczeniem funktora *implikacji w *klasycznym rachunku zdań (k.r.z.) a znaczeniem spójników, za pomocą których w językach naturalnych tworzy się okresy warunkowe (polskie „jeżeli..., to", angielskie „if... then" itd.).

Uznając, że k.r.z. adekwatnie opisuje związki wynikania zachodzące między zdaniami języka polskiego i czytając funktor implikacji słowami „jeżeli..., to", przyjmuje się, że wyrażenia te są równoznaczne. Tymczasem liczne przykłady zdają się temu przeczyć, a ich wstępna analiza podsuwa następujące rozwiązanie problemu. Funktor implikacji tworzy – na mocy odpowiadającej mu tabeli prawdziwościowej – zdanie złożone, które jest fałszem tylko wtedy, gdy jego poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy; przy pozostałych trzech układach wartości logicznych swych członów jest ono prawdziwe. Natomiast prawdziwość okresów warunkowych w języku naturalnym zależy także od innych warunków. Wszak uznajemy w zwykłym języku np. zdanie (1) „Jeżeli Arystoteles był uczniem Platona, to Platon miał wybitnych uczniów", nie jesteśmy natomiast skłonni uznać zdania (2) „Jeżeli Cezar stał nad brzegiem Rubikonu, to Sokrates wypił cykutę", mimo że wartość logiczna zdań składowych jest w przypadku (1) i (2) taka sama (wszystkie one są prawdziwe). Tym, co różni te zdania, jest fakt, iż między członami zdania (1) zachodzi pewien związek treściowy, podczas gdy człony zdania (2) są treściowo nie powiązane. Otóż właśnie związek treściowy między poprzednikiem i następnikiem jest tym, co warunkuje prawdziwość okresu warunkowego, stanowiąc tym samym o różnicy między potocznym „jeżeli..., to" a funktorem implikacji w logice.

By jednak pogląd ten zasługiwał na miano rozwiązania problemu, pojęcie związku treściowego, który musi zachodzić między członami prawdziwego okresu warunkowego, trzeba zdefiniować. Póki bowiem nie dysponuje się adekwatnym i efektywnym kryterium zachodzenia takiego związku między dwoma zdaniami, póty znaczenie spójników tworzących okresy warunkowe w języku naturalnym pozostaje nieuchwytne, a ich stosunek do funktora implikacji w k.r.l. nie wyjaśniony. Tymczasem wszystkie proponowane definicje tego pojęcia budzą zastrzeżenia. Tak np. definicja, w myśl której okres warunkowy jest prawdziwy tylko wtedy, gdy jego następnik wynika (logicznie lub entymematycznie – na gruncie pewnych powszechnie znanych prawd, w szczególności twierdzeń ogólnych) z poprzednika, jest wyraźnie za wąska: obejmuje wprawdzie zdanie (1), jeśli uwzględni się (jako „przemilczane") zdanie „Arystoteles był kimś wybitnym", a także takie zdania, jak „Jeśli ta kostka cukru zostanie włożona do wody, to się rozpuści" (jako zagwarantowane przez prawdziwość zdania ogólnego „Każdy kawałek cukru włożony do wody rozpuszcza się"), lecz nie wyjaśnia np. akceptowalności zdania „Jeżeli będzie pogoda, to pójdę na spacer" itp. Brak jednolitego kryterium prawdziwości potocznego okresu warunkowego jest podstawą dość powszechnego przekonania, iż spójnik „jeżeli..., to" (i jego odpowiedniki w innych językach naturalnych) jest wieloznaczny: jedno z jego znaczeń eksplikuje wspomniana wyżej definicja (formułowana też w postaci: „Jeżeli a, to b" jest prawdziwe wtedy, gdy nie jest możliwe, by zaszło a, a nie zaszło b); w logice analogiczne własności posiada tzw. implikacja ścisła, nie zaś implikacja rozważana w k.r.l. (zwana dla odróżnienia implikacją materialną). Teorię implikacji ścisłej rozwinięto w *logice modalnej.

Słabą stroną tego stanowiska jest brak eksplikacji pozostałych znaczeń spójnika „jeżeli..., to" (o ile nie przyjmuje się, że oprócz wyżej scharakteryzowanego spójnik ten może mieć już tylko znaczenie implikacji materialnej). Toteż niektórzy filozofowie języka szukają rozwiązania

paradoksu implikacji na innej drodze.

Wspólnym założeniem tych poszukiwań jest pogląd, iż warunki prawdziwości okresu warunkowego w języku naturalnym są takie same, jak warunki prawdziwości implikacji materialnej; źródłem złudnego wrażenia ich odmienności są pragmatyczne, nie zaś semantyczne własności swoiste języka naturalnego. Wedle Ajdukiewicza, na przykład, zdania takie jak (2) uznajemy za prawdziwe również na gruncie języka naturalnego, a tylko nie jesteśmy skłonni ich wypowiadać jako wyrazu naszych przekonań. Opory te płyną nie z niechęci do wypowiadania zdań fałszywych, lecz z niechęci do niewłaściwego użycia okresu warunkowego, do wyrażania za jego pomocą stanu psychicznego, którego się nie przeżywa. Okres warunkowy wyraża bowiem stan polegający na nieznajomości wartości logicznej jego członów, a nadto gotowość wywnioskowania następnika z poprzednika; jeśli któryś z tych warunków nie jest spełniony, okres warunkowy jest niewłaściwie użyty i dlatego nieakceptowalny mimo że prawdziwy.

K. Ajdukiewicz: *Okres warunkowy a implikacja materialna.* [W:] *JiP.* T. 2; Z. Czerwiński: *O paradoksie implikacji.* „St. Log." VII 1958; J. Kotarbińska: *Spór o granice stosowalności metod logicznych.* „St. Filoz." 1964 nr 3.

B. S.

paralogizm.

(1) Rozumowanie niepoprawne.

(2) Rozumowanie niepoprawne, w którym błąd popełniono nieświadomie. Termin ten odnosi się przede wszystkim do błędnych sylogizmów, np. do sylogizmów zawierających quaternio terminorum, tj. dwuznaczność jednego z trzech terminów sylogizmu, mianowicie terminu średniego, sprawiająca występowanie czterech znaczeń. Od tak pojętego paralogizmu odróżnia się *sofizmat: błąd rozumowania popełniony świadomie, np. dla wprowadzenia kogoś w błąd.

M. P.

Peano Giuseppe (1858–1932). Włoski matematyk i logik, autor projektu języka międzynarodowego pod nazwą interlingua. Wykładowca matematyki w Akademii Wojskowej w Turynie (1887–1901); profesor matematyki uniw. w Turynie (1890–1932). Peano wszedł do historii logiki jako twórca rozpowszechnionej notacji logicznej (*Symbolika Peano-Russella) i jako autor zaksjomatyzowanego systemu *arytmetyki.

W. M.

Peirce Charles Sanders (1839–1914; USA). Studiował matematykę, filozofię i przyrodoznawstwo w Harvard Univ. (1855–1859), oraz chemię do 1863. Wykładał filozofię nauki w Harvard Univ. (1864–1865, 1869–1870) i logikę w uniw. Johna Hopkinsa (1879–1884); dał ponadto cykl wykładów w Baltimore, Cambridge (Mass.) i w Bostonie. Wyższego stanowiska uniwersyteckiego nigdy nie zajmował. W 1887 wycofał się całkowicie z życia uniwersyteckiego.

Wkład Peirce'a do logiki formalnej pozostawał przez długi czas w zapomnieniu. Obecnie zwraca się uwagę na jego dorobek w *teorii relacji na wprowadzenie przezeń pojęcia *kwantyfikatora (niezależnie od Fregego). Idee semiotyczne i metodologiczne Peirce'a wpłynęły, za pośrednictwem innych autorów, na ukształtowanie się pojęcia *semiotyki jako ogólnej teorii znaku oraz na powstanie *operacjonizmu, który przejął pewne myśli z filozofii Peirce'a, nazwanej przez niego pragmatyzmem.

W. M.

petitio principii (łac.; bezpodstawność, dosł.; żądanie podstawy).

(1) Błąd rozumowania polegający na przyjęciu jakichś przesłanek bez należytego uzasadnienia stopnia pewności, z jakim się te przesłanki uznaje (zob. Ajdukiewicz).

(2) Błąd polegający na przyjęciu za przesłankę tego, co ma być dopiero wywnioskowane w danym rozumowaniu. Przy takim rozumieniu petitio principii utożsamia się z *błędnym kołem w rozumowaniu (zob. Ziembiński).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; S. Łuszczewska-Romahnowa: *Z teorii racjonalnej dyskusji.* [W:] *Rozpr. log.*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

pewnik. Termin używany w dwu znaczeniach:

(1) *Aksjomat, czyli twierdzenie pierwotne, tj. przyjęte do systemu dedukcyjnego bez dowodu, np. w zwrotach „pewnik wyboru", „pewnik nieskończoności".

(2) Zdanie oczywiste, np. uznane na mocy znaczenia występujących w nim wyrazów (np. „Każdy trójkąt ma trzy boki").

K. Ajdukiewicz: *Logika a doświadczenie.* [W:] *LTN* oraz [W:] *JiP.* T. 2; T. Czeżowski: *Logika.* 1949.

M. P.

pewnik wyboru (aksjomat wyboru). Z niepustej rodziny R zbiorów X niepustych i parami rozłącznych da się wybrać zbiór reprezentantów Y mający z każdym zbiorem $X \in R$ dokładnie jeden element wspólny. Symbolicznie ($Z(X)$ czytamy: X jest zbiorem):

$$Z(R) \wedge R \neq 0 \wedge \wedge X \in R(Z(X) \wedge X \neq 0) \wedge \wedge P \in R \wedge Q \in R$$
$$(P \neq Q \rightarrow P \cap Q = 0) \rightarrow \vee Y \wedge X \in R[Z(Y) \wedge \vee x(x \in X \cap Y)$$
$$\wedge \wedge x_1 \wedge x_2(x_1 \in X \cap Y \wedge x_2 \in X \cap Y \rightarrow x_1 = x_2)].$$

Pewnik ten nie podaje efektywnego sposobu konstrukcji zbioru reprezentantów, a tylko stwierdza jego istnienie, co budzi kontrowersje. Ostrożność przy posługiwaniu się tym pewnikiem powodowana jest także tym, że prowadzi on do nieintuicyjnych konsekwencji (wśród nich bardziej

znane jest twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli).

K. Cz.

Poczynając od lat 60-tych, daje się zauważyć zanikanie powyższego poglądu na pewnik wyboru. Pewnik wyboru jest równoważny, na gruncie pozostałych aksjomatów *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema, wielu ważnym zdaniom matematycznym, na przykład:
zasada maksimum Hausdorffa-Kuratowskiego-Zorna;
zasada dobrego uporządkowania Zermeli;
twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni topologicznych; aksjomat multyplikatywny Russella.
W sprawie dowodów tych i innych równoważności – zob. Jech 1973, Mendelson 1979.
Pewnik wyboru jest niezależny od pozostałych aksjomatów teorii mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema (Cohen 1963).

J. P. Cohen: *Independence of the axiom of choice*. 1963; T. J. Jech: *The axiom of choice*. 1973; E. Mendelson: *Introduction to mathematical logic*. 1979; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

pierwsze zasady (najwyższe prawa myślenia). W logice tradycyjnej nazywano tak twierdzenia logiczne, o których sądzono mylnie, że:
1° są najbardziej oczywiste z wszystkich twierdzeń logiki,
2° nie dają się wywnioskować z innych twierdzeń,
3° stanowią ostateczne uzasadnienie wszystkich twierdzeń logicznych, są więc (jak byśmy dzisiaj powiedzieli) *aksjomatami logiki.
Najczęściej do pierwszych zasad zaliczano trzy następujące prawa logiki:
Prawo tożsamości: $p \rightarrow p$,
Prawo (nie) sprzeczności: $\sim (p \wedge \sim p)$. Mówi ono, że dwa zdania sprzeczne nie mogą być zarazem prawdziwe.
Prawo wyłączonego środka: $p \vee \sim p$. Stwierdza ono, że z dwóch zdań sprzecznych oba nie mogą być zarazem fałszywe.
Są to najbardziej znane postacie tych praw, sformułowane w symbolice *rachunku zdań. Oprócz wymienionych do pierwszych zasad zaliczano niekiedy również zasadę 'dictum de omni et de nullo' i zasadę racji dostatecznej. Zasada 'dictum de omni et de nullo' (łac. powiedzenie o wszystkich i o żadnym) ma następującą treść: cokolwiek ma walor w zastosowaniu do każdego, ma walor również w zastosowaniu do niektórych i do poszczególnych; cokolwiek nie ma waloru w zastosowaniu do żadnego, nie ma również waloru ani w zastosowaniu do niektórych, ani w zastosowaniu do poszczególnych. Odpowiednikiem 'dictum de omni' jest prawo *rachunku kwantyfikatorów: $\wedge x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$. Zasada racji dostatecznej ma sens metodologiczny. Jest to postulat krytycyzmu domagający się uzasadnienia dla wszystkich przekonań.
Współczesne badania nad *systemami dedukcyjnymi wykazały, że twierdzenia logiczne zaliczane tradycyjnie do tzw. pierwszych zasad nie muszą pełnić roli aksjomatów. Prawa tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka są twierdzeniami, które wyprowadza się zazwyczaj z aksjomatów w wyniku wielu kroków dowodowych.
Pierwsze zasady bywały rozumiane nie tylko w sensie logicznym, ale również w sensie ontologicznym jako najogólniejsze twierdzenia o rzeczywistości oraz w sensie psychologicznym jako twierdzenia o procesach myślenia.

Ajdukiewicz: *Zarys*; M. S. Babajanc: *Zakon iskljucennogo trietiego*. 1962; A. Korcik: *O tak zwanych naczelnych prawach rozumowania i zależnościach między nimi*. „Rocz. Filoz." V. 1957 z. 22; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. 1910; J. Salamucha: *Pojęcie dedukcji u Arystotelesa i św. Tomasza z Akwinu*. 1930; A. W. Sawinow: *Łogiczeskije zakony myszlenija*. 1958.

M. P.

platonizm. Kierunek filozoficzny, współcześnie rozciągający się także na filozofię matematyki, powiązany z problematyką metodologiczną i semantyczną przez problem interpretowania *nazw abstrakcyjnych, takich jak nazwy cech, stosunków, klas, liczb etc. Wedle platonizmu cechom, klasom etc. przysługuje rzeczywiste istnienie, analogiczne do tego, jakie Platon przypisywał bytom zwanym przez niego ideami. Platonizmowi przeciwstawia się radykalnie *nominalizm, stanowisko pośrednie zajmuje *konceptualizm.

Küng: *Ontology*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

podstawy matematyki i logiki. Nauka zajmująca się naukami formalno-dedukcyjnymi, czyli apriorycznymi, głównie matematyką i logiką. Współczesne podstawy matematyki obejmują tzw. filozofię matematyki.
Według powszechnej opinii matematyka spośród innych nauk wyróżnia się pewnością i niepowątpiewalnością swych twierdzeń, oczywistością elementarnych pojęć i zasad, ich abstrakcyjnym i apriorycznym charakterem, wielką systematycznością i rygorystycznością w budowie teorii matematycznych oraz formalnym charakterem rozważań. Podstawy matematyki poświęcone są analizie wymienionych wyżej stwierdzeń, ich krytyce, badaniu, w jakiej mierze przeświadczenia te są zasadne. Tak więc podstawy matematyki są ogólną refleksją nad matematyką. Badania w podstawach matematyki oparte są na opisie i analizie praktyki matematycznej, czyli na opisie zwykłej (resp. informalnej, czy intuicyjnej) matematyki. Dokonują się one poprzez wydzielenie pewnych pojęć, zasad i metod jako „podstawowych" wraz z ich systematyczną analizą oraz badaniem stosunku innych tworów matematycznych do obiektów podstawowych. Selekcja ta ani nie jest arbitralna, ani niezmienna; sama będąc wynikiem

badań podstawowych może ulec zmianie w trakcie dalszych badań.

1. Podstawy matematyki a filozofia i logika. Stosunki między filozofią a matematyką są wielorakie i skomplikowane. Odróżnijmy dwa rodzaje problemów filozoficznych związanych z matematyką: problemy zainspirowane praktyką matematyczną (np. problem wiedzy a priori) oraz zagadnienia z zakresu matematyki czy podstaw matematyki, które albo same są typowymi problemami filozoficznymi, albo z takimi zagadnieniami są blisko związane (np. problem istnienia przedmiotów matematycznych jako uszczegółowienie filozoficznej kwestii istnienia obiektów abstrakcyjnych, czy wspólne dla obu dziedzin zagadnienie nieskończoności). Z zagadnień tych jako stricte filozoficzne wydzielmy te problemy, których badanie wymaga kompetencji filozoficznych. Filozofia niejednokrotnie odgrywała względem matematyki rolę inspirującą – wiele problemów matematycznych (m. in. niektóre z klasycznych zagadnień teorii mnogości) przejętych zostało z terenu filozofii.

Ważną dla podstaw matematyki sprawą jest kwestia, czy i w jakiej mierze filozofia jest niezbędna, względnie przydatna dla ugruntowania matematyki, tj. dla oparcia matematyki bądź metamatematyki na solidnym, pierwotnym w stosunku do matematyki fundamencie oraz dla usprawiedliwienia przyjmowanych w praktyce matematycznej aksjomatów i zasad. W kwestii tej spotykamy całą gamę stanowisk; od poglądu fenomenologów głoszącego konieczność oparcia matematyki na pierwotnych w stosunku do rozważań formalnych badaniach treściowych (materialnych) do poglądu intuicjonistów, że filozofia ani nie jest przydatna do ugruntowania matematyki, ani do jej rozumienia, ponieważ jest ona dziedziną bardziej skomplikowaną i pojęciowo wyrafinowaną niż matematyka.

Rozgraniczenie matematyki i logiki jest rzeczą niełatwą, zależy ono od akceptowanego określenia logiki. Matematyka jest nauką dedukcyjną, czyli nauką posługującą się wnioskowaniami dedukcyjnymi jako metodą pośredniego uzasadniania swych stwierdzeń. Ponieważ logika, w każdym ze znaczeń słowa, obejmuje teorię takich wnioskowań, więc rozważania logiczne stanowią istotną komponentę rozważań metodologicznych wchodzących w skład tzw. metamatematyki, czyli nauki o matematyce uprawianej środkami matematycznymi. Jednakże o wiele ważniejszym pytaniem jest kwestia stosunku matematyki do logiki rozważana z epistemiczno-metodologicznego punktu widzenia. W sprawie tej występują wszystkie teoretycznie możliwe stanowiska. M. in. *logicyzm twierdzi, że matematyka jest redukowalna do logiki, z oparcia na logice czerpiąc pewność i apodyktyczność wyników swych rozważań. *Formalizm wyróżniał logikę z powodów metodologicznych, widząc w niej teorię dowodów sformalizowanych, a teorie matematyczne pojmując jako sformalizowane teorie aksjomatyczne. W końcu, *intuicjonizm stwierdzał nieprzydatność logiki do usprawiedliwienia matematyki oraz jej wtórność względem praktyki matematycznej: logika jest skomplikowaną teorią matematyki stosowanej i sama – o wiele bardziej niż matematyka – potrzebuje usprawiedliwienia.

Niezależnie od rozstrzygnięcia kwestii usytuowania logiki względem matematyki zgodzić się należy, iż zarówno z uwagi na swe metody, jak i z uwagi na wysoce abstrakcyjny charakter rozważań logika jest nauką najbliższą matematyce tworząc wraz z nią i z niektórymi innymi naukami (np. cybernetyką) grupę nauk formalno-dedukcyjnych. Refleksja nad logiką dostarcza analogicznych problemów filozoficznych i metodologicznych jak badanie matematyki, a stanowiska w zakresie podstaw matematyki zwykle są nierozdzielne od poglądów z podstaw logiki, stąd obie te dziedziny rozwijane są łącznie.

2. Podstawy matematyki a rozwój matematyki. Matematyka, jak wszystkie nauki, ulega ciągłym zmianom. Zmiany te niekiedy mają dość gwałtowny charakter, przynosząc rewizję powszechnie akceptowanych poglądów i przełamanie ustalonych wzorców postępowania naukowego. W konsekwencji zmianie ulegają poglądy na matematykę samą, zmieniają się podstawy matematyki. Wielką podnietą do rozwoju badań z zakresu podstaw matematyki były płodne poznawczo sytuacje kryzysowe w matematyce, stawiające pod znakiem zapytania ustalone poglądy na zakres i istotę badań matematycznych, ustalone rozumienie podstawowych pojęć matematycznych. Kryzysy takie pojawiły się: w starożytności, po wprowadzeniu liczb niewymiernych prowadząc do zmiany pojęcia liczby; z końcem XVII w. po stworzeniu rachunku różniczkowego i całkowego w związku z użyciem w tym rachunku wielkości nieskończenie małych – kryzys ten rozwiązano dopiero w XIX w. (A. Cauchy, K. Weierstrass), opierając analizę na pojęciu zbieżności i pojęciu granicy, zaś źródła jego wyjaśniono dopiero w latach sześćdziesiątych XX w. (A. Robinson), rozwijając tzw. analizę niestandardową; w pierwszej połowie XIX w., gdy wprowadzono geometrie nieeuklidesowe, wywołana tym dyskusja doprowadziła do zmiany pojęcia geometrii (B. Riemann, F. Klein); z końcem XIX w. Kryzys pojawił się w wyniku odkrycia antynomii teoriomnogościowych.

Współczesna teoria podstaw matematyki powstała na przełomie XIX i XX w. Powstanie jej wiązało się z pojawieniem i szybkim rozwojem dwu teorii: matematycznej teorii mnogości, tj. ogólnej teorii zbiorów nieskończonych oraz logiki matematycznej (w terminologii tradycyjnej – logistyki).

Prekursorem teorii mnogości był B. Bolzano, zaś początek jej dał swymi pracami z lat 1872–1895 G. Cantor; w pierwszym etapie badań wielki wkład w rozwój teorii mnogości wniósł także R. Dedekind. Twórcami logiki

matematycznej byli A. de Morgan, G. Boole, Ch. Peirce, G. Peano, E. Schröder, a przede wszystkim G. Frege. Teoria mnogości szybko okazała się teorią mającą bardzo wiele zastosowań w innych teoriach matematycznych, od razu też dostrzeżono jej podstawową rolę w matematyce i oparto na niej całą matematykę, sprowadzając do niej inne teorie matematyczne, w szczególności arytmetykę liczb naturalnych (G. Frege). W ostatnich latach XIX w. odkryto w teorii mnogości szereg antynomii; odkrycie to z uwagi na fundamentalną rolę teorii mnogości zagroziło całej matematyce, paląca stała się wtedy kwestia przebudowania teorii mnogości tak, by nie stracić za wiele na jej ogólności, a zabezpieczyć się przed antynomiami. Zadanie to wykonano na różne sposoby, ale najczęściej w sposób dość arbitralny, co wywołało trwającą do dziś dyskusję nad tzw. podstawami teorii mnogości, tj. nad prawomocnością różnych sposobów ugruntowania teorii mnogości. Pojawienie się antynomii przyczyniło się zasadniczo do intensywnego rozwoju badań nad podstawami matematyki w XX w.

3. Ogólna charakterystyka współczesnych badań nad podstawami matematyki. Podstawy matematyki są dziedziną złożoną poddającą matematykę wieloaspektowej analizie. Z aspektów podstawowych wymieńmy: semantyczny, ontologiczny, epistemologiczny, metodologiczny, pragmatyczny, kulturowy, modalny i empiryczny. Abstrahując od stosunków wzajemnych między rozstrzygnięciami w poszczególnych kwestiach, tak znaczne spectrum uwzględnionych aspektów daje wielką ilość ewentualnych stanowisk w podstawach matematyki. O stanowisku takim decyduje rozkład akcentów i wzajemny układ tez.

Współczesne badania nad podstawami matematyki rozpadły się na dwa nurty: badania sensu stricto filozoficzne oraz badania prowadzone środkami czysto matematycznymi. Pozwala to wydzielić dwie składowe podstaw matematyki: filozofię matematyki oraz metamatematykę. Składowe te łatwo wyróżnić można w logicyzmie, formalizmie i intuicjonizmie – kierunkach dominujących w badaniach nad podstawami matematyki w pierwszej połowie XX w. Kierunki te w wyniku powolnej ewolucji dały początek trzem następującym orientacjom: teoriomnogościowej, metamatematycznej i konstruktywistycznej, współcześnie wiodącymi prym w badaniach nad podstawami matematyki.

Cechą charakterystyczną współczesnych badań nad podstawami matematyki jest daleko posunięta matematyzacja tych badań. Zapewniła ona istotny postęp w ustaleniu niektórych własności teorii matematycznych; rzuciła światło na rolę pojęć i metod abstrakcyjnych (resp. niekonkretnych, względnie nieefektywnych) spotykanych w teoriach zwykłej matematyki, oraz pozwoliła wyjaśnić status aksjomatów egzystencjalnych (wzgl. nieefektywnych, jak np. pewnika wyboru) w teorii mnogości. Ze względu na ich domniemaną antynomiorodczość aksjomaty te powszechnie kwestionowano w pierwszych czterdziestu latach XX w., a *aksjomat wyboru odrzucano dodatkowo ze względu na niektóre jego paradoksalne konsekwencje (m. in. paradoksalny rozkład kuli Hausdorffa-Banacha-Tarskiego). Część z tych obaw usunęły wyniki prac K. Gödla i P. Cohena i in. pokazując bezzasadność obaw przed przyjmowaniem w teorii mnogości zarówno aksjomatu wyboru, jak i szeregu aksjomatów podobnych. Rezultaty te w znacznej mierze rozwiązały jedną z kwestii najżywiej dyskutowanych w podstawach matematyki w pierwszej połowie XX w.

Pionierem rozwiązywania problemów podstaw matematyki środkami czysto matematycznymi był D. Hilbert. Rozwinął on metodę metamatematyczną badania podstawowych teorii matematyki klasycznej oraz zarysował program badawczy w zakresie podstaw matematyki zwany programem Hilberta (*Formalizm). Teorie matematyczne traktował Hilbert jako niezinterpretowane rachunki aksjomatyczno-formalne, skąd wyniknął postulat sformalizowania spotykanych w praktyce teorii matematycznych. W ramach tych prac sprecyzowano dokładnie pojęcia systemu aksjomatyczno-formalnego oraz metody aksjomatycznej, rozpoczęto też formalne badania pojęcia dowodu. Badania nad własnościami teorii sformalizowanych prowadzono w „treściowej" (niem. inhaltlich) metateorii zwanej metamatematyką. W badaniach tych dopuszczał Hilbert wyłącznie stosowanie metod quasi-kombinatorycznych, zwanych metodami finitystycznymi. Ograniczenie się do tych metod zapewnić miało eliminowalność z rozważań metamatematycznych pojęć i metod abstrakcyjnych, a w konsekwencji wykazać, że użycie ich w zwykłych teoriach matematycznych jest wyłącznie środkiem pomocniczym. Usiłowano szczególnie środkami czysto matematycznymi wykazać *niesprzeczność, *zupełność i *rozstrzygalność rozważanych teorii matematycznych.

Badania w tym kierunku prowadzono intensywnie aż do lat 30-tych naszego wieku. W 1931 r. K. Gödel ogłosił dwa ważne twierdzenia: o niezupełności teorii bogatszych, tj. teorii, w których interpretowalna jest arytmetyka liczb naturalnych oraz o niemożliwości absolutnych (w sensie Hilberta) dowodów niesprzeczności takich teorii. Wyniki te przekreśliły program Hilberta w jego oryginalnym sformułowaniu oraz podważyły możliwość wykazania niesprzeczności ciekawszych teorii aksjomatycznych środkami uboższymi niż rozważana teoria. Wnioskiem z pierwszego twierdzenia Gödla jest nieaksjomatyzowalność sposobem Hilberta (czyli tzw. metodą standardową) podstawowych dziedzin matematycznych, w tym także dziedziny liczb naturalnych. Fakt ten ukazuje granice metody aksjomatyczno-formalnej, znakomicie nadającej się do systematyzacji stwierdzeń z danej teorii, lecz nieprzydat-

nej do adekwatnego opisu badanej dziedziny przedmiotowej. W rezultacie odrzucono zacieśnienie metod metamatematycznych wyłącznie do metod finitystycznych oraz rozwinięto intensywne badania pojęcia dowodu. Uzyskano tą drogą szereg interesujących rezultatów, m. in. infinitystyczne dowody niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych (G. Gentzen, K. Gödel) oraz opis związków teorii dowodu z matematyką intuicjonistyczną (G. Kreisel, D. Prawitz, A. S. Troelstra etc.).

Równolegle prowadzono trwające aż do dzisiaj prace nad podstawami teorii mnogości, dyskutując różne proponowane sposoby ugruntowania tej podstawowej teorii matematycznej, tak aby zażegnać groźbę antynomii. Rozwinięto szczegółowo tzw. typikalną teorię mnogości (*Teoria typów), oraz aksjomatyczną teorię mnogości. Zaproponowano szereg wersji aksjomatyk teoriomnogościowych; badania nad charakterem i wzajemnym stosunkiem tych aksjomatyk nie są zakończone do dzisiaj. W szczególności na terenie aksjomatycznych systemów *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema oraz von Neumanna-Bernaysa-Gödla uzyskano dowody niezależności kontrowersyjnego pewnika wyboru od innych przyjmowanych zwykle aksjomatów, oraz dowód niezależności *hipotezy continuum (P. Cohen 1963).

Współczesne badania metamatematyczne charakteryzują się szczególnym wykorzystaniem metod i środków algebry abstrakcyjnej, teorii mnogości, teorii rekursji i teorii dowodu. Dzięki zastosowaniu tych metod osiągnięto znaczny postęp w dyskusji niektórych zagadnień z podstaw matematyki, niekiedy rozstrzygając pewne kwestie sporne. Owocność metamatematycznych metod badań (np. twierdzenia Gödla-Malcewa o pełności czy zasady zwartości) sprawdzono też stosując je bezpośrednio do badań w poszczególnych teoriach matematycznych.

4. Wybrane zagadnienia podstaw matematyki. Naczelnym problemem badań nad podstawami matematyki jest zagadnienie natury matematyki, czyli zagadnienie swoistości matematyki; staramy się tutaj scharakteryzować cechy istotne wyróżniające matematykę spośród innych nauk. Można to uczynić na różne sposoby, charakteryzując bądź przedmioty badane przez matematykę, bądź jej język, bądź specyficzną budowę teorii matematycznych, czy właściwe jej metody, bądź w aspekcie epistemologicznym – charakteryzując cechy swoiste poznania matematycznego; a także badając proces tworzenia matematyki poprzez opis „twórczego matematyka", względnie poprzez socjo-psychologiczną analizę matematyki; oraz rozważając specyfikę matematyki poprzez określenie jej miejsca w kulturze oraz jej stosunku do innych nauk.

Tak więc badania nad podstawami matematyki koncentrują się wokół wyliczonych niżej zagadnień:

A. Zagadnienie przedmiotu matematyki, przy czym dyskutuje się tutaj następujące, ściśle z sobą związane zagadnienia pochodne:

A1. problem natury obiektów badanych przez matematykę, czyli tzw. problem natury pojęć matematycznych. Pojęcia abstrakcyjne przeciwstawia się pojęciom konkretnym (finitystycznym), przy czym występują różne koncepcje pojęć konkretnych, oraz rozważa się kwestię eliminowalności pojęć abstrakcyjnych z matematyki (*Nominalizm, *Formalizm);

A2. problem sposobu istnienia obiektów matematycznych, czyli pytanie, jak istnieją obiekty matematyczne oraz czy istnieją one niezależnie od uprawiającego matematykę podmiotu. Problem ten rozważa się wraz z

A2a. kwestią kryteriów istnienia obiektów matematycznych. Najczęściej jako takie kryterium proponuje się niesprzeczność tych obiektów, bądź ich konstruowalność,

A2b. zagadnieniem genezy pojęć matematycznych. W kwestii tej nakładają się na siebie rozważania ontologiczne, historyczno-metodologiczne i psychologiczne. Opozycją podstawową jest opozycja kreatywizm-eksploratoryzm, czyli przeciwstawienia poglądu, że obiekty matematyczne są wytworem uprawiającego matematykę podmiotu poglądowi, że obiekty te są niezależne od poznającego podmiotu odkrywającego je w trakcie badań; oraz

A2c. ważnym zagadnieniem szczegółowym tzw. nieskończoności aktualnej i nieskończoności potencjalnej.

B. Zagadnienie typu poznania matematycznego. Rozważa się tutaj następujące zagadnienia pochodne:

B1. problem charakteru sądów matematycznych;

B2. problem charakteru poznania apriorycznego;

B3. zagadnienia komponent poznania matematycznego; czyli zagadnienie poznania bezpośredniego (intuicji, bądź oczywistości matematycznej), poznania pośredniego (dedukcyjnego) oraz kwestię eksperymentów matematycznych (myślowych, bądź z pomocą narzędzi, np. maszyn matematycznych) wraz z zagadnieniem stosunku wzajemnego wyliczonych komponent oraz ich wagi wzajemnej w praktyce matematycznej;

B4. problem wartości wyników uzyskiwanych w matematyce, z przeciwstawieniem podstawowym: hipotetyzm versus apodyktyzm; czyli przeciwstawienia poglądu, że twierdzenia matematyczne będąc konsekwencjami pewnych założeń są tylko warunkowo prawdziwe, przy czym gwarancji ich prawdziwości dostarcza presuponowana logika poglądowi, że twierdzenia matematyczne są niepodważalne i bezwarunkowo prawdziwe (*Logicyzm).

C. Kwestia analizy podmiotu uprawiającego matematykę, z biegunami: analizą czysto epistemologiczną, analizą logiczno-heurystyczną oraz analizą psychologiczną. Z problemem tym, jak i z **A2**, związane jest

D. Zagadnienie granic poznania matematycznego wraz z analizą modalnego i empirycznego aspektu matematyki – zasad akceptacji pojęć matematycznych jako możli-

wych, a aksjomatów jako niesprzecznych.

E. Zagadnienie środków poznania matematycznego, w tym

E1. zagadnienie metod stosowanych w matematyce oraz kwestia prawomocności tych metod;

E2. kluczowa dla podstaw matematyki kwestia natury dowodów matematycznych oraz sposobów odróżniania dowodów poprawnych od błędnych;

E3. problem zasięgu metody aksjomatyczno-dedukcyjnej w matematyce oraz zakresu programu formalizacji teorii matematycznych; oraz szczegółowe

E4. zagadnienia rozstrzygalności problemów, bądź teorii matematycznych.

F. Zagadnienie systematyzacji matematyki, czyli kwestia znalezienia merytorycznego uporządkowania dyscyplin i teorii matematycznych, planu według którego możliwe byłoby rozwinięcie matematyki jako jednolitej budowli. Z kwestią tą blisko związany jest

G. Problem zasady unifikacji teorii matematycznych, tj. kwestia kryteriów zaliczenia pewnej teorii „matematycznej" do matematyki.

H. Podstawowy problem metamatematyki — selekcji ważnych zasad i własności metamatematycznych oraz ich systematycznej analizy.

I. Kwestia sposobów i kryteriów akceptacji wyników matematycznych oraz zasad ustalania standardów takiej akceptacji.

J. Blisko związane z **B3** oraz **D** centralne zagadnienie filozofii matematyki: zasad generujących nowe aksjomaty, pojęcia i metody matematyczne wraz z zagadnieniem ich motywacji oraz usprawiedliwienia.

K. Problem dynamiki rozwoju matematyki, zasad tego rozwoju.

L. Kwestia miejsca matematyki w świecie kultury, oraz

M. Zagadnienie stosunku matematyki do innych nauk, wraz z ważną kwestią szczegółową

M1. zastosowań matematyki oraz stosunku tzw. matematyki czystej do stosowanej.

Powyższa lista zagadnień rozważanych w badaniach nad podstawami matematyki z pewnością jest niepełna. Zostały tu jednak wyliczone problemy najważniejsze i najczęściej dyskutowane w podstawach matematyki. Widać też, że wiele z wyliczonych powyżej zagadnień jest zależnych od siebie w tym sensie, iż zajęcie stanowiska w jednej kwestii pociąga za sobą określoną odpowiedź na inne zagadnienia.

5. Wybrane zagadnienia filozofii logiki. Większość z wyliczonych wyżej zagadnień podstaw matematyki to także, mutatis mutandis, problemy podstaw logiki. Będąc z uwagi na metody badań oraz uzasadniania twierdzeń nauką najbliższą matematyce, logika wyraźnie różni się od niej swym przedmiotem. Logika jest teorią wnioskowań. W podstawach logiki pojawiają się więc pewne problemy specyficzne, niektóre z nich wyliczone zostaną niżej.

Podstawy logiki, tak jak i podstawy matematyki, dzielą się na filozofię logiki — poświęconą badaniu problemów filozoficznych pojawiających się w trakcie rozważań logicznych, oraz metalogikę — czyli badanie formalnych własności systemów logicznych. W poniższym zestawieniu uwzględniono jedynie wybrane problemy filozofii logiki.

O ile centralnym problemem logiki jest kwestia wyodrębnienia poprawnych wnioskowań, znalezienia kryteriów pozwalających odróżnić wnioskowania poprawne od błędnych, to centralnym zagadnieniem filozofii logiki jest

N. pytanie o źródło prawomocności poprawnych wnioskowań. Pytanie to stawiane jest w kontekście analizy stosunku logiki do teorii języka (filozofii języka, resp. gramatyki filozoficznej), teorii umysłu, teorii mózgu, teorii sztucznej inteligencji oraz teorii prawdy. Prowadzi ono, między innymi, do dwu poniższych zagadnień:

O. zagadnienia prawdziwości odpowiednio — zdań, wnioskowań, teorii. Problem ten związany jest z

P. fundamentalnym problemem teorii znaczenia, czyli z analizą relacji: nadawca komunikatu — kontekst — informacja (zdanie) — stwierdzenie — sąd logiczny — odbiorca komunikatu, oraz zdanie — sąd logiczny — interpretacja — sytuacja — fakt.

Osobnym, blisko z **N** związanym zagadnieniem, jest

R. kwestia stosunku logiki do dziedzin pokrewnych: filozofii, matematyki (w szczególności teorii mnogości oraz algebry), metodologii ogólnej i szczegółowej, teorii języka (w tym gramatyki i lingwistyki teoretycznej), teorii umysłu, teorii mózgu, erystyki i retoryki. Stosunek logiki do erystyki i retoryki związany jest z

R1. kwestią relacji między rozumowaniem, argumentacją, wnioskowaniem i wynikaniem.

Ważna grupa zagadnień pojawia się w związku z pytaniami: Co to jest logika? oraz Czy jest tylko jedna logika, czy jest ich wiele? Pytania te prowadzą do

S. problemu definicji logiki, sprawy kryteriów zaliczenia pewnego systemu formalnego do klasy rachunków logicznych, a także do kwestii zmienności bądź stałości logiki; oraz do

T. problemu klasyfikacji logik i zagadnienia stosunków wzajemnych różnych klas logik.

Z licznych kwestii pojawiających się w rezultacie wyróżnienia trzech aspektów badań logicznych: syntaktycznego, semantycznego i pragmatycznego wspomnijmy jedynie o

U. zagadnieniu interpretacji semantyki, np. kwestii filozofii możliwych światów w związku z semantyką relacyjną; wraz z powiązanym z **P**

W. problemem wzorców (zasad) analizy semantycznej (np. zasada ekstensjonalności Fregego-Wittgensteina) oraz kwestiami wynikającymi z rozróżnienia zwrotów eks-

tensjonalnych i zwrotów intensjonalnych.

Z pewnością na każdej liście problemów filozofii logiki winny znaleźć się też

X. Filozoficzne problemy błędów logicznych, paradoksów oraz antynomii;

Y. Problemy gramatyki logicznej, wydzielenia kategorii syntaktycznych, w szczególności różnic między zdaniem a nazwą; oraz

Z. Problemy formalizacji funktorów (zwrotów) języka potocznego, kwestia doboru oraz interpretacji stałych logicznych; pytania związane z teoriami kwantyfikatorów, operatorów deskrypcji, modalności, itp.

6. Przegląd stanowisk w filozofii matematyki. Scharakteryzujemy teraz wybrane stanowiska w filozofii matematyki, będącej dziedziną bogatą i złożoną o długiej tradycji, idącej od klasycznej filozofii greckiej. W drugiej połowie XIX w. nastąpiło tak znaczne ożywienie prac w zakresie filozofii matematyki, że można ją podzielić na tradycyjną filozofię matematyki (przed-Fregowską) oraz filozofię matematyki nowoczesną (po-Fregowską). Prezentacja stanowisk w filozofii matematyki jest zadaniem trudnym, nieraz niełatwo uchwycić istotną różnicę między poszczególnymi stanowiskami, które z uwagi na wieloaspektowość oraz wieloproblemowość badań nad podstawami matematyki są stanowiskami złożonymi. Ich układ tez jest pochodną układu rozpatrywanych problemów oraz aspektów uwzględnionych w danej koncepcji, w części wyznaczonych przez te problemy. Dlatego stanowiska w filozofii matematyki łatwiej referować biorąc pod uwagę pewien wybrany ważny problem, niż opisywać je z osobna, w całej ich złożoności.

Platon. Jądrem filozofii Platona było odróżnienie tego, co jest — bytu, od tego, co jawi się jako będące — fenomenu. Rzeczywiście istnieją tylko idee (wzgl. formy), które są niezmienne, pozaczasowe i niezależne od ludzkiego poznania. Idee poznajemy dwoma sposobami: pośrednio — poprzez zniekształcające je zjawiska, a także przez rozumowania, w których zjawiska poddajemy analizie i spekulujemy na temat tego, co jest; oraz bezpośrednio — w obcowaniu intelektualnym, którego szczytowym stadium, osiągalnym tylko w drodze usilnej pracy myślowej, jest intuicja intelektualna. Platon przypisywał umysłowi aktywną rolę w poznaniu. Sądził, że aktywność ta prowadzi do odkrycia tego, jakim jest świat, jednakże niezbyt liczył się z możliwością tworzenia przez umysł fikcji, złudzeń, iluzji. Intelektualizm Platona podkreślał odkrywczą (eksploratywną) rolę podmiotu poznającego, a zaniedbywał jego rolę twórczą. Ideami, wg Platona, m. in. są dobro, piękno i inne wartości, a także obiekty matematyczne, w szczególności liczby naturalne i liczby wymierne (proporcje) oraz obiekty geometryczne — punkty, linie, okręgi, itp.

Poglądy Platona motywowane były różnymi względami, wśród których jednym z najistotniejszych było pytanie o naturę matematyki oraz kwestia, dlaczego matematyka — nauka rozwijana drogą czysto rozumową — stosuje się do świata realnego. Odpowiedzią była teoria głosząca, że natura świata jest pozazjawiskowa, dostępna tylko poznaniu racjonelnemu — jest nią świat idei. Twierdzenia matematyczne są pewne i niezmienne, bo opisują one pozaczasowe relacje między idealnymi, a więc niezmiennymi obiektami. Matematyka jest opisem świata rzeczywistego, świata platońskich idei. Nie jest ona wynikiem idealizacji (procesu abstrakcji). Twierdzenia matematyczne prawdziwości swej nie czerpią z prawdziwości swych konkretnych, uogólnianych przypadków, lecz na odwrót, prawdziwość konkretyzacji twierdzeń matematycznych wynika z prawdziwości tych twierdzeń poprzez partycypowanie w wyrażonej przez nie idei.

Arystoteles. Korzenie filozofii Arystotelesa tkwią w filozofii Platona — w akceptacji pewnych jej zasad, w wyjściu od tych samych problemów, w opozycji względem niektórych jej rozwiązań. Arystoteles odrzucił platoński podział na rzeczywisty świat idei i ułudny świat zjawisk, wyróżniając w obiektach świata realnego dwa komponenty: formę i materię. Arystoteles był kreatywistą umiarkowanym, umysłowi przypisywał twórczą rolę w poznaniu. Wskazał on na możność myślowego abstrahowania, uogólniania i idealizacji prowadzących do wydzielenia w obiektach ich składowych formalnych. Wytwory tych procesów, zdaniem Arystotelesa, nie istnieją niezależnie od obiektu, z którego zostały wydzielone, mogą jedynie być oddzielnie rozważane. Arystoteles przeciwstawiając się skrajnemu realizmowi pojęciowemu oraz eksploratyzmowi Platona zapoczątkował realizm umiarkowany oraz kreatywizm. Będąc rezultatem abstrakcji obiekty matematyczne istnieją tylko w przedmiotach realnych jako szczególnego rodzaju ich formy, wydzielone stanowią one rzeczywistość myślową, są zakorzenionymi w przedmiotach konkretnych wytworami twórczej pracy umysłu. Twierdzenia matematyczne mówią o formach i stosunkach formalnych wyabstrahowanych z konkretnych obiektów.

Arystoteles był twórcą logiki. W pismach jego znajdują się zaczątki logiczno-dedukcyjnej analizy matematyki prowadzącej do wzorca skodyfikowanego następnie w *Elementach* Euklidesa. Arystoteles odróżniał twierdzenia i teorie, nacisk kładł na te ostatnie. Zapoczątkował on metodologię matematyki, wyraźnie wskazał na dedukcyjny jej charakter, uzasadnienia obowiązujące ogólnie (logiczne) oddzielał od uzasadnień specyficznych, dostosowanych do rozważanej teorii. Twierdzenia odróżniał od definicji, traktując twierdzenia jako wyrażenia hipotetyczne, które są konieczne, ponieważ są prawdami logicznymi. Od Arystotelesa pochodzi też odróżnienie nieskończoności potencjalnej i nieskończoności aktualnej oraz pogląd, że z obiektów nieskończonych istnieją tylko obiekty

potencjalnie nieskończone.

Leibniz. Był nie tylko wielkim filozofem, twórcą wysoce oryginalnego systemu metafizycznego, lecz także znakomitym matematykiem, współodkrywcą rachunku różniczkowego i całkowego. W poglądach Leibniza współgrały z sobą elementy z obu tych dziedzin, nieraz trudno przesądzić, co odegrało rolę ważniejszą; np. czy znaczenie, jakie przykładał Leibniz do mechanicznego rachunku, było ideą filozoficzną, która inspirowała jego prace matematyczne, czy na odwrót, to praktyka matematyczna Leibniza inspirowała jego rozwiązania filozoficzne.

Leibniz stworzył dwa, raczej z sobą niezgodne, systemy filozoficzne. Teorie rozwinięte w pismach ogłoszonych przez samego Leibniza różniły się istotnie od poglądów z pism pośmiertnych, opublikowanych dopiero w XIX w. Zarówno w pismach wydanych za życia Leibniza, jak i w jego pismach pośmiertnych zawarte są nowe i głębokie idee z filozofii matematyki, które nie tyle antycypowały, ile zainspirowały logicystów (poprzez wczesne prace Russella i prace Couturata) oraz formalistów.

Leibniz wyróżniał dwa rodzaje prawd: rozumowe i faktyczne. Prawdy rozumowe są konieczne, a ich zaprzeczenie jest niemożliwe, zaś prawdy faktyczne są przypadkowe, a ich zaprzeczenie jest możliwe. Oba rodzaje prawd oparte są na pewnych prawdach pierwotnych: rozumowe – na zasadzie sprzeczności, a faktyczne – na wprowadzonej przez Leibniza zasadzie racji dostatecznej.

Stwierdzenia matematyczne są prawdziwe z tych samych względów, co sądy logiczne – są one prawdami rozumowymi, a więc ich zaprzeczenie jest niemożliwe. Oba rodzaje stwierdzeń są twierdzeniami logicznie koniecznymi, tzn. są one prawdziwe we wszystkich możliwych światach (resp. sytuacjach, względnie modelach). Istotnymi składowymi nowatorskiej koncepcji Leibniza było ścisłe powiązanie logiki z matematyką, łączne rozważanie wielu alternatywnych sytuacji oraz podkreślenie modalnego aspektu prawd rozumowych, a więc także twierdzeń logicznych i matematycznych.

Leibniz kładł także nacisk na analityczny, więc rachunkowy charakter rozumowań, a w szczególności rozważań dedukcyjnych. Dla reprezentacji myśli, stosunków między nimi oraz rozumowań projektował stworzenie czysto mechanicznego i symbolicznego rachunku – Calculus ratiocinator wyrażonego w uniwersalnym języku symbolicznym – *characteristica universalis. Idea ta silnie oddziałała na rozwój logiki matematycznej.

Poglądy Leibniza znacznie wyprzedziły swój czas. Zostały one podjęte dopiero z końcem XIX w. wpływając zasadniczo, przede wszystkim przez prace Russella i Wittgensteina, na współczesne kierunki w podstawach matematyki.

Kant. Kluczową rolę w rozwoju filozofii Kanta odegrało pytanie o naturę matematyki, o źródło prawomocności jej twierdzeń. Kwestii tej poświęcił Kant kilka prac wczesnych, z tzw. okresu przedkrytycznego, zajmuje ona też centralne miejsce w *Krytyce czystego rozumu*. Koncepcja Kanta jest nad wyraz oryginalnym połączeniem różnych, z pozoru przeciwstawnych, tez Platona, Arystotelesa, Leibniza oraz empirystów angielskich – Locke'a i Hume'a. Połączenie to osiągnął Kant z pomocą radykalnego zaakcentowania aktywnej roli rozumu w poznaniu, roli umożliwionej przez aprioryczne formy rozumu – formy naoczności i kategorie intelektu.

Kant odrzucał wspólny racjonalistom (Leibniz) i empirystom (Hume) podział sądów na analityczne, czyli konieczne i faktyczne, czyli przypadkowe. Sądy dzielił według dwu zasad; na sądy a posteriori (uzyskane na podstawie doświadczenia) i sądy a priori (niezależne od doświadczenia), oraz z drugiej strony, na sądy analityczne (objaśniające wiedzę już posiadaną) i syntetyczne (wzbogacające wiedzę). Kant twierdził, że zarówno sądy logiczne, jak i sądy matematyczne są konieczne i niezależne od doświadczenia, są więc a priori oraz, że twierdzenia logiczne i niektóre z twierdzeń matematycznych nie wzbogacają naszej wiedzy, są więc analityczne. Twierdził też, i w tym był nowatorem, że wiele twierdzeń matematycznych wzbogaca naszą wiedzę, twierdzenia takie są więc sądami syntetycznymi. Prowadzi to do głównego problemu filozofii Kanta: jak są możliwe sądy syntetyczne a priori? – jak możliwą jest matematyka? – jak możliwym jest czyste (matematyczne) przyrodoznawstwo?

W odpowiedzi Kant wskazał na rolę apriorycznych warunków poznania. Warunkami tymi są czyste formy naoczności – czas i przestrzeń, będące warunkiem koniecznym możliwości poznania empirycznego oraz aprioryczne formy rozumu – kategorie intelektu.

Przedmiotem matematyki jest czas i przestrzeń. Syntetyczne a priori sądy matematyczne są możliwe dlatego, że odnoszą się do subiektywnych form czasu i przestrzeni, które nie są poza poznającym podmiotem (rozumem), ale są w nim, są formami jednej ze składowych rozumu – czystej naoczności. Syntetyczność takiego sądu ma więc źródło subiektywne, zaś jego apriorycznośc jest bezpośrednią konsekwencją tego, że w sądzie tym nie odwołujemy się do doświadczenia.

Odróżnić należy poznanie a priori danego przedmiotu, tzn. poznanie go na zasadzie samej możliwości ujęcia go jako wewnętrznie niesprzecznego od konstrukcji tego przedmiotu. Konstrukcja ta dokonuje się w będącej rezultatem spontaniczności czystego rozumu transcendentalnej syntezie, a polega na opartym na apriorycznej naoczności poznaniu reguł tworzenia danego obiektu. Poznanie matematyczne odwołuje się do intuicji apriorycznej, bezpośredniego, niezależnego od doświadczenia zmysłowego i opartego na akcie samoświadomości rozumu poznania form naoczności. Polega ono na przedsta-

wieniu sobie możliwości konstrukcji pojęć. O intuicję aprioryczną czasu oparta jest arytmetyka, a o intuicję przestrzeni – geometria.

Matematyka bada czyste formy naszego doświadczenia, jest wiedzą rozumową, która poznanie swoje opiera wyłącznie na odwołującej się do apriorycznego wyobrażenia przedmiotu konstrukcji pojęć. Jest ona nauką o możliwych strukturach formalnych wytwarzanych przez czysty transcendentalny podmiot niezależnie od doświadczenia zmysłowego, w oparciu na właściwych dlań formach poznania i prawa twórczości naukowej.

Przedstawione wyżej cztery klasyczne stanowiska w filozofii matematyki żywe są, co do swego meritum, aż do dzisiaj. Najrozleglej oddziałał Platon, zarówno swą problematyką, jak i swymi poglądami. Idee jego spotkać można we wszystkich prawie kierunkach w filozofii matematyki, zaś jego realizm pojęciowy (ontologiczny) jest zwykłym poglądem pracującego matematyka. Doktryna Arystotelesa oddziałała wielostronnie, elementy jej występują we wszystkich stanowiskach pośrednich między skrajnym racjonalizmem a skrajnym empiryzmem. Leibniz wywarł przemożny wpływ na rozwój logiki matematycznej i związanych z nią orientacji w podstawach matematyki – logicyzmu, formalizmu i orientacji metamatematycznej. Oddziaływanie Kanta było dwojakie. Pośrednie, poprzez zasadniczą zmianę perspektywy filozoficznej oraz bezpośrednie: filozofia Kanta poprzez swój transcendentalizm, subiektywizm, intuicjonizm, konstruktywizm i kreacjonizm wpłynęła istotnie na różne stanowiska intuicjonistyczne – począwszy od Poincarégo, Kroneckera, przez Brouwera, późnego Fregego, aż do Wittgensteina. Od działała też inspirująco na kierunki rozwijające idee Leibniza poprzez wywołanie krytyki, przez orientowanie się twórców tych stanowisk (np. Russella) przeciw rozwiązaniom Kanta.

Zarys niektórych współczesnych stanowisk w filozofii matematyki. Stanowiska te scharakteryzowane zostaną poprzez wybranie kilku ważnych problemów i zestawienie typowych poglądów w wybranych kwestiach, przy czym niektóre z pozostałych stanowisk w filozofii matematyki zostaną tylko wspomniane.

Podstawowym zagadnieniem filozofii matematyki jest problem **A2** – sposobu istnienia obiektów badanych w matematyce. O ile zgodzimy się na fundamentalną rolę teorii mnogości w matematyce współczesnej i na możność zdefiniowania wszystkich pojęć matematycznych w terminach teorii mnogości, to zagadnienie to da się sformułować jako pytanie: czy istnieją i w jaki sposób istnieją zbiory?

Ponieważ zbiory w sensie dystrybutywnym są tym, co filozofowie nazywają zwykle powszechnikami (uniwersaliami), tj. przedmiotami ogólnymi, więc problem istnienia zbiorów jest częścią dobrze znanego i szeroko dyskutowanego problemu istnienia powszechników. Spór o sposób istnienia powszechników, czyli tzw. spór o uniwersalia, był szczególnie żywy w średniowieczu; zarysowały się wtedy główne stanowiska w tej kwestii, które utrzymały się też we współczesnej filozofii matematyki. Stanowiska te zwykle charakteryzuje się w sposób następujący: Realista skrajny, czyli tzw. platonista sądzi, że dla każdego poprawnie sformułowanego warunku istnieje zbiór wszystkich tych i tylko tych przedmiotów, które spełniają ten warunek; zbiór, który jest odrębnym bytem istniejącym w pewien sposób, tak iż jego istnienie nie sprowadza się do istnienia jego elementów. Najczęściej platonista przypisuje zbiorom (powszechnikom) idealny sposób istnienia, taki jak ideom Platońskim, ewentualnie sposób istnienia właściwy abstraktom, wierząc w ich istnienie w nie mniejszym stopniu, niż w istnienie obiektów konkretnych. K. Gödel pisał: „...przyjęcie istnienia takich przedmiotów, jak zbiory jest równie uprawnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych i jest równie wiele racji do wiary w ich istnienie...". Zwykle platonista nie twierdzi, że zbiory istnieją tak, jak przedmioty realne, np. kamienie lub zwierzęta, twierdzi jedynie, że istnieją one w pewien szczególny sposób. Jako kryterium istnienia przedmiotów matematycznych podaje platonista najczęściej jedynie ich niesprzeczność. Dla uniknięcia *antynomii przyjmuje platonista pewne ograniczenia zasady odpowiedniości formuły i jej ekstensji (tzn. zbioru spełniających ją przedmiotów) w postaci *teorii typów lub *aksjomatu podzbiorów (Zermeli), jest jednak przekonany, że koniec końców uda się sformułować mniej radykalne ograniczenia. Niektórzy platoniści sądzą, że rzeczy w świecie są naprawdę podzielone na typy; traktują wtedy teorię typów jako teorię wiernie opisującą świat.

Współczesny realista umiarkowany, stwierdzając ścisłą odpowiedniość między własnością a wyznaczonym przez nią zbiorem, traktuje zbiory jako własności (cechy, atrybuty). Zbiory istniałyby wtedy tak, jak istnieją atrybuty, w sposób niesamodzielny względem rzeczy, których są atrybutami. Stanowisko to jest trudne do utrzymania ze względu na istnienie tzw. cech koekstensywnych, tj. cech różnych, a wyznaczających ten sam zbiór przedmiotów, które to cechy zgodnie z powszechnie przyjmowaną zasadą ekstensjonalności musiałyby być utożsamione.

Konceptualiści traktują zbiory jako wytwory procesów myślowych; ich zdaniem zbiory istnieją w sposób właściwy tworom myślowym, tj. w sposób intencjonalny (zob. **Intuicjonizm**). Stanowisko konceptualistyczne we współczesnej filozofii matematyki jest blisko związane ze stanowiskiem konstruktywistycznym. Traktuje się tutaj zbiory jako wytwory procesów konstruowania. Wszystkie pojęcia matematyczne konstruujemy za pomocą pewnych elementarnych, dobrze określonych operacji. Zbiory istnieją tylko wtedy, gdy można je skonstruować ze zbiorów

podstawowych, akceptowanych ze względu na ich prostotę, bądź oczywistość, lub ze zbiorów, które zostały poprzednio skonstruowane. Konstruktywiści jako kryterium istnienia przedmiotów matematycznych przyjmują ich konstruowalność. Odróżnić należy trzy wersje konstruktywizmu: obiektywistyczną, w której konstrukcje traktowane są jako twory istniejące niezależnie od podmiotu; mentalistyczną, w której konstrukcję uważane są za wytwory aktów myślowych osób uprawiających matematykę; konstrukcjami takimi są np. dowody; oraz finitystyczną, dopuszczającą tylko efektywne przekształcenia obiektów czasowo-przestrzennych (napisów).

Współczesny nominalista traktuje używanie zdań o zbiorach jedynie jako pewien skrótowy sposób wyrażania się i twierdzi, że zdania te dadzą zinterpretować się jako zdania o indywiduach. Uważa on za zrozumiałe jedynie takie zdania, których argumentami są zmienne lub stałe indywiduowe, z rachunków logicznych dopuszcza jedynie węższy *rachunek kwantyfikatorów. Zdaniem nominalisty zbiory nie istnieją, istnieją wyłącznie indywidua. Często udaje się uzyskać przekład zdań o zbiorach na zdania o indywiduach, nie zawsze jest to jednak możliwe; stąd trudności przeformułowania całej matematyki w terminach nominalistycznych wydają się nieprzezwyciężalne. Nominaliści mogą więc bądź uciec się do nadziei, że w przyszłości uda się wyrazić całą matematykę w języku nominalistycznym, bądź traktować matematykę wyższą jako niezinterpretowany rachunek, jako wygodną „fikcję". Stanowisko nominalistyczne jest stanowiskiem bardzo niejednolitym. Rozpada się ono na dwa główne nurty: fizykalizm (nominalizm sensu stricto), w którym twierdzi się, że obiektami badanymi w matematyce są jedynie składniki fizyczne pojęć matematycznych, tj. najczęściej napisy; oraz nominalizm umiarkowany, gdzie nacisk kładzie się jedynie na to, że w matematyce rozważa się wyłącznie indywidua, przy czym nic się nie zakłada o naturze tych indywiduów ani o ich sposobie istnienia. W zależności od rozstrzygnięć dotyczących natury indywiduów pojawiają się różne dalsze wersje nominalizmu.

Empiryzm kwestię istnienia obiektów matematycznych redukuje do analogicznego problemu dla obiektów konkretnych, dostępnych w doświadczeniu zmysłowym. Empiryści twierdzą, że matematyka zajmuje się bądź wprost rzeczami realnymi rozpatrywanymi pod pewnym aspektem (np. J. St. Mill), bądź pewnymi abstraktami z rzeczy dostępnych w doświadczeniu zmysłowym, przy czym koniec końców odnosi się matematykę do świata zmysłowego i traktuje ją jako naukę – ze względu na przedmiot – empiryczną; o jej swoistości miałaby decydować wtedy metoda formalna używana w matematyce.

Występuje jeszcze inne (np. R. Carnap) stanowisko w tej sprawie. Kwestię istnienia przedmiotów matematycznych (zbiorów) traktuje się tutaj jako typowy filozoficzny pseudoproblem, którego takie czy inne rozwiązanie nie będzie miało nigdy wpływu na praktykę matematyczną.

Niektórzy uważają, że problem istnienia obiektów matematycznych jest źle postawiony. Twierdzą, że matematyka, wbrew naiwnym poglądom, nie tyle zajmuje się opisem pewnych specyficznych obiektów, ile opisem wszystkich obiektów spełniających pewne ogólne, formalno-strukturalne warunki. Twory matematyczne badane są z „dokładnością do izomorfizmu", tzn. z taką dokładnością, na jaką pozwala używany język, jego aparat pojęciowy. Tak więc pytanie czy istnieją pewne specjalne obiekty matematyczne, należy zastąpić pytaniem, czy istnieją obiekty spełniające pewne ogólne warunki; a z kolei to pytanie kwestią, czy pewien zespół warunków może być jednocześnie spełniony, czyli – a fortiori – czy zespół ten jest niesprzeczny.

W związku ze sprawą istnienia i sprawą kryteriów istnienia przedmiotów matematycznych rozważa się też szczegółową kwestię definicji i określeń jako kryteriów istnienia; m. in. dyskutuje się tu rolę tzw. definicji niepredykatywnych.

Ponieważ matematykę można formułować i opisywać na różne sposoby, niektórzy proponują stosowany powszechnie język ekstensjonalny teorii matematycznych zastąpić językiem modalnym. W stanowisku tym, zwanym modalizmem (H. Putnam, S. A. Kripke i inni), nacisk kładzie się na pojęcia modalne – możliwości i konieczności. Pojęcia te mogą być interpretowane w kilka sposobów, m. in. semantycznie, z odwołaniem się do pojęcia możliwych sytuacji, resp. możliwych światów, lub pragmatycznie, z powołaniem się na pojęcie czegoś „wyobrażalnego", czegoś „dającego się pojąć", itp. Interpretacja pragmatyczna pozwala rozwinąć metamatematykę alternatywną w stosunku do metamatematyki zwykłej oraz wyrazić w języku badanej teorii kluczowy zwrot semantyczny „formuła *A* jest prawdziwa".

Widoczne jest, że zestawione wyżej stanowiska są w wielu punktach zbieżne. W praktyce matematycznej najwygodniejsze z nich jest stanowisko platonistyczne. Zarówno stanowisko nominalistyczne, jak i konceptualistyczne prowadzi do zubożenia współczesnej matematyki i logiki, gdzie musiałoby odpaść szereg działów i twierdzeń jako zbudowanych za pomocą środków zakazanych przez te stanowiska.

W kwestii **B1** – charakteru sądów matematycznych występują najczęściej trzy stanowiska: albo traktuje się sądy matematyczne jako zdania analityczne, tj. najczęściej jako tautologie, utożsamiając często matematykę z logiką (*Logicyzm); albo za Kantem twierdzi się, iż wśród sądów matematycznych występują także tzw. sądy syntetyczne a priori, tj. sądy aprioryczne wzbogacające naszą wiedzę, uzasadnienia których szuka się w intuicji, itp. (*Intuicjonizm); albo staje się na gruncie konwencjonalizmu.

Konwencjonaliści twierdzą, że wiele zdań matematycznych (tj. aksjomatów i definicji) to jedynie umowy terminologiczne, zawarte ze względu na ich wygodę, użyteczność, itp.

Na pytanie o swoistość matematyki odpowiada się najczęściej, iż matematykę spośród innych nauk wyróżnia: 1° abstrakcyjność pojęć i twierdzeń, 2° zakres stosowania metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Wielu (np. A. Tarski) punkt 2° traktuje jako wyłączne kryterium zaliczenia teorii matematycznych do matematyki. Często jednak postępuje się inaczej. Teorie matematyczne unifikuje się wtedy przez sprowadzenie ich do teorii mnogości i podaje się następujące kryterium: matematyczna będzie każda taka teoria, która da się wyrazić adekwatnie w terminach teorii mnogości. Pogląd taki w istocie głosił logicyzm, zaś od końca lat trzydziestych XX w. zadanie takiej unifikacji matematyki podjęła grupa francuskich matematyków występujących pod pseudonimem Nicolas Bourbaki. Świat matematyczny, według nich, to świat struktur, przy czym pojęcie struktury jest określone w terminach teoriomnogościowych. Bourbakiści wyróżnili trzy podstawowe struktury matematyczne: struktury algebraiczne, struktury porządkowe i struktury topologiczne. Inne struktury matematyczne są od nich pochodne, przy czym Bourbakiści nie wykluczają tego, iż rozwój matematyki doda jeszcze jakieś nowe struktury do listy struktur podstawowych. Interesująca próba Bourbakistów najpełniej oddaje intencje matematyków i ona jednak nie jest wolna od pewnych trudności.

W latach 40-tych naszego wieku dla celów praktyki matematycznej stworzono tzw. teorię kategorii i funktorów (S. McLane i S. Eilenberg). Z metamatematycznego punktu widzenia teorię tę traktować można jako jedną z koncepcji opisujących matematykę. W myśl tej koncepcji matematyka to nauka: 1° o kategoriach matematycznych, tj. specjalnego rodzaju przedmiotach abstrakcyjnych złożonych z klasy rozważanych w kategorii obiektów oraz ze wszystkich morfizmów, tj. odwzorowań określonych i wykonalnych w klasie obiektów, wraz z określonym dla morfizmów złożeniem, które spełniać musi pewne naturalne warunki; 2° o funktorach, czyli o stosunkach między kategoriami. Teoria kategorii i funktorów znakomicie zdaje sprawę z własności najczęściej rozważanych teorii matematycznych.

W latach 60-tych XX w. nastąpił wzrost zainteresowań heurystyczno-metodologicznych; tym, jak faktycznie rozwijają się idee matematyczne, jak powstają teorie matematyczne, jak wygląda ich rozwój? Ogólnie, pytaniem **K** z przytoczonej uprzednio listy problemów, o dynamikę rozwoju matematyki, o zasady tego rozwoju, o to, jak wygląda tworzenie matematyki? Do wzrostu tych zainteresowań przyczyniły się w głównej mierze, oparte na bogatym materiale historycznym, prace I. Lakatosa. Od dowodów formalnych stanowiących przedmiot badań metamatematyki odróżnił on dowody nieformalne – te, które tworzone są przez matematyków w wyniku twórczej i nieraz długotrwałej pracy. Dowody formalne są ostateczną, czyniącą zadość obowiązującym w danej epoce wymogom formalnym, redakcją dowodów nieformalnych, w której zastygły żywe uprzednio idee matematyczne. Według Lakatosa mechanizm twórczej pracy matematyków da się opisać w sposób następujący: Wychodzi się od pytań, które rodzą przypuszczenia. Analiza tych przypuszczeń prowadzi do wydzielenia pewnego zespołu hipotez i lemmatów. Z kolei te albo są dowodzone, albo obalane, albo są redukowane do dalszych pytań, hipotez i lemmatów. Tą drogą dochodzi się zwykle do rozstrzygnięcia kwestii, tzn. do wyodrębnienia warunków (założeń), przy akceptacji których udzielona zostaje odpowiedź, tzn. udowodnione zostaje pewne twierdzenie, albo odpowiednie przypuszczenie zostaje obalone przez stosowny kontrprzykład. Lakatos kładł nacisk na ścisły związek dowodów i kontrprzykładów. Ich wzajemne dialektyczne powiązanie stanowi najistotniejszy czynnik rozwoju teorii matematycznych. Dowody nieformalne grają ważną rolę w matematyce; zarówno metodologiczną, prowadząc do dowodów formalnych rozwiązujących daną kwestię, jak i heurystyczną, modyfikując i wysubtelniając pierwotne przeświadczenia, wykształcając matematyczną intuicję.

Odosobnionym dość stanowiskiem jest tzw. operacjonizm (P. W. Bridgman) – pojęcia matematyczne traktuje się tutaj jako określone jedynie przez zespół operacji, w które są uwikłane.

Odrębne stanowisko w filozofii matematyki zajmował L. Wittgenstein. W pierwszej fazie swej filozofii podzielał on stanowisko logistyczne, porzucając je w drugiej fazie na rzecz oryginalnej wersji stanowiska konstruktywistycznego. Wittgenstein traktuje matematykę jako pewnego rodzaju grę językową, przy czym sens zdań matematycznych wyznaczony jest przez sposób posługiwania się nimi zgodnie z tworzonymi w trakcie gry regułami systemu, do którego należą. Zdania matematyczne, wg Wittgensteina, to reguły pewnych gier językowych. Zdania te winny być rozpatrywane wraz ze swym „otoczeniem", tj. swoim dowodem. W tym „otoczeniu" zdania matematyczne wytwarzają pojęcia, tzn. ustanawiają sposób dokonywania pewnych operacji rachunkowych. Podstawą tej gry matematycznej nie mogą być reguły, bo te dopiero tworzą się w trakcie gry – jest nią jedynie twórczy akt umysłu ludzkiego. Stanowisko Wittgensteina wydaje się być syntezą trzech stanowisk: logistycznego, konceptualistycznego i operacjonistycznego.

Poglądy zbliżone do stanowiska intuicjonistycznego reprezentują także niektórzy fenomenologowie (np. M. Geiger). Przeprowadzali oni w zakresie podstaw matematyki tzw. badania treściowe i na ich podstawie formułowa-

li tzw. aksjomatyki istotnościowe np. dla geometrii euklidesowej.

Odrębną postawę zajmowała grupa uczonych skupiona wokół F. Gonsetha (tzw. środowisko „Dialectica", m. in. P. Bernays, J. Piaget i inni). Stanowisko ich jest syntezą trzech stanowisk: empirystycznego, platonistyczno-formalistycznego i konceptualistycznego. W środowisku tym prowadzono najbardziej zaawansowane prace nad psychologią myślenia matematycznego.

W ostatnich latach zaobserwować można daleko idące zbliżenie poglądów w wielu podstawowych problemach filozofii matematyki. Odbywa się to kosztem rezygnacji z konfrontacji stanowisk w kwestiach czysto filozoficznych; opowiadanie się za takim czy innym stanowiskiem traktuje się jedynie jako „akt wiary", który w niewielki tylko sposób wpłynąć może na rozwój i kształt teorii matematycznych. Biorąc pod uwagę przypadek intuicjonizmu, w którym założenia filozoficzne wpłynęły zasadniczo na powstanie matematyki intuicjonistycznej, znacznie odbiegającej od zwykłych teorii matematycznych, przekonanie to uznać należy za słabo uzasadnione.

Większość problemów rozważanych w badaniach nad podstawami matematyki wydaje się daleka od rozstrzygnięcia, można jednak — szczególnie w problemach dostępnych badaniom za pomocą metod matematycznych — dostrzec stały postęp. Natomiast mało nadziei na rozwiązanie rokują odwieczne problemy filozoficzne, takie jak zagadnienie istnienia przedmiotów matematycznych.

D. M. Armstrong: *Universals and scientific realism*. I—II. 1978; Beth: *Fundations*; P. Benacerraf, H. Putnam (eds): *Philosophy of mathematics. Selected readings*. 1964; I. Dąmbska: *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*. [W:] *Arch. Hist. Filozofii*. T. 24. 1978; A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of set theory*. 1973; S. Hack: *Philosophy of logics*. 1978; V. H. Klenk: *Wittgenstein's philosophy of mathematics*. 1976; S. Körner: *The philosophy of mathematics*. 1960; G. Kreisel: *Foundations of mathematics*. Appendix II [W:] G. Kreisel, J. L. Krivine: *Elements of mathematical logic*. 1967; — — *Mathematical logic*. [W:] E. Saaty (ed.): *Lectures on modern mathematics*. 1965; — *Observations on popular discussions on foundations of mathematics*. [W:] *Proc. of Symp. in Pure Math*. XIII. 1971; — — *Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics?* [W:] *Bertrand Russell...* 1976; I. Lakatos: *Proofs and refutations*. 1976; H. Lehman: *Introduction to the philosophy of mathematics*. 1978; H. Mehlberg: *The present situation in the philosophy of mathematics*. [W:] *Logic and language*. 1962; A. Mostowski i in.: *Współczesny stan badań nad podstawami matematyki*. „Prace Matem.". I. 1955; A. Mostowski: *Thirty years of foundational studies*. 1965; H. Putnam: *Philosophy of logic*. 1971; — — *Mathematics without foundations*. „Journ. Phil." LXIV. 1967; W. V. O. Quine: *Podstawy matematyki*. [W:] *Matematyka w świecie współczesnym*. 1966; — — *Filozofia logiki*. 1977; H. Wang: *From mathematics to philosophy*. 1974; L. Wittgenstein: *Remarks on the foundations of mathematics*. 1956.

J. P.

podział logiczny zakresu pojęcia (nazwy). Skrótowo: podział logiczny pojęcia (nazwy). Jest to wymienienie pojęć podrzędnych względem tego pojęcia, tak dobranych, że każdy *desygnat dzielonego pojęcia jest desygnatem jednego i tylko jednego z tych pojęć podrzędnych. Dzieląc np. trójkąty na ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, dzielimy zakres pojęcia „trójkąt" na zakresy pojęć: „trójkąt ostrokątny", „trójkąt prostokątny" i „trójkąt rozwartokątny".

Występujące w podziale logicznym pojęcie nadrzędne nazywa się pojęciem dzielonym (łac. totum divisionis), a pojęcia podrzędne członami podziału (łac. membra divisionis).

Podział logiczny jest wyczerpujący (zupełny), gdy każdy desygnat dzielonego pojęcia należy do zakresu któregoś z członów podziału, tzn. suma zakresów członów podziału równa się zakresowi pojęcia dzielonego. Wymaganie to jest spełnione w powyższym przykładzie. Natomiast błędny, jako niewyczerpujący, jest np. podział ludzi na tych, którzy mają wykształcenie: podstawowe, średnie i wyższe, bo nie obejmuje tych, którzy nie mają żadnego wykształcenia.

Podział logiczny jest rozłączny, gdy każdy desygnat dzielonego pojęcia jest desygnatem tylko jednego z członów podziału, tzn. człony podziału wykluczają się nawzajem. Np. podział ludzi na pełnoletnich i niepełnoletnich. Błędny zaś, jako nierozłączny, jest podział ludzi na tych, którzy chodzą do kina, i na tych, którzy chodzą do teatru, skoro są i tacy, którzy chodzą do kina i do teatru.

Ze względu na sposób, w jaki zostają przeprowadzone, wyróżnia się dwa rodzaje podziałów logicznych: podział dychotomiczny (gr. *διχότομος* — podzielony na połowy) według cech sprzecznych oraz tzw. podział wedle pewnej zasady, którą są różne odmiany pewnej cechy.

Podział dychotomiczny uzyskamy, gdy jeden z członów podziału powstaje z pojęcia dzielonego przez dołączenie do jego treści jakiejś cechy, a drugi przez dołączenie negacji tej cechy. Takim jest podział ludzi na pełnoletnich i nie pełnoletnich.

Podział wedle pewnej zasady uzyskamy, gdy człony podziału powstają z treści pojęcia dzielonego przez dołączenie doń różnych odmian cechy będącej zasadą (podstawą) podziału, o ile spełnione są następujące warunki: 1° uwzględnione zostały wszystkie odmiany cechy stanowiącej podstawę podziału; 2° cecha będąca podstawą podziału przysługuje wszystkim desygnatom pojęcia dzielonego; 3° żaden przedmiot leżący w zakresie pojęcia dzielonego nie posiada dwóch odmian cechy będącej zasadą podziału. W ten sposób np. dzielimy ludzi na białych, czarnych, żółtych i czerwonych, ze względu na kolor skóry (podstawa podziału).

Często po przeprowadzeniu podziału jakiegoś pojęcia dzieli się następnie wszystkie lub niektóre człony pierwotnego podziału, a potem dzieli się człony drugiego podziału itd. Taki wielostopniowy podział logiczny nazywa się klasyfikacją. Przykładem klasyfikacji jest systematyka zwierząt, systematyka roślin. Termin „klasyfikacja" bywa też używany w szerszym rozumieniu, mianowicie na oznacze-

nie zarówno wielostopniowego, jak i jednostopniowego podziału.

Podział logiczny winien być naturalny, tzn. przedmioty należące do zakresu jednego członu podziału winny być do siebie bardziej podobne (z interesującego nas punktu widzenia) niż przedmioty należące do zakresów dwóch różnych członów. Podział nie spełniający tego warunku określa się jako sztuczny.

Ajdukiewicz: *Log. pragm*; – – *Zarys*; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*.

M. P.

pojęcie. Pojęciem w sensie logicznym jest znaczenie *nazwy generalnej. Od pojęcia w sensie logicznym odróżnia się pojęcie w sensie psychologicznym, które utożsamia się z przeżyciem myślowym polegającym na przedstawieniu sobie czegoś w sposób nieoglądowy (tzn. taki, że wyobrażenia zmysłowe nie należą do treści tego przedstawienia, choć mogą mu towarzyszyć). Pojęcie np. trójkąta, to znaczenie nazwy „trójkąt" i wszelkiej innej nazwy z nią równoznacznej. Problematyka pojęć w sensie logicznym była bardzo aktualna na przełomie XIX i XX w. (Frege, Meinong, Husserl, Twardowski), m. in. w związku z przezwyciężaniem *psychologizmu na terenie matematyki i logiki.

Ajdukiewicz; *Log. pragm.*; Church: *Math, log*; G. Frege: *Funktion und Begriff*. 1891; K. Twardowski: *Zur Lehre vom Inhalt und Gegenstand der Vorstellungen*. 1894.

W. M.

pole relacji. Polem danej relacji nazywamy sumę *dziedziny i *przeciwdziedziny tej relacji, czyli zbiór wszystkich przedmiotów, które pozostają w tej relacji do jakiegoś przedmiotu lub do których jakiś przedmiot w tej relacji pozostaje. Oznaczając symbolem $P(R)$ pole relacji R zapiszemy tę definicję symbolicznie w postaci: $x \in P(R) \equiv \vee y[xRy \vee yRx]$. Przykład: polem relacji bycia żoną jest zbiór wszystkich osób pozostających w związku małżeńskim.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

polisylogizm. Taki układ kolejno następujących po sobie sylogizmów, w którym wniosek poprzedniego sylogizmu jest jedną z przesłanek następującego bezpośrednio po nim sylogizmu. Przykład polisylogizmu:

TaP	Każde *T* jest *P*
RaT	Każde *R* jest *T*
RaP	Każde *R* jest *P*
MaR	Każde *M* jest *R*
MaP	Każde *M* jest *P*
SaM	Każde *S* jest *M*
SaP	Każde *S* jest *P*

M. Kowalewski: *Logika*. 1959; J. Śleszyński: *Teoria dowodu*. 1925.

M. P.

Post Emil (1897–1954; USA). Doktoryzował się w Columbia Univ. w 1920; wykładowca w Columbia Univ. (1921–1922), w City College of New York (1928–1938 z przerwami) i profesor wydziału matematycznego tejże uczelni od 1938.

Post jest jednym z twórców (obok Łukasiewicza) *logik wielowartościowych. Zasłużył się także w badaniach metalogicznych nad rachunkiem zdań, określając m. in. pojęcia *niesprzeczności i *zupełności.

W. M.

postać normalna.

1. Kwantyfikatorowa postać normalna. Formuła *rachunku kwantyfikatorów znajduje się w kwantyfikatorowej postaci normalnej wtedy i tylko, gdy jest ona następującej postaci: $Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \ldots Q_n x_{i_n} \Phi$, gdzie każdy z symboli Q_k jest kwantyfikatorem ogólnym lub egzystencjonalnym, zaś formuła Φ nie zawiera kwantyfikatorów. Np. formuła $\wedge x \vee y \wedge z[xRz \rightarrow y = z]$ znajduje się w kwantyfikatorowej postaci normalnej, zaś formuła $\wedge x xRz \wedge \wedge x \wedge y[xRy \rightarrow yRx]$ nie znajduje się w kwantyfikatorowej postaci normalnej. Można udowodnić następujące twierdzenie: Każda formuła rachunku predykatów równoważna jest formule znajdującej się w postaci normalnej. Fakt ten jest wykorzystywany w zastosowaniach, np. w dowodzie *twierdzenia Herbranda-Gentzena.

2. Dysjunkcyjna (alternatywna) postać normalna. Formuła *rachunku zdań Φ znajduje się w dysjunkcyjnej postaci normalnej wtedy i tylko, gdy jest ona następującej postaci $\Phi = t_1 \vee \ldots \vee t_n$, gdzie każda z formuł t_i jest postaci $t_i = u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_{n_i}}$, zaś każde u_j jest bądź zmienną zdaniową, bądź jej negacją, dopuszcza się przy tym wypadek, gdy $n_i = 1$. Np. formuła $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim s)$ znajduje się w dysjunkcyjnej postaci normalnej, zaś formuła $(p \vee r) \wedge (q \equiv \sim s)$ nie znajduje się w dysjunkcyjnej postaci normalnej. Można podobnie jak w punkcie 1 udowodnić twierdzenie: Każda formuła rachunku zdań jest równoważna formule znajdującej się w dysjunkcyjnej postaci normalnej. Pojęcie dysjunkcyjnej postaci normalnej można zawężać, otrzymując pojęcie zupełnej dysjunkcyjnej postaci normalnej – jeśli każda z koniunkcji, których alternatywą jest dana formuła, zawiera wszystkie zmienne zdaniowe występujące w formule, a także pojęcie redukowanej dysjunkcyjnej postaci normalnej, jeśli żadna z koniunkcji nie zawiera żadnej zmiennej więcej niż raz. Dla obu tych pojęć można udowodnić twierdzenie analogiczne do wspomnianego wyżej.

3. Koniunkcyjna postać normalna. Formuła rachunku zdań znajduje się w koniunkcyjnej postaci normalnej wtedy i tylko, gdy jest ona postaci $s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_n$, gdzie każda z formuł s_i jest postaci $s_i = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_{n_i}}$, zaś każde u_j jest zmienną zdaniową lub jej negacją. Np. formuła $(p \vee \sim p) \wedge r \wedge s$ znajduje się w koniunkcyjnej posta-

ci normalnej, zaś formuła $p \to q \vee (r \wedge s)$ nie znajduje się w koniunkcyjnej postaci normalnej. Można udowodnić następujące twierdzenia: 1° Każda formuła rachunku zdań równoważna jest formule znajdującej się w koniunkcyjnej postaci normalnej; 2° Na to, by formuła rachunku zdań znajdująca się w koniunkcyjnej postaci normalnej była tautologią, potrzeba i wystarcza, by każda z alternatyw, jakie ją tworzą, zawierała równocześnie pewną zmienną zdaniową wraz z jej negacją.

Grzegorczyk: *Log. mat.* R. Lyndon: *O logice matematycznej.* 1968; Mostowski: *Log. mat.*

W. Mk

postulat znaczeniowy (ang. meaning postulate). Postulatem znaczeniowym określonego języka jest zdanie przyjęte w tym języku w roli *definicji arbitralnej, tj. z intencją nadania terminom, które w nim występują takiego sensu, przy którym zdanie to byłoby prawdziwe. Kto np. chce rozumieć termin „kruk" w taki sposób, by nieodłączną cechą kruka było czarne upierzenie, ten wyrazi to w postulacie: „Każdy kruk jest czarny".

Zob. też **zdanie analityczne.**

R. Carnap: *Meaning postulates.* [W:] *MaN.*

W. M.

pragmatyka. Dział *semiotyki dotyczący stosunków między językiem a tymi, którzy się nim posługują. Takim stosunkiem jest komunikowanie, wyrażanie, rozumienie itp.

W. M.

prawda. Pojęcie prawdy rozważane jest w dziale logiki zwanym semantyką logiczną oraz w filozofii, w dziale noszącym nazwę teorii poznania lub epistemologii. W semantyce przyjęła się definicja prawdy pochodząca od Tarskiego, odwołująca się do pojęcia *spełniania. Ma ona następującą treść: Wyrażenie W jest prawdziwe w dziedzinie $D = \langle X, p_1, \ldots, p_r \rangle$ przy rozumieniu predykatów $P_1, \ldots, P_n$ jako nazw relacji $p_1, \ldots, p_n$ wtedy i tylko, gdy każdy ciąg przedmiotów zbioru X spełnia W w D przy powyższym rozumieniu predykatów.

Powyższa definicja prawdy prowadzi w konsekwencji do takich twierdzeń, całkowicie zgodnych z intuicją, jak to, że każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe, że konsekwencje zdań prawdziwych są zdaniami prawdziwymi, że tezy logiki są prawdziwe w każdej dziedzinie (dowody tych twierdzeń zob. Grzegorczyk).

Tak skonstruowana definicja prawdy pozwala uniknąć paradoksów w rodzaju słynnej antynomii kłamcy (*Antynomie w logice), ponieważ odróżnienie języka i *metajęzyka wystarcza do zapobieżenia temu, żeby jakieś wyrażenie stwierdzało coś o sobie samym. Odróżnienie to jest widoczne w takich przykładach, jak: Zdanie „Szczecin jest portem", jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy Szczecin jest portem. Pierwsza strona tej równoważności stanowi wyrażenie z metajęzyka, druga należy do *języka przedmiotowego. Takiego 'rozwarstwienia' języków brakuje np. w powiedzeniu, będącym jedną z wersji antynomii kłamcy: „To, co w tej chwili mówię, nie jest prawdziwe". Z drugiej strony, rozumowanie wzorowane na antynomii kłamcy pozwala dowieść twierdzenia, że dla dostatecznie bogatego języka L (zawierającego w sobie arytmetykę liczb naturalnych) pojęcia prawdziwości dla zdań języka L nie daje się zdefiniować w samym języku L (*Twierdzenie Tarskiego).

Zabezpieczenie języka przed antynomiami semantycznymi za pomocą tego rodzaju definicji jest możliwe tylko wtedy, gdy dany język jest dokładnie określony przez wyliczenie wszystkich jego symboli wyjściowych oraz wszystkich reguł konstruowania wyrażeń złożonych. Nie jest to możliwe w przypadku języka potocznego. Stąd semantyczna definicja prawdy nie może być stosowana do tego języka, lecz najwyżej do jakichś jego sztucznie wydzielonych fragmentów, dla których skonstruuje się przy tym odpowiedni metajęzyk.

Filozoficzny problem prawdy stanowi jedno z naczelnych pytań filozofii, a raczej dwa związane ze sobą pytania: o definicję prawdy i o kryteria prawdy. Próby odpowiedzi na te pytania wyrażają się w różnych teoriach prawdy, jakimi są: teoria zgodności (sądu z rzeczywistością) zwana też klasyczną, teoria koherencyjna i teoria pragmatyczna. Semantyczna definicja prawdy jest niekiedy przedstawiana jako sprecyzowanie (ograniczone do określonych języków) klasycznej koncepcji prawdy. Teoria koherencyjna uzależnia prawdziwość zdania od tego, czy stanowi ono składnik spójnej całości, przy czym spójność ta ma być relacją mocniejszą aniżeli *niesprzeczność logiczna; natura owej relacji nie została, jak dotąd, zadowalająco określona. Racjonalnym jądrem teorii koherencyjnej zdaje się być myśl, że prawdziwości nie powinno się orzekać o izolowanych zdaniach, ale o zdaniach jako elementach pewnego systemu twierdzeń. Wedle pragmatycznej teorii prawdy, pochodzącej od W. Jamesa (1842–1910), ilustrowanej przez niego w szczególności na przykładzie poglądów religijnych, „jeśli idee teologiczne okazują się wartościowe dla życia konkretnego, będą one prawdziwe dla pragmatyka w tym znaczeniu, iż są do tego dobre" (James s. 48). W odniesieniu do idei naukowych można uważać, iż wytrzymują one pragmatyczne kryterium prawdy, o ile okazują się 'dobre' w praktyce, tj. przydatne do przewidywań i zastosowań, w tym także zastosowań technicznych. Trzy wymienione teorie prawdy nie są względem siebie konkurencyjne, lecz raczej dopełniające. Teoria klasyczna jest próbą zdefiniowania pojęcia prawdy bez odwoływania się do jej kryteriów, pozostałe dostarczają definicji wskazujących na różne, lecz nie wykluczające się między

sobą kryteria. Co się tyczy kryterium pragmatystycznego, jest ono, przy pewnej interpretacji, zbieżne z marksistowską tezą o praktyce (technicznej, społecznej etc.) jako kryterium prawdy. Marksizm różni się natomiast od pragmatyzmu przez akcentowanie trafności klasycznej definicji prawdy.

Innym problemem z pogranicza logiki i filozofii jest pytanie, czemu przysługuje prawdziwość: zdaniom, sądom w sensie logicznym, czy może aktom wydawania sądów. A jeśli zdaniom, to czy pojętym jako wyrażenia-typy, czy jako wyrażenia-egzemplarze (*Wyrażenie). Problemy te, powiązane m. in. z zagadnieniem *wyrażeń okazjonalnych są szeroko dyskutowane, zwłaszcza na gruncie filozofii analitycznej.

K. Ajdukiewicz: *Zagadnienia i kierunki filozofii.* 1949; M. Black: *Semantyczna definicja prawdy.* [W:] *LiJ*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; W. James: *Pragmatyzm.*1957; Pap: *Elements*; Tarski: *Pojęcie prawdy.*

W. M.

prawda logiczna.

(1) Twierdzenie *logiki formalnej.

(2) Wyrażenie będące *tautologią lub podstawieniem tautologii, np. $p \vee \sim p$: Grzmi lub nie grzmi. Problem stosunku między (1) i (2) pozostaje otwarty, ponieważ zarówno zakres logiki, jak i pojęcie tautologii są przedmiotem dyskusji. Prawdami logiki zarówno w sensie (1), jak i w sensie (2) są niewątpliwie wszystkie tezy *klasycznego rachunku zdań.

Carnap: *MaN*; J. Hintika: *Are logical truths tautologies?* [W:] *Existenz und Analytizität.* 1966.

W. M.

prawdopodobieństwo.

1. Prawdopodobieństwo matematyczne. Wielokrotnie podejmowane próby określenia pojęcia prawdopodobieństwa w „naturalny" sposób w związku z jakąś dziedziną zjawisk nie dawały zadowalających rezultatów, toteż zaniechano ich i współcześnie określa się prawdopodobieństwo, podobnie jak inne podstawowe pojęcia matematyczne, w drodze aksjomatycznej (*Definicja aksjomatyczna) łącznie z innymi pokrewnymi pojęciami.

Prawdopodobieństwo jako swego rodzaju cechę przypisuje się różnego rodzaju przedmiotom lub zjawiskom, których istota jest w zasadzie obojętna (mogą to być zjawiska fizyczne, biologiczne, społeczne, przedmioty abstrakcyjne itp.). Nie mogą one jednak być zupełnie dowolne. Aby jakimś zjawiskom sensownie przypisywać prawdopodobieństwo, muszą one wchodzić w skład tzw. zbioru zdarzeń losowych (symbolicznie Z). Zbiór zdarzeń losowych scharakteryzowany jest przez pewne warunki formalne. W każdym zbiorze zdarzeń losowych są dwa elementy wyróżnione: zdarzenie pewne $\vee$, które się zawsze realizuje, oraz zdarzenie niemożliwe $\wedge$, które się nigdy nie realizuje. Nadto na elementach zbioru zdarzeń losowych wykonuje się pewne działania, których wyniki z kolei również należą do tego zbioru. Jeżeli x i y są zdarzeniami losowymi, to zdarzenia:

$x \cup y$ nazywa się sumą zdarzeń x, y,

$x \cap y$ „ „ iloczynem zdarzeń x, y,

x' „ „ negacją zdarzenia x,

zdarzeniem przeciwnym do x.

Suma zdarzeń $x \cup y$ jest to zdarzenie polegające na tym, że zachodzi przynajmniej jedno z dwu zdarzeń x, y. Iloczyn zdarzeń $x \cap y$ to zdarzenie polegające na tym, że zachodzą zarówno zdarzenia x, jak i zdarzenia y. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia x, mianowicie x', to zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie x nie zachodzi.

Gdy zbiór zdarzeń losowych Z jest liczny, wprowadza się wówczas tzw. uogólnione sumy i iloczyny zdarzeń. Niech $x_1, x_2, \ldots$ będzie ciągiem nieskończonym o wyrazach należących do zbioru zdarzeń losowych Z i niech X będzie podzbiorem tego zbioru; wówczas

$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że zachodzi przynajmniej jedno zdarzenie z ciągu $x_1, x_2, \ldots$

$\prod_{i=1}^{\infty} u_i$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że zachodzą wszystkie zdarzenia wchodzące w skład ciągu $x_1, x_2, \ldots$

$\sum_{u \in X} u$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że zachodzi przynajmniej jedno zdarzenie należące do zbioru X.

$\prod_{u \in X} u$ oznacza, że zachodzą wszystkie zdarzenia zbioru X.

Zbiór zdarzeń losowych Z i działania dodawania i mnożenia oraz działanie tworzenia zdarzenia przeciwnego scharakteryzowane są przez następujące warunki:

$[A_0]$ jeśli $x, y \in Z$, to $x \cup y, x \cap y, x' \in Z$,

$[A_1]$ $x \cup y = y \cup x$,

$[A_2]$ $x \cap y = y \cap x$,

$[A_3]$ $x \cup (y \cup x) = (x \cup y) \cup z$,

$[A_4]$ $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$,

$[A_5]$ $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$,

$[A_6]$ $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,

$[A_7]$ $x \cup \wedge = x$,

$[A_8]$ $x \cap \vee = x$,

$[A_9]$ $x \cup x' = \vee$,

$[A_{10}]$ $x \cap x' = \wedge$,

$[A_{11}]$ $\wedge \neq \vee$.

Aksjomat $[A_0]$ wyraża, że suma, iloczyn i negacja zdarzeń losowych jest zdarzeniem losowym. Aksjomaty $[A_1]$, $[A_2]$ wyrażają, że działania $\cup$, $\cap$ są przemienne; $[A_3]$, $[A_4]$, że są łączne; $[A_5]$, $[A_6]$, że są względem siebie rozdzielne. Aksjomaty $[A_7]$, $[A_8]$ wyrażają odpowiednio, że zdarzenie niemożliwe jest modułem dodawania zdarzeń oraz, że zdarzenie pewne jest modułem mnożenia zdarzeń. $[A_9]$ i $[A_{10}]$ stwierdzają, że suma zdarzeń pew-

nych jest zdarzeniem pewnym, a ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym. Na koniec, aksjomat [A_{11}] wyraża, że zdarzenie pewne i niemożliwe są różnymi zdarzeniami. Aksjomaty te wskazują, że zbiór zdarzeń losowych Z wraz z działaniami: dodawaniem, mnożeniem i negacją jest *algebrą Boole'a. Wynika stąd, że dla zdarzeń losowych obowiązują wszystkie prawa algebry Boole'a. Dalszym wnioskiem jest, że gdy zbiór zdarzeń losowych Z jest skończony, to ilość jego elementów wyraża się liczbą 2^n, gdzie n jest liczbą naturalną różną od 2 i wyraża liczność zbioru zdarzeń elementarnych.

Wielu teoretyków prawdopodobieństwa w zbiorze zdarzeń Z losowych wyróżnia jako jego podzbiór właściwy tzw. zbiór zdarzeń elementarnych (symbolicznie E). Zbiór ten charakteryzuje się następującymi warunkami:

[A^{*1}] $E \nsubseteq Z$

[A^{*2}] $\sum_{x \in E} x = \vee$

[A^{*3}] Jeżeli $x, y \in E$ i $x \neq y$, to $x \cap y = \wedge$

[A^{*4}] Jeżeli $x \in E$, to $x \neq \wedge$

[A^{*5}] Dla dowolnego $z \in Z$ istnieje $K \subset E$, że $z = \sum_{x \in K} x$

[A^{*6}] Jeżeli $e \in E$ i $x \cup e = e$, to $x = \wedge$ lub $x = e$

Warunki te wyrażają, że [A^{*1}] każde zdarzenie elementarne jest zdarzeniem losowym; [A^{*2}] suma wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa zdarzeniu pewnemu; [A^{*3}] dowolne różne zdarzenia elementarne wykluczają się; [A^{*4}] żadne zdarzenie elementarne nie jest zdarzeniem niemożliwym; [A^{*5}] każde zdarzenie losowe jest sumą jakichś zdarzeń elementarnych; [A^{*6}] żadne zdarzenie elementarne nie rozkłada się na inne zdarzenia.

Przyjmując istnienie zdarzeń elementarnych, wyznacza się tym samym za ich pomocą wszystkie inne zdarzenia losowe jako ich sumy i w ten sposób oblicza ich prawdopodobieństwa na podstawie prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych. Z punktu widzenia formalnego zdarzenia elementarne odpowiadają atomom algebraicznym, a zbiór zdarzeń losowych ze zdarzeniami elementarnymi jest algebrą Boole'a z atomami.

Prawdopodobieństwo, mówiąc swobodnie, jest miarą lub stopniem realizowania się zjawisk, wyrażonym przez zależność funkcjonalną; zależność ta przypisuje określonym zjawiskom, spełniającym warunki przewidziane dla zbioru zdarzeń losowych, określone liczby rzeczywiste większe lub równe zeru i mniejsze lub równe jedności. Prawdopodobieństwo jest więc funkcją określoną na zbiorze zdarzeń losowych Z i przyjmującą za wartości liczby rzeczywiste. Prawdopodobieństwo przysługuje każdemu zdarzeniu losowemu ze zbioru Z. Prawdopodobieństwo zdarzenia x oznacza się przez $P(x)$ i jest to jakaś liczba rzeczywista.

Funkcji prawdopodobieństwa P nie udawało się zdefiniować za pomocą *definicji normalnej w związku z jakąś „naturalną" dziedziną zjawisk, mimo licznych usiłowań. Toteż określa się ją przez postulaty, podając szereg warunków, którym czynić ma zadość. Niech x, y będą elementami zbioru zdarzeń losowych Z:

[B_1] $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$

[B_2] $P(\vee) = 1$

[B_3] jeżeli $x \cap y = \wedge$, to $P(x \cup y) = P(x) + P(y)$

Warunek [B_1] stwierdza, że prawdopodobieństwo jest funkcją określoną dla dowolnego zdarzenia losowego ze zbioru Z, oraz że prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest liczbą rzeczywistą leżącą w przedziale zamkniętym wyznaczonym przez zero i jedność. Warunek [B_2] stwierdza, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności. Warunek [B_3] dotyczy dodawania prawdopodobieństw. Głosi on, że prawdopodobieństwo sumy dwu zdarzeń wykluczających się równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Zdarzenia wykluczają się, gdy ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym.

Należy podkreślić, że dla każdego zbioru zdarzeń losowych istnieje wiele funkcji spełniających aksjomaty [B_1], [B_2], [B_3]. Aksjomaty te więc nie wyróżniają jednej funkcji prawdopodobieństwa, ale pewną jej klasę. Są badania nad zwężeniem tej klasy przez nałożenie dodatkowych aksjomatów na funkcję prawdopodobieństwa. W Polsce prowadzi je J. Łoś.

Prawdopodobieństwo może być uważane za szczególny przypadek ogólnego pojęcia miary, stanowiącego przedmiot badania dyscypliny matematycznej, zwanej teorią funkcji zmiennej rzeczywistej.

Obok prawdopodobieństwa omówionego wyżej wprowadza się również prawdopodobieństwo względne lub warunkowe: prawdopodobieństwo zdarzenia x pod warunkiem zajścia zdarzenia y, symbolicznie $P(x/y)$. Prawdopodobieństwo względne jest funkcją dwu zmiennych. Kreska oddzielająca x od y nie jest funktorem oznaczającym działanie na zdarzeniach, lecz rodzajem znaku przestankowego. Ściślej powinno się pisać $P(x, y)$. Prawdopodobieństwo warunkowe określa się następująco: niech x, y będą zdarzeniami losowymi ze zbioru Z oraz niech $P(y) > 0$; wówczas

$$P(x/y) = \frac{P(x \cap y)}{P(y)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki [B_1], [B_2], [B_3], ale tylko w odniesieniu do węższego zbioru zdarzeń losowych Z', który jest zbiorem zdarzeń z 'zawartych' w zdarzeniu y, tj. spełniających warunek $z \cup y = y$.

Dysponując zbiorem zdarzeń elementarnych, nakłada się na prawdopodobieństwo następujący warunek:

[B_4] $\sum_{x \in E} P(x) = 1$,

który stwierdza, że suma prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń elementarnych równa się jedności.

Przedstawiona tu koncepcja matematycznego pojęcia prawdopodobieństwa pochodzi w zasadzie od Kołmogorowa. Matematycznym pojęciem prawdopodobieństwa zajmuje się obszerna nauka, zwana teorią prawdopodobieństwa. Można ją uważać za wyspecjalizowany dział teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

2. Inne koncepcje prawdopodobieństwa. Do niedawna rozpowszechniona była tzw. częstościowa albo statystyczna koncepcja prawdopodobieństwa, której głównym rzecznikiem był von Mises. Niech A, B będą powtarzającymi się zjawiskami, przy tym zjawisko A może występować tylko, gdy występuje zjawisko B. Niech dalej $n(A)$, $n(B)$ wyrażają odpowiednio ilość pojawień się zjawiska A oraz zjawiska B. Przy tych oznaczeniach prawdopodobieństwo zjawiska A (symbol. $P(A)$) określa się jako granicę, do której zmierza częstość względna występowania zjawiska A w związku z występowaniem zjawiska B, gdy częstość występowania tego ostatniego zmierza do nieskończoności.

$$P(A) = \lim_{n(B)\to\infty} \frac{n(A)}{n(B)}$$

Przykład: Niech A będzie wyrzuceniem orła, B rzuceniem monetą. Robiąc obserwacje rzutów, dostaniemy np. taki ciąg częstości względnych 8/20, 22/40, 37/60, 47/80, 55/100... Widzimy, że ciąg ten zmierza do granicy 0,5.

Częstościowa koncepcja prawdopodobieństwa cieszyła się wielkim powodzeniem wśród przyrodników, gdyż uważano, że jest to koncepcja na wskroś empiryczna, nie wymagająca żadnych teoretycznych założeń. Głębsza analiza tego pojęcia wykazała jednak, że pogląd ten jest niesłuszny. Obecnie częstościowej definicji nie traktuje się jako odrębnej koncepcji prawdopodobieństwa, a jedynie jako główną metodę obliczania prawdopodobieństwa określanego metodą aksjomatyczną.

Autorem jednej z pierwszych koncepcji prawdopodobieństwa był Laplace. Odegrała ona przez długi czas dużą rolę i dlatego dziś się ją nazywa klasyczną definicją prawdopodobieństwa. Niech zdarzenia określonego rodzaju rozkładają się na n wykluczających się i jednakowo możliwych zdarzeń prostych i niech interesujące nas zdarzenie A z tego rodzaju rozkłada się na m spośród tych n zdarzeń prostych. Oczywiście $m < n$. Wówczas prawdopodobieństwem zdarzenia A (symbol. $P(A)$) nazywamy liczbę wyrażoną ułamkiem, w liczniku którego znajduje się liczba m wyrażająca ilość zdarzeń prostych, na które rozpada się zdarzenie A, a w mianowniku liczba n wyrażającą ilość wszystkich zdarzeń prostych

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Przykład: Interesują nas zdarzenia polegające na wyciąganiu kart z talii. Zdarzeń prostych równomożliwych i wykluczających się mamy tu pięćdziesiąt dwa. Asy w talii są, jak wiadomo, cztery. Zdarzenie wyciągnięcia asa rozpada się na cztery zdarzenia proste. Stąd prawdopodobieństwo wyciągnięcia asa wynosi $^4/_{52}$, czyli $^1/_{12}$.

W klasycznej koncepcji prawdopodobieństwa doszukano się poważnych niedociągnięć teoretycznych i dlatego nie przyjmuje się jej obecnie jako definicji prawdopodobieństwa. Natomiast prawdopodobieństwo klasyczne daje się dobrze wyinterpretować jako poszczególny przypadek prawdopodobieństwa matematycznego.

Prawdopodobieństwo, określone przez definicję klasyczną, zwane też jest czasem prawdopodobieństwem apriorycznym, gdyż pozwala obliczać prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, nie odwołując się do obserwacji, a na podstawie jedynie znaczeń słów występujących w opisie tych zdarzeń. Przykład: Nie dokonując obserwacji, można obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia poszczególnych kart z talii na podstawie znajomości znaczenia terminów: talia kart, as, król itp.

Obok koncepcji przypisujących prawdopodobieństwo różnego rodzaju zjawiskom istnieją usiłowania zmierzające do tego, aby prawdopodobieństwo odnosić do zdań. Prawdopodobieństwo odnoszące się do zdań nosi nazwę prawdopodobieństwa logicznego. Główna koncepcja tej teorii jest następująca: Niech A, B będą jednoargumentowymi predykatami, $n(z)$ – liczbą wyrażającą liczność zbioru z. Zbiory $\{x|B(x)\}$, $\{x|A(a)\}$ są skończone, a zbiór $\{x|B(x)\}$ nadto niepusty. Prawdopodobieństwo logiczne zdania $A(x)$ ze względu na zdanie $B(x)$ (symbol. $P(A/B)$) jest częstością względną ilości przedmiotów spełniających funkcję zdaniową $A(x)$ do ilości przedmiotów spełniających $B(x)$.

$$P(A/B) = \frac{n(\{x|A(x)\})}{n(\{x|B(x)\})}$$

Koncepcja prawdopodobieństwa logicznego jest w obecnej fazie bardzo daleka od doskonałości i nie wiadomo jeszcze czy uda się nawet teoretycznie rozpracować. Napotyka ona na wiele poważnych trudności; jedną z nich jest jej fragmentaryczność języka zdań, do których prawdopodobieństwo może być stosowane. Probabiliści nie interesują się tą koncepcją, natomiast zajmują się nią logicy, głównie ze względu na nadzieje, że prawdopodobieństwo logiczne będzie stanowiło podstawę dla ogólnej i jednolitej teorii wnioskowań, obejmującej jako poszczególne przypadki zarówno wnioskowania indukcyjne, jak i wnioskowanie dedukcyjne. Prawdopodobieństwem określonym na zdaniach zajmowali się: Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Carnap, Popper, w Polsce Ajdukiewicz, Czeżowski, Suszko. Zob. też **logika indukcji.**

Mówi się często o prawdopodobieństwie subiektywnym, czyli psychologicznym, mając na myśli stopień czyjejś wiary lub przeświadczenia o szansach zrealizowa-

nia się jakiegoś zjawiska. Oczywistą rzeczą jest brak ścisłego i stałego związku takich naszych przekonań z rzeczywistym prawdopodobieństwem tych zjawisk.
W sprawie matematycznego pojęcia prawdopodobieństwa zob.: Fisz, Mazurkiewicz i Łoś. Z teorią prawdopodobieństwa można się zapoznać w książkach Hellwiga, Fisza, Sadowskiego, Mazurkiewicza, Fellera i Cramera. Inne omówione tu koncepcje prawdopodobieństwa znajdzie czytelnik również w pracach wspomnianych autorów.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; W. Feller: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. 1966; M. Fisz: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. 1954; Z. Hellwig: *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. 1957; M. Keynes: *A treatise on probability*. 1921; A. Kołmogorow: *Osnownyje poniatia tieorii wierojatnostiej*. 1936; P. S. de Laplace: *Théorie analitique des probabilites*. 1812; J. Łoś: *O ciałach zdarzeń i ich definicji w aksjomatyce teorii prawdopodobieństwa*. „St. Log." IX 1960; – – *On the axiomatic treatment of probability*. „Colloq. Math." III 1955; A. A. Markow: *Isczislenije wierojatnostiej*. 1924; S. Mazurkiewicz: *Podstawy rachunku prawdopodobieństwa*. 1956; R. Mises: *Wahrscheinlichkeits Statistik und Wahrheit*. 1936; Popper: *Log. sc. disc.*; W. Sadowski: *Statystyka matematyczna*. 1965; M. Warmus: *Wykłady z probabilistyki*. T. 1 1971; t. 2 1973; S. Zubrzycki: *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. Wyd. 2 1970.

H. S.

prawo Dunsa Szkota. Tautologia rachunku zdań zapisana wzorem: $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$, co czytamy: „Jeżeli nieprawda że p, to jeśli ponadto p, to q". Swobodne sformułowanie tego prawa głosi, iż z fałszu wynika dowolne inne zdanie, co brzmi paradoksalnie. Słynna anegdota o B. Russellu – wedle której ów znakomity logik udowodnił komuś na poczekaniu, iż z tego że $2+2=5$ wynika, że on sam (Russell) jest papieżem – poucza, że z fałszywej przesłanki można dojść do nieoczekiwanego wniosku. Dowód przebiega w ten sposób: „Odejmijmy od obu stron tej równości po 3; otrzymujemy $1=2$. Jeśli więc Pan twierdzi, że ja nie jestem papieżem, to papież i ja jesteśmy dwiema osobami. Zatem (wobec $1=2$) papież i ja jesteśmy jedną osobą".
Zob. też **rachunek zdań.**

Mostowski: *Log. mat.*

K. Cz.

prawo sprzeczności (zasada sprzeczności zwana także zasadą niesprzeczności; ang. law of contradiction).
$\sim (p \wedge \sim p)$: nieprawda, że p i nie p zarazem.
U Arystotelesa znajdują się trzy interpretacje tego prawa:
1. logiczna: z dwu zdań wzajem sprzecznych tylko jedno może być prawdziwe;
2. ontologiczna: nie może być tak, aby coś zarazem było i nie było;
3. psychologiczna: nie da się pomyśleć o żadnej rzeczy, że jest taka i zarazem nie jest taka.

J. Łukasiewicz: *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. 1910.

K. Cz.

predykat.
(1) *Funktor zdaniotwórczy od argumentów nazwowych (zob. Słupecki). Np. słowo „świeci" w zwrotach „Księżyc świeci", „x świeci" itp.
(2) Wyrażenie złożone z funktora zdaniotwórczego od argumentów nazwowych oraz ze zmiennych nazwowych (zob. Grzegorczyk); inaczej: funkcja zdaniowa argumentów nazwowych, czyli funkcja propozycjonalna (zob. Czeżowski). Np. „x świeci", „$x = y$", „x leży między y i z".
(3) Wyrażenie, które opisuje pewną własność lub relację (zob. Grzegorczyk, Carnap).
Określenia (1) i (2) mają charakter syntaktyczny, zaś (3) semantyczny. Ze względu na nieostrość terminu „opisuje" występującego w określeniu (3) można je traktować jako równoważne z (1) lub równoważne z (2). Predykat w sensie (1) jest częścią predykatu w sensie (2), tą mianowicie częścią, która pozostaje, gdy pominie się symbole zmienne. Częściej używa się słowa „predykat" w znaczeniu (1), którego odpowiednikiem w gramatyce jest pojęcie orzeczenia. Predykat opisujący własność nazywa się predykatem jednoargumentowym, predykat opisujący relację nazywa się dwu-, trzy- lub więcej- argumentowym, w zależności od liczby członów danej relacji (*Teoria relacji).
Dział logiki dotyczący predykatów nazywa się rachunkiem predykatów lub *rachunkiem kwantyfikatorów.

Carnap: *Symb. log.*; T. Czeżowski: *Logika*, 1949; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

principium identitatis indiscernibilium (łac.; zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych). Definicja identyczności sformułowana m. in. przez Leibniza, a rozpowszechniona przez *Principia mathematica*. Stwierdza ona, że przedmioty (indywidua, zbiory etc.) są identyczne wtedy i tylko, gdy wszystkie własności, tj. wszystko, co można o nich orzekać, mają wspólne. Dla indywiduów symboliczny zapis tej zasady w języku rozszerzonego *rachunku kwantyfikatorów ma postać: $(x = y) \equiv \wedge P(Px \equiv Py)$. Za jej pomocą dowodzi się szeregu twierdzeń o *identyczności, m. in. prawa *ekstencjonalności.

A. J. Ayer: *The identity of indiscernibles*. [W:] – – *Philosophical essays*. 1959. Mostowski: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

proprietates terminorum. W logice średniowiecznej własności semantyczne wyrażeń. Podstawowe, to *supozycja i *significatio. Wyróżniano także: copulatio – funkcja określenia przysługująca przymiotnikom i czasownikom, appellatio – odnoszenie terminu do rzeczy istniejącej, ampliatio – zastosowanie terminów do przedmiotów nie tylko istniejących, lecz również do możliwych, i in.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956.

W. M.

prosylogizm. Drugi z dwóch sylogizmów powiązanych ze sobą tak, że wniosek pierwszego sylogizmu pełni rolę przesłanki drugiego sylogizmu. Natomiast pierwszy z tych sylogizmów jest episylogizmem w stosunku do drugiego.

Przykład:

episylogizm	*MaP* każdy kręgowiec	jest zwierzęciem
	SaM każdy ssak	jest kręgowcem.
prosylogizm	*SaP* każdy ssak	jest zwierzęciem
	RaS każdy wieloryb	jest ssakiem
	RaP każdy wieloryb	jest zwierzęciem

M. P.

przeciwdziedzina relacji. Przeciwdziedziną danej *relacji nazywamy zbiór wszystkich przedmiotów, do których co najmniej jeden przedmiot pozostaje w tej relacji. Oznaczając symbolem $\breve{D}(R)$ przeciwdziedzinę relacji R, zapisujemy tę definicję symbolicznie: $y \in \breve{D}(R) \equiv \vee x\ xRy$.

Przykład: przeciwdziedziną relacji bycia bratem jest zbiór wszystkich osób mających braci.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

przekładalność. *Relacja równoważnościowa zachodząca między wyrażeniami dającymi się wzajemnie wymieniać w pewnej klasie kontekstów, przy czym wymiana nie odbiera tym kontekstom pewnej żądanej od nich własności. Zależnie od tego, jak się tę żądaną własność określi, powstają różne odmiany relacji przekładalności, np. przekładalność z zachowaniem prawdziwości (łac. salva veritate), z zachowaniem tego samego znaczenia, z zachowaniem analityczności itp. Można zdefiniować wiele relacji równościowych znajdujących się między zwykłą równoważnością a równokształtnością, która stanowi najdalej posunięte podobieństwo tekstów.

Przekładalność może zachodzić w obrębie tego samego języka lub między wyrażeniami z różnych języków. Mówi się także o przekładalności jako relacji zachodzącej między całymi językami. Niech przekładalne wzajem na siebie wyrażenia dwóch języków nazywają się krótko przekładami. Języki J i J' są wzajemnie na siebie przekładalne wtedy i tylko, gdy dla każdego wyrażenia języka J istnieje w J' przynajmniej jeden przekład.

Powyższe pojęcie przekładalności zasługuje na miano przekładalności w sensie szerszym, dopuszczającym wszelkie rodzaje relacji równościowych między wyrażeniami. Gdy słowa „przekładalność" używa się w sensie węższym, przyjmuje się, jako warunek przekładalności, *równoznaczność lub równość definicyjną (*Definicja normalna).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Carnap: *MaN*; B. Stanosz: *Formalne teorie zakresu i treści wyrażeń*. „St. Log." XV 1964.

W. M.

przezroczystość semantyczna. Własność znaku polegająca na tym, że w trakcie używania go uwaga jest skierowana na przedmiot oznaczany, a nie na znak. Kto np. mówi „Księżyc już wszeszedł", myśli w tym momencie o wzejściu księżyca, a nie o swojej wypowiedzi na ten temat. Własność przezroczystości wnikliwie analizował Husserl w *Logische Untersuchungen*. T. 2 cz. 2.

Zob. też **intencjonalność.**

L. Koj: *Zasada przezroczystości a antynomie semantyczne*. „St. Log." XIV 1963; – – W. V. O. Quine: *Reference and modality*. [W:] *LPV*; A. Schaff: *Wstęp do semantyki*. 1960.

W. M.

psychologizm w logice. Pogląd interpretujący w pewien sposób definicję logiki jako nauki o warunkach trafnego myślenia. Wedle tej interpretacji logika jest częścią psychologii, ponieważ traktuje o myśleniu, a więc o procesie psychicznym, tyle że rozpatrywanym z normatywnego lub oceniającego punktu widzenia (trafność, poprawność itp.). Do najwybitniejszych przedstawicieli psychologizmu należał F. Brentano (1838–1917).

Możliwa jest inna niż psychologistyczna interpretacja owej definicji. Jan Łukasiewicz proponuje odróżniać dwa znaczenia każdego z takich słów, jak sąd, wnioskowanie, dowodzenie, rozumowanie, myślenie. W jednym znaczeniu istotnie słowa te odnoszą się do aktów psychicznych, w drugim jednak do tego, co określa się czasem jako obiektywne korelaty tych aktów (niem. Obiektive- termin A. Meinonga); byłyby to przedmioty nie należące ani do świata fizycznego, ani do dziedziny zjawisk psychicznych, lecz do jakiegoś 'trzeciego świata'.

Nazwa „psychologizm" pochodzi od krytyków tego stanowiska, wśród których największą rolę odegrał E. Husserl.

E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. 1900; Kotarbiński: *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *Logika a psychologia* (1907). [W:] *Z zagadnień logiki i filozofii*. 1961; A. Pfänder: *Logik*. 1921.

W. M.

pytanie. Każde zdanie pytające (języka polskiego) zbudowane jest z partykuły pytajnej: „czy", „kto", „co", „który", „gdzie", „jak" itp., po której następuje zdanie w sensie logicznym albo tylko fragment zdania w sensie logicznym oraz znak zapytania. Słówko „czy" może być opuszczone bez zmiany sensu pytania, inne natomiast partykuły pytajne nie mogą być opuszczone.

Pytania zaczynające się od partykuły „czy" nazywa się pytaniami rozstrzygnięcia. Np.: „Czy na Marsie są istoty żywe?" Wszystkie inaczej zbudowane pytania zwane są pytaniami dopełnienia. Np.: „Kto jest pierwszym kosmonautą?"

Sama budowa pytania określa do pewnego stopnia oczekiwaną odpowiedź. Pytanie rozstrzygnięcia wyznacza dwie możliwe odpowiedzi, z których jedna jest równoważna ze zdaniem będącym częścią tego pytania, a druga jest zaprzeczeniem tamtego zdania. Np. pytanie: „Czy na Marsie są istoty żywe?" wyznacza dwie następujące odpowiedzi: 1° „Na Marsie są istoty żywe", 2° „Na Marsie nie ma istot żywych". Danie odpowiedzi na rozważane tu pytanie polega na rozstrzygnięciu, która z tych dwu możliwych odpowiedzi jest zdaniem prawdziwym. Tego rodzaju zdania pytające należą do tzw. dwuczłonowych pytań rozstrzygnięcia. Wyróżnia się ponadto wieloczłonowe pytania rozstrzygnięcia, np. „Czy Paryż leży nad Sekwaną, czy nad Loarą, czy nad Mozelą?" (zob. Giedymin).

Pytanie dopełnienia wyznacza tylko schemat odpowiedzi, zwany osnową pytania lub datum questionis (łac. dosłownie: dana pytania). Jest to funkcja zdaniowa, z której przez podstawienie odpowiednich wartości za zmienną (zmienne) uzyskuje się za każdym razem jakieś zdanie, prawdziwe lub fałszywe, będące jedną z możliwych odpowiedzi. Np. pytanie: „Kto jest pierwszym kosmonautą?" wyznacza następujący schemat odpowiedzi: „x jest pierwszym kosmonautą". Przez podstawienie w miejsce „x" nazw indywidualnych: Newton, Kopernik, Gagarin otrzymujemy różne możliwe odpowiedzi.

Odpowiedzi, które – jak powyższe – są do pewnego stopnia wyznaczone przez samą strukturę pytania, nazywają się odpowiedziami bezpośrednimi lub właściwymi czy ścisłymi. Wszystkie innego rodzaju odpowiedzi są to odpowiedzi pośrednie, inaczej zwane niewłaściwymi czy nieścisłymi. Np. na pytanie: „Czy na Marsie są istoty żywe?" można odpowiedzieć: „Na Marsie nie ma tlenu". Z tego zaś wynika, że na Marsie nie ma istot żywych, bo potrzebują one tlenu do istnienia. Tego rodzaju odpowiedź pośrednia jest odpowiedzią całkowitą. Niekiedy zaś daje się tylko częściową odpowiedź pośrednią, np. gdy na pytanie: „Kto jest pierwszym kosmonautą?" odpowiada się: „Jakiś Rosjanin jest pierwszym kosmonautą". Zdanie to wynika z odpowiedzi bezpośredniej: „Gagarin jest pierwszym kosmonautą", ponieważ Gagarin jest Rosjaninem. Odpowiedź częściowa eliminuje pewne spośród możliwych odpowiedzi bezpośrednich, dzięki czemu w pewnym stopniu zaspokaja ciekawość pytającego.

Istnieją pytania, na które nie można podać prawdziwej odpowiedzi bezpośredniej. Można podać tylko fałszywą. Przykład: „Kto jest królem Polski Ludowej?" Każda bezpośrednia odpowiedź na to pytanie będzie zbudowana według schematu: „x jest królem Polski Ludowej" i będzie zdaniem fałszywym. Należy tu odpowiedzieć: „Polska Ludowa nie jest królestwem". Odpowiedź tego typu nazywa się odpowiedzią znoszącą pozytywne założenie pytanie. Stwierdza ona fałszywość założenia „Polska Ludowa jest królestwem", które milcząco przyjął stawiający pytanie tu rozważane. Jest to tzw. pozytywne założenie pytania, założenie mówiące o istnieniu prawdziwej odpowiedzi na dane pytanie.

Istnieją również i takie pytania, na które nie można podać fałszywej odpowiedzi bezpośredniej. Każda odpowiedź jest prawdziwa. Przykład: „Która liczba parzysta dzieli się przez dwa?" Odpowiada się: „Każda liczba parzysta jest podzielna przez dwa". Jest to odpowiedź znosząca negatywne założenie pytania: „Pewne liczby parzyste nie dzielą się przez dwa", które pytający milcząco przyjmuje. Założenie to mówi o istnieniu fałszywych odpowiedzi bezpośrednich na dane pytanie. Jeżeli któreś z tych założeń jest fałszywe, to o odpowiadającym mu pytaniu mówi się, że jest to pytanie źle postawione lub pytanie niewłaściwe.

Dzięki temu, że każdemu pytaniu towarzyszą pewne założenia, które stawiający pytania przyjmuje (domyślnie), pytania przekazują pewne informacje: prawdziwe lub fałszywe, w zależności od tego czy prawdziwe, czy fałszywe są założenia pytania. Np. pytanie: „Czy widziałeś już samochód Kowalskiego?" informuje zapytanego, że Kowalski ma już samochód. Pytania, które zostały postawione w tym celu, aby przekazać zapytanemu pewne informacje, to tzw. pytania sugestywne.

Powyższa analiza pytań, pochodząca od K. Ajdukiewicza (1934), nie korzysta ze środków formalnych i nie wyczerpuje problematyki logicznej pytań; odznacza się ona jednak zaletami dydaktycznymi i jest rozpowszechniona w uniwersyteckim nauczaniu logiki w Polsce. W sprawie nowszych badań zob. Giedymin, Kubiński.

Zob. też **logika pytań.**

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zdania pytajne.* [W:] *JiP.* T. 1; – – *Logiczne podstawy nauczania.* 1934; J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia.* 1964; D. Harrah: *Communication. A logical model.* 1963; R. Ingarden: *Essentiale Fragen.* 1925; T. Kubiński: *Wstęp do logicznej teorii pytań.* 1970.

M. P.

R

rachunek Gentzena. Jest to pewna formalizacja rachunku kwantyfikatorów skonstruowana w latach 30-tych przez Gentzena. Wprowadza się w rachunku Gentzena pojęcie sekwencji, która jest uporządkowaną parą skończonych zbiorów formuł $\langle S, T\rangle$. Zwykle używa się bardziej sugestywnego zapisu $S \to T$; ściślej, jeśli $S = \{s_1, ..., s_n\}$, $T = \{t_1, ..., t_m\}$, to sekwencję $\langle S, T\rangle$ zapisujemy jako $s_1, ..., s_n \to t_1, ..., t_m$, nazywając S poprzednikiem, zaś T następnikiem sekwencji. Mówiąc nieformalnie, interpretujemy taką sekwencję jako implikację $s_1 \wedge ... \wedge s_n \Rightarrow t_1 \vee ... \vee t_m$, tzn. przecinki w poprzedniku interpretujemy jako koniunkcję, a w następniku jako alternatywy. W stosunku do zwykłej aksjomatyki rachunku kwantyfikatorów akcent przerzucony jest tutaj z aksjomatów, których jest mało (ściśle mówiąc jeden), na reguły wnioskowania, których jest obecnie wiele. Aksjomatem jest sekwencja $s_1, ..., s_n \to t_1, ..., t_m$ taka, że istnieje $i \leqslant n$ oraz $j \leqslant m$ takie, że $s_i = t_j$, a zatem w poprzedniku i w następniku występuje pewna formuła równocześnie.

Reguły wnioskowania są liczne. Są one postaci $\frac{P}{W}$ lub $\frac{P_1 P_2}{W}$, tzn. prowadzą od jednej sekwencji do drugiej lub od dwu do trzeciej. Podamy tu układ reguł dla języka opartego na symbolach $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\wedge$ $\vee$

$$\sim - \frac{S \to T, p}{S, \sim p \to T} \qquad \sim + \frac{S, p \to T}{S \to T, \sim p}$$

$$\wedge - \frac{S, p, q \to T}{S, p \wedge q \to T} \qquad \wedge + \frac{S \to T,\ p \mid S \to T, q}{S \to T,\ p \wedge q}$$

$$\vee - \frac{S, p \to T \mid S, q \to T}{S, p \vee q \to T} \qquad \vee + \frac{S \to p, q,\ T}{S \to p \vee q,\ T}$$

$$\wedge - \frac{S, p(x) \to T}{S, \wedge\, yp(y) \to T} \qquad \wedge + \frac{S \to T, p(x)}{S \to T, \wedge\, yp(y)}$$

$$\vee - \frac{S, p(x) \to T}{S, \vee\, yp(y) \to T} \qquad \vee + \frac{S \to T,\ p(x)}{S \to T,\ \vee y\, p(y)}$$

W regułach $\wedge +$ i $\vee -$ formuła $p(y)$ powstaje z $p(x)$ przez zastąpienie niektórych występowań zmiennej x zmienną y. W tym wypadku zmienna x nie może występować w S ani w T. W regułach $\wedge -$ i $\vee +$ $p(y)$ powstaje z $p(x)$ przez zastąpienie wszystkich występowań x przez y.

W pierwotnej formalizacji Gentzena występowała jeszcze tzw. reguła cięcia, jednak okazało się, że jest ona eliminowalna z systemu.

Rachunek Gentzena ze względu na postać reguł i ich jednoznaczność używany jest w badaniach teorii dowodu. Formalizm ten okazał się też dogodny w próbach maszynowego znajdowania dowodów twierdzeń. Istnieje szereg wariantów rachunku Gentzena, m. in. wersja Rasiowej i Sikorskiego.

Formalizm typu Gentzenowskiego można też stosować do szerszej klasy logik np. modalnych oraz tzw. słabych logik rzędu 2 (*Logiki uogólnione).

Zob. też **dedukcja naturalna – 2.**

G. Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schliessen.* "Math. Zeitschr." XXXIX. 1934; S. C. Kleene: *Introduction into metamathematics.* 1953; R. C. Lyndon: *O logice matematycznej.* 1968; H. Rasiowa, R. Sikorski: *The mathematics of metamathematics* 1963.

W. Mk

rachunek kwantyfikatorów (rachunek predykatów, rachunek funkcyjny).

1. Kwantyfikatory są to symbole określające ilość (łac. quantum) przedmiotów, o których orzeka się w zdaniu zawierającym te symbole. Z reguły owa charakterystyka ilości ogranicza się do dwóch przypadków: 1° orzekanie o wszystkich przedmiotach z branej pod uwagę dziedziny, że spełniają taki to a taki warunek; 2° orzekanie o niektórych, co jest równoznaczne z powiedzeniem, że przynajmniej jeden przedmiot spełnia taki a taki warunek. Pierwszy z wymienionych kwantyfikatorów nazywa się uniwersalnym lub dużym, drugi nazywa się szczegółowym lub małym lub egzystencjalnym; są one charakterystyczne dla klasycznego rachunku kwantyfikatorów, do którego daje się też dołączyć za pomocą definicji kwantyfikator „istnieje dokładnie jeden". W innych rachunkach nastąpiło pewne uogólnienie pojęcia kwantyfikatora, polegające na wprowadzeniu takich kwantyfikatorów, jak „istnieje przeliczalnie wiele", „istnieje nieprzeliczalnie wiele", „istnieje tak wiele X-ów jak Y-ów" itp.

Inny podział bierze pod uwagę typ obiektów, do których stosujemy kwantyfikatory. Każdy z tych typów jest reprezentowany przez odpowiadający mu rodzaj zmiennych: indywidua przez zmienne indywiduowe; zbiory (lub własności) indywiduów – przez predykaty denotujące owe zbiory lub przez odpowiednie zmienne predykatowe; zbiory zbiorów indywiduów – przez predykaty denotujące zbiory tego typu lub przez odpowiadające im zmienne; itd. Gdy formuła poprzedzona jest zwrotem „dla każdego x", „dla pewnego y" itp., mówimy, że dany kwantyfikator wiąże, odpowiednio, zmienną x, zmienną y itd. Rachunek

kwantyfikatorów nazywa się rachunkiem pierwszego rzędu, gdy kwantyfikatory wiążą w nim tylko zmienne indywiduowe. Nazywa się rachunkiem drugiego rzędu, gdy kwantyfikatory wiążą w nim także zmienne predykatowe odnoszące się do zbiorów indywiduów; trzeciego rzędu – gdy zmienne związane odnoszą się do zbiorów indywiduów; itd.

Im wyższa jest liczba określająca stopień rachunku, tym dalej sięga to, co nazwano zaangażowaniem ontologicznym (ang. ontological commitment) logiki, które wyraża się w stosowaniu kwantyfikatorów do zmiennych odpowiednio wysokiego typu. Gdy powiemy np. „dla każdego x istnieje (zbiór) Z, taki, że x należy do Z", to angażujemy się w sąd o istnieniu nie tylko indywiduów, lecz i zbiorów, czego nie czynimy, gdy poprzestajemy na logice pierwszego rzędu. Ową myśl, że akceptacji pewnej kategorii ontologicznej dokonujemy przez zastosowanie kwantyfikatorów do odpowiadającej kategorii zmiennych, wyraża znane powiedzenie Quine'a „istnieć – to być wartością zmiennej związanej".

Zalety rachunków wyższych rzędów polegają na udogodnieniach w formułowaniu twierdzeń (zob. Hilbert i Ackermann 1928), na tym, że pozwalają one wyrazić pewne idee filozoficzne (np. *Principium identitatis indiscernibilium). na tym wreszcie, że rachunek nieskończenie (przeliczalnie) wielu rzędów, zwany rachunkiem rzędu omega, którego pewną wersją jest prosta *teoria typów, stanowi odpowiednik *teorii mnogości; można więc w nim ugruntować arytmetykę. Powszechna jest jednak taka konstrukcja podstaw matematyki, że przyjmuje się teorię mnogości jako osobną teorię matematyczną, a do formalizacji rozumowań matematycznych używa się rachunku pierwszego rzędu; nadaje się on bowiem wystarczająco do tego celu, a przy tym posiada pożądaną własność zwaną pełnością (zob. odc. 5 poniżej) i w minimalny sposób angażuje ontologicznie (to ostatnie jest korzystne szczególnie z punktu widzenia *nominalizmu).

Stosunkowo obszerną dyskusję rachunków wyższych rzędów znaleźć można w pracach: Hilberta i Ackermanna 1928, Rogersa 1971, Gallina 1975, a pewne uwagi wprowadzające u Borkowskiego 1970 oraz u Borkowskiego i Słupeckiego w *Log. mat.*

Rachunek funkcyjny wyższych rzędów bywa też nazywany szerszym rachunkiem funkcyjnym, w odróżnieniu od węższego rachunku funkcyjnego, czyli rachunku pierwszego rzędu; przymiotnik „funkcyjny" bierze się tu z traktowania predykatów na wzór wyrażeń funkcyjnych, nie przesądza natomiast o obecności symboli funkcyjnych w ścisłym sensie (por. odc. 4 poniżej).

W dalszym ciągu artykułu zwrot „rachunek kwantyfikatorów", w skrócie **RK**, będzie używany na oznaczenie klasycznego rachunku kwantyfikatorów pierwszego rzędu, do którego ogranicza się niniejsze rozważanie.

Jeśli jakaś teoria jest wyrażona w języku rachunku pierwszego rzędu, a więc daje się w tym języku sformalizować, to jest nazywana teorią pierwszego rzędu lub teorią elementarną; przykładem teorii elementarnej jest *arytmetyka Peano, w której zasada indukcji sformułowana jest w postaci schematu (co nie wymaga kwantyfikowania zmiennej predykatowej). Teoria, która wymaga języka rachunku wyższego rzędu nazywa się teorią nieelementarną.

2. **Język RK.** Na słownik **RK** składają się następujące rodzaje wyrażeń:

(a) Nieskończenie wiele zmiennych zdaniowych:

$p\ q\ r\ p_1\ q_1\ r_1\ p_2\ q_2\ r_2\ p_3...$

(b) Nieskończenie wiele zmiennych indywiduowych:

$x\ y\ z\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2\ x_3...$

(c) Nieskończenie wiele parametrów indywiduowych:

$a\ b\ c\ a_1\ b_1\ c_1\ a_2\ b_2\ c_2\ a_3...$

Są to wyrażenia, które w kontekście rozpatrywanej formuły traktowane są jako stałe; takimi są litery a, b, c w równaniu $ax^2+bx+c=0$.

(d) Nieskończenie wiele predykatów n-argumentowych (górny indeks wskazuje liczbę argumentów):

$P^1\ Q^1\ R^1\ P_1^1\ Q_1^1\ R_1^1\ P_2^1\ Q_2^1\ R_2^1\ P_3^1...$

$P^2\ Q^2\ R^2\ P_1^2\ Q_1^2\ R_1^2\ P_2^2\ Q_2^2\ R_2^2\ P_3^2...$

i tak dalej ($n=1, 2, 3...$). Indeks górny będzie opuszczany, gdy predykat występuje łącznie ze swymi argumentami, ponieważ liczba towarzyszących argumentów wskazuje na kategorię symbolizowaną tym indeksem. Powyższe symbole są to także parametry, a więc w kontekście rozważanej formuły traktujemy je jako stałe, mianowicie jako predykaty (przy przejściu do rachunku drugiego rzędu symbole te stałyby się zmiennymi, podlegającymi wiązaniu przez kwantyfikatory, zaś parametrami byłyby wówczas predykaty orzekane o owych zmiennych).

(e) Stałe logiczne (numerowane dla ułatwienia odniesień):

1	2	3	4	5	6	7
$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\bigwedge$	$\bigvee$

Jest to notacja w tym sensie idiograficzna, że kształt symboli wskazuje na pewne zachodzące między nimi stosunki. To, że 3 jest odwróceniem 2 ma przypominać o prawach *dualności dotyczących koniunkcji i alternatywy, zaś analogiczny stosunek kształtów 6 (kwantyfikator ogólny) i 7 (kwantyfikator szczegółowy) ma przypominać o dualności dotyczącej kwantyfikatorów. Jednocześnie, podobieństwo kształtów przy różnicy rozmiarów między 2 i 6 wskazuje na rolę kwantyfikatora ogólnego jako uogólnionej koniunkcji: $\bigwedge xP(x)$, gdy rozważana dziedzina ma n elementów, to tyle, co $P(a_1) \wedge ... \wedge P(a_n)$; zaś $\bigvee xP(x)$ to tyle, co $P(a_1) \vee ... \vee P(a_2)$; jest to traktowanie kwantyfikatora szczegółowego jako uogólnionej alternatywy. Porównanie kształtów 4 i 5 wskazuje na rolę równoważności

jako obustronnej implikacji; zaś 4 jako znak implikacji i 1 jako znak negacji mają pewne walory skojarzeniowe (strzałka z kierunkiem wynikania, falista kreska ze znakiem minus). Pomimo tego rodzaju zalet owej symboliki będziemy dalej używać innej, dogodniejszej typograficznie, a będącej pewną odmianą *symboliki Peano-Russella (z tą różnicą, że implikacja oddawana jest strzałką, nie zaś „podkówką" ⊃)

1	2	3	4	5	6	7
~	.	∨	→	≡	( )	(E)

(f) Symbol *identyczności =.

RK mający w swym słowniku powyższy symbol (który w pewnych ujęciach **RK** nie występuje) jest nazywany rachunkiem kwantyfikatorów z identycznością. Symbol ten umożliwia wprowadzenie *deskrypcji i symboli funkcyjnych (zob. odc. 4 poniżej).

(g) Znakami interpunkcyjnymi są:
lewy nawias (i prawy nawias).

Stosowane, w miarę potrzeby, wielokrotnie nawiasy te wystarczają do budowania dowolnie złożonych formuł (istnieje też notacja, w której z różnym kształtem nawiasów wiąże się różny ich zasięg; tutaj stosować się będzie nawiasy jednolitego kształtu, mając na uwadze, że zasięg nawiasu jest jednoznacznie określony przez jego pozycję). Najmniejszym składnikiem formuły ujmowanym w nawiasy jest argument lub argumenty następujące po predykacie, np. $P(x)$, $Q(x, y)$; w celu skrócenia napisów będziemy nawiasy takie opuszczać wszędzie tam, gdzie nie będzie to stwarzać nieporozumień, pisząc Px, Qxy itp.

Składnia (syntaksa, gramatyka) **RK** wymaga specjalnego rodzaju zmiennych, żeby można było wygłaszać zdania o formułach; nazywamy je zmiennymi syntaktycznymi. Do reprezentowania formuł zdaniowych **RK** używać będziemy pierwszych dużych liter alfabetu łacińskiego (używa się też greckich liter φ, ψ etc.). I tak litera A, B etc przedstawia dowolną formułę zdaniową, np. p, $p \equiv q$, Px Qxy. Wyrażenie w rodzaju $A(x)$ wskazuje na to, że każda reprezentowana przez nie formuła zawiera zmienną x, a więc podpadają pod nie Px, Qxy, $(y)(Px \rightarrow Qxy)$, itd. Zamiast $A(x)$ można by pisać $A(...x...)$, gdzie litera A wskazuje, że mamy do czynienia z formułą zdaniową, zaś kropki wskazują, że zmienna x znajduje się w jakimś kontekście, np. predykatu P, innych zmiennych, stałych logicznych. Posługując się taką notacją metajęzykową definiujemy indukcyjnie zbiór formuł zdaniowych **RK** poprawnie zbudowanych, które będziemy nazywać krótko formułami.

Formułą **RK** jest bądź (I) formuła atomowa, tj. n-argumentowy predykat wraz z następującymi po nim n argumentami; bądź (II) formuła złożona, powstająca z posiadanych już formuł A, B w jeden z następujących sposobów: (IIa) przez poprzedzenie A znakiem negacji; (IIb) przez połączenie A i B znakiem koniunkcji lub alternatywy lub implikacji lub równoważności; (IIc) przez poprzedzenie A kwantyfikatorem. Takie i tylko takie ciągi symboli są formułami **RK**.

Formułę $(x)A(x)$ czytamy: dla każdego x (zachodzi) $A(x)$. Formułę $(Ex)A(x)$ czytamy: dla pewnego x $A(x)$; lub też: istnieje takie x, że $A(x)$. Formuła w nawiasach występująca po kwantyfikatorze nazywa się zasięgiem tego kwantyfikatora. Wystąpienie zmiennej w A nazywa się związane (przez kwantyfikator bezpośrednio poprzedzający A), gdy dana zmienna występuje w zasięgu tego kwantyfikatora. Wystąpienie zmiennej w A nazywa się wolne, gdy nie jest związane. Nazywamy x zmienną wolną w A, gdy przynajmniej jedno wystąpienie x w A jest wolne; nazywamy x zmienną związaną w A, gdy przynajmniej jedno wystąpienie x w A jest związane.

3. Aksjomaty i reguły wnioskowania. Jako przykład jednego z ujęć **RK** przedstawimy system z *Grundlagen* Hilberta i Bernaysa – z pewnymi różnicami technicznymi, m. in. tą, że zmienne syntaktyczne będą używane nie tylko do zapisu reguł, lecz także do zapisu twierdzeń języka-przedmiotowego (w *Grundlagen* do tego drugiego celu stosuje się inny rodzaj zmiennych). W ten sposób, zamiast twierdzeniami **RK** posługujemy się ich opisami syntaktycznymi w metajęzyku, przy czym symbole ~, → itd. brane są wówczas w supozycji materialnej, tj. jako nazwy równokształtnych z nimi stałych logicznych, zaś zmienne x, y, z etc. pełnią rolę zmiennych syntaktycznych reprezentujących zmienne indywiduowe języka przedmiotowego (czasem używa się do tego celu zmiennych o innym kształcie, ale nie jest to konieczne, ponieważ kontekst zmiennych syntaktycznych A, B etc. wskazuje na metajęzykowy charakter x, y etc., podczas gdy kontekst predykatów z języka przedmiotowego, jak P, Q czy R, wskazuje na funkcję zmiennych indywiduowych).

Jako aksjomaty przyjmujemy wszystkie twierdzenia *rachunku zdań, a ponadto wszystkie formuły podpadające pod następujące dwa schematy (dzięki użyciu tych zapisanych w metajęzyku schematów staje się zbędna reguła podstawiania):

A1 $(x)B(x) \rightarrow B(a)$
A2 $B(a) \rightarrow (Ex)B(x)$.

Regułami wnioskowania (regułami dedukcyjnymi) są: reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego (DU) i reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego (DE).

DU Z $B \rightarrow A(x)$ wolno wnosić $B \rightarrow (x)A(x)$
DE Z $A(x) \rightarrow B$ wolno wnosić $(Ex)A(x) \rightarrow B$,

gdzie $A(x)$ jest dowolną formułą, w której x występuje jako zmienna wolna, zaś B jest formułą, w której x nie występuje jako wolna. To zastrzeżenie co do B jest niezbędne, żeby prawdziwa formuła poddana przekształceniu w myśl którejś z tych reguł nie stała się w wyniku przekształcenia fałszywa. Niech np. $B \rightarrow A(x)$ będzie for-

mułą $(x < 2) \rightarrow (x < 3)$, a więc prawdziwym zdaniem arytmetycznym, w którym x, wbrew powyższemu zastrzeżeniu, jest wolna w B. Wtedy zastosowanie DU, wraz z odpowiednio dobranym podstawieniem za x w poprzedniku, prowadzi do fałszywej implikacji: $(1 < 2) \rightarrow (x)(x < 3)$. Podobnie, stosując DE, wraz z odpowiednim podstawieniem, do tej samej co wyżej formuły, otrzymamy fałszywą implikację: $(Ex)(x < 2) \rightarrow (4 < 3)$.

Powyższe dwie reguły wnioskowania nazywamy (w danym systemie) pierwotnymi, ponieważ przyjęte są bez dowodu. Z reguł pierwotnych można otrzymywać, w drodze odpowiednich przekształceń, reguły wtórne. W rozważanym systemie należy do wtórnych reguła generalizacji: Z $A(x)$ wolno wnosić $(x)A(x)$, otrzymana z DU w wyniku następującego rozumowania.

1	$A(x)$	założenie
2	$A(x) \rightarrow ((p \vee \sim p) \rightarrow A(x))$	tw. rach. zdań
3	$(p \vee \sim p) \rightarrow A(x)$	odrywanie z 1 i 2
4	$(p \vee \sim p) \rightarrow (x)A(x)$	DU
5	$(x)A(x)$	odrywanie z $p \vee \sim p$ i 4.

Oto wybór często używanych twierdzeń **RK** zapisanych w formie równoważności lub implikacji; należy zauważyć, że dla tych, które są zapisane poniżej w formie implikacji implikacje odwrotne nie są twierdzeniami **RK**.

$(x)Ax \equiv \sim(Ex) \sim Ax$
$(Ex)Ax \equiv \sim(x) \sim Ax$
$(x)(Ax . Bx) \equiv ((x)Ax . (x)Bx)$
$(Ex)(Ax . Bx) \rightarrow ((Ex)Ax . (Ex)Bx)$
$(Ex)(Ax \vee Bx) \equiv ((Ex)Ax \vee (Ex)Bx)$
$((x)Ax \vee (x)Bx) \rightarrow (x)(Ax \vee Bx)$
$(x)(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow ((x)Ax \rightarrow (x)Bx)$
$(x)(Ax \rightarrow Bx) \equiv \sim(Ex)(Ax . \sim Bx)$

Dalsze prawa zapiszemy za pomocą predykatu dwuargumentowego R.
$(x)(y)Rxy \equiv (y)(x)Rxy$
$(Ex)(Ey)Rxy \equiv (Ey)(Ex)Rxy$
$(Ey)(x)Rxy \rightarrow (x)(Ey)Rxy$.

Pierwsze z powyższej listy praw nadaje się do tego, by zostać użyte jako definicja kwantyfikatora ogólnego przez szczegółowy, jeśli jakiś system nie przyjmuje obu w charakterze terminów pierwotnych; analogicznie, drugie na liście twierdzenie nadaje się na definicję kwantyfikatora szczegółowego za pomocą ogólnego. Pewne bezpośrednie konsekwencje tych równoważności są określane mianem: prawa De Morgana dla kwantyfikatorów; są to formuły:

$\sim(x)Ax \equiv (Ex) \sim Ax$
$\sim(Ex)Ax \equiv (x) \sim Ax$.

4. RK z identycznością i funkcjami. Dołączenie znaku identyczności, należącego do kategorii predykatów dwuargumentowych oraz symboli funkcyjnych (symboli operacji)

$$f\ g\ h\ f_1\ g_1\ h_1\ f_2\ g_2\ h_2\ f_3 \ldots$$

do języka **RK** umożliwia dogodny zapis formuł matematycznych, stanowi także pewien środek w badaniach metamatematycznych (por. Hilbert, Bernays *Grundlagen* t. 2). Identyczność w **RK** charakteryzuje się jako relację między indywiduami zwrotną, przechodnią i symetryczną, tj. jako relację równoważnościową. Jest ona też charakteryzowana za pomocą warunku

$$(x = y) \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)),$$

który wskazuje na własność zwaną ekstensjonalnością (*Identyczność).

Korzystając z symbolu identyczności i odpowiednich predykatów można wprowadzać definicyjnie symbole funkcyjne. Trzeba w tym celu korzystać z predykatów denotujących relacje jednoznaczne, czyli funkcje. Oto przykład takiego definicyjnego przejścia od predykatu „x jest następnikiem y", w skrócie „Nxy", do funkcji następnika symbolizowanej literą „s": $x = s(y) \equiv Nxy$. Inny przykład: od predykatu trójargumentowego S, który w kontekście $Sxyz$ czytamy: x jest sumą y i z, przechodzimy do zapisu funkcyjnego: $x = y + z$.

Tak więc, wprowadzenie symboli funkcyjnych nie powoduje istotnego rozszerzenia języka **RK**, cokolwiek bowiem da się wyrazić za pomocą formuł funkcyjnych, da się też wyrazić za pomocą formuł predykatowych wskazujących, przy użyciu znaku identyczności, na jedyność odpowiedniego członu relacji denotowanej predykatem, np.

$$(y)(Ex)(Nxy . (z)(Nzy \rightarrow x = z)),$$

gdzie Nzy czytamy, jak wyżej: x jest następnikiem y; jest to sformułowanie bardziej zgodne z szykiem języka polskiego, natomiast powiedzenie „następnikiem y jest x", w skrócie „Nyx", lepiej harmonizuje z konwencją, że w relacji jednoznacznej jedyność przysługuje drugiemu członowi relacji (*Teoria relacji – 7).

5. Metamatematyczne własności RK. Niesprzeczność **RK** została wykazana przez Hilberta i Ackermanna 1928. *Zupełność systemu (1) i (2), określane łącznym mianem zupełności syntaktycznej, nie przysługują **RK**. Przysługuje mu natomiast zupełność semantyczna (*Zupełność systemu (3)), zwana też pełnością reguł wnioskowania lub, krótko, pełnością. Udowodnił to Gödel 1930; rozumowanie Gödla przytacza Mostowski 1948, Church 1956, a także, z pewnymi modyfikacjami Hilbert i Ackermann w drugim wydaniu (1938) pracy 1928; także Hilbert i Bernays w *Grundlagen*. Henkin 1949 podał prostszą wersję dowodu pełności (Henkin 1950 dowodzi dla logiki wyższych rzędów pełności w pewnym, odpowiednio zmodyfikowanym, sensie). Wersję Henkina 1949 przedstawiają m. in. Copi 1954 i Rogers 1971. Inny dowód, oraz topologiczną interpretację twierdzenia o pełności podaje Beth w

Foundations; pewien dowód korzystający ze środków topologii i algebry pochodzi od Rasiowej i Sikorskiego 1950. Dowody niesprzeczności i pełności **RK** można też znaleźć w pracach: Grzegorczyk *Log. mat.*, Hunter 1971, Kleene 1952, Mendelson 1979, Shoenfield 1967. Szkic argumentacji na rzecz pełności pewnego systemu **RK** zawiera się w haśle **Dedukcja naturalna**, odc. 4.

*Rozstrzygalność nie przysługuje **RK** jako całości, co udowodnił Church 1936 (zob. też prace cytowane wyżej). Dla pewnych fragmentów **RK** udowodniono, że są one rozstrzygalne; przegląd tych fragmentów daje Ackermann 1968; zob. też **rozstrzygalność**.

6. Pewne odmiany RK. Gdy **RK** z identycznością i funkcjami ujmowany jest zgodnie z tradycją wywodzącą się z *Principia*, zawiera wówczas pojęcie *deskrypcji i szereg twierdzeń dotyczących deskrypcji (określonej); do tej tradycji nawiązują Hilbert i Bernays (*Grundlagen*), Carnap (*Symb. log.*) i in., a w szczególności Rosser 1953.

Hilbert i Bernays (*Grundlagen*, t. 2) definiują deskrypcję nieokreśloną w ten sposób, że w definicji deskrypcji określonej opuszczają warunek jedyności. Tak określony symbol, nazwany η-operatorem, wprowadza się za pomocą reguły wnioskowania, która pozwala z $(\mathrm{E}x)A(x)$ wywnioskować $A((\eta x)A(x))$. Deskrypcje nieok. być ujmowane, przynajmniej w pewnych kontekstach, jako formalne odpowiedniki przedimków nieokreślonych języka naturalnego; sprawę tę rozważa obszernie Reichenbach 1948.

W *Grundlagen* η-operator służy jako środek pomocniczy do wprowadzenia innego symbolu, mianowicie ε-operatora (operatora epsilonowego), który pełni ważną rolę w procesie eliminowania zmiennych związanych (potrzebnym m. in. dla dowodu niesprzeczności **RK**). Operator epsilonowy jest zdefiniowany za pomocą η-operatora w sposób następujący:

$$(\varepsilon x)A(x) \equiv (\eta x)((\mathrm{E}y)A(y) \rightarrow A(x)).$$

Można rozszerzyć **RK** dołączając doń kwantyfikatory o ograniczonym zakresie, tj. takie, które są stosowalne do pewnego podzbioru danej dziedziny, wyodrębnionego za pomocą odpowiedniego predykatu. Rozszerzenie to dokonuje się za pomocą następujących definicji:

$$\text{piszemy } (x_A)B(x) \text{ zamiast } (x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\text{piszemy } (\mathrm{E}x_A)B(x) \text{ zamiast } (\mathrm{E}x)(A(x) \cdot B(x)).$$

Przy innych notacjach, gdy nawiasy nie wchodzą w skład kwantyfikatora, kwantyfikatory o ograniczonym zakresie mają, odpowiednio, postać: $\bigwedge_{A(x)} B(x)$, $\bigvee_{A(x)} B(x)$. Omówienie tego rodzaju kwantyfikatorów podają m. in. Słupecki, Borkowski w *Log. mat.*

Istnieją inne jeszcze odmiany kwantyfikatorów, które się pojawiły w ostatnim okresie rozwoju logiki; zob. Barwise 1977. Osobne zagadnienie, szeroko dyskutowane w związku z rozwojem lingwistyki formalnej (matematycznej) stanowi stosunek kwantyfikatorów z rachunków logicznych do ich odpowiedników w języku naturalnym; w tej sprawie zob. m. in.: Fitch 1976, Hintikka 1976 oraz niektóre pozycje w zbiorze Marciszewskiego 1978.

W. Ackermann: *Solvable cases of the decision problem*. 1968; J. Barwise et al. (eds): *Handbook of mathematical logic*. 1977; Beth: *Foundations*; L. Borkowski: *Logika formalna*. 1970; Carnap: *Symb. log.*; A. Church: *A note on the Entscheidungsproblem*. „JSL" I 1936; – – *Math. log.*; L. M. Copi: *Symbolic logic*. 1954; F. B. Fitch: *The relation between natural languages and formalized languages*. [W:] S. Körner (ed.): *Philosophy of logic*. 1976; K. Gödel: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. „MMP" XXXVII 1930; Grzegorczyk: *Log. mat.*; L. Henkin: *The completeness of first-order functional calculus*. „JSS" XIV 1949; – – *Completeness in the theory of types*. „JSS" XV 1950; D. Hilbert, W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*. 1928; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; J. Hintikka: *Quantifiers in logic and quantifiers in natural languages*. [W:] S. Körner (ed.): *Philosophy of logic*. 1976; G. Hunter: *Metalogic: an introduction to the metatheory of standard first-order logic*. 1971; S. C. Kleene: *Introduction to metamathematics*. 1952; W. Marciszewski (ed.): *Studies in formal linguistics*. „St. Log." (zeszyt monotematyczny) XXXVII 1978; E. Mendelson: *Introduction to mathematical logic*. 1979; Mostowski: *Log. mat.*; H. Rasiowa, R. Sikorski: *A proof of the completeness theorem of Gödel*. „Fund. Math." XXXVII 1950; Reichenbach: *Elements*; R. Rogers: *Mathematical logic and formalized theories: a survey of basic concepts and results*. 1971; J. B. Rosser: *Logic for mathematicians*. 1953; J. Shoenfield: *Mathematical logic*. 1967; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

rachunek nazw. Teoria logiczna, w której formułach występują zmienne nazwowe, tj. zmienne, za które wolno podstawiać *nazwy. Taką teorią jest np. *sylogistyka zdań asertorycznych, w której podstawową formułą, czyli *formułą atomiczną jest wyrażenie złożone z dwóch zmiennych i pewnej stałej logicznej. Należy tu również *ontologia Leśniewskiego.

W. M.

rachunek zbiorów (algebra zbiorów). Rachunek zbiorów jest częścią *teorii mnogości, wykładaną zwykle jako pierwszy rozdział tej teorii; może być jednak traktowany również jako odrębna teoria, będąca jedną z *interpretacji *algebry Boole'a. Specyficzne symbole tego rachunku, jakimi są symbole działań na zbiorach (dodawanie, mnożenie, dopełnianie i ewentualnie inne), można wyprowadzić aksjomatycznie (*Definicja aksjomatyczna) lub za pomocą definicji korzystających z symboliki *rachunku zdań (liczba aksjomatów zostaje wtedy ograniczona do minimum). Niniejsze przedstawienie rachunku zbiorów idzie za tym drugim ujęciem (reprezentowanym przez podręcznik Słupeckiego i Borkowskiego), jako dogodniejszym dydaktycznie.

Terminami pierwotnymi są: symbol 1 oznaczający zbiór pełny, oraz symbol $\in$ oznaczający relację przynależenia elementu do zbioru. Zwrot $x \in A$ czyta się: „x jest elementem zbioru A", lub: „x należy do zbioru A", albo też: „x

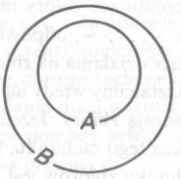
jest A". Za pomocą wyżej wymienionych pojęć pierwotnych i terminów logicznych definiuje się pozostałe terminy rachunku zbiorów. Oto ważniejsze definicje:

[D1] Zakresowa równość zbiorów. Dwa zbiory A i B są zakresowo równe wtedy i tylko, gdy każdy element jednego z nich jest elementem drugiego:

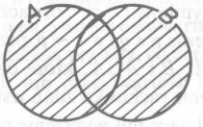
$$A \doteq B \equiv \wedge x(x \in A \equiv x \in B).$$

Np. zbiór trójkątów równobocznych jest zakresowo równy zbiorowi trójkątów równokątnych.

[D2] Inkluzja. Zawieranie się zbiorów. Podzbiór. Zbiór A zawiera się w zbiorze B, inaczej: pomiędzy zbiorem A i zbiorem B zachodzi relacja inkluzji, albo też: zbiór A jest podzbiorem (częścią) zbioru B, wtedy i tylko, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, przy czym zbiór B może zawierać elementy nie należące do zbioru A:



Rys. 1



Rys. 2

$$A \subset B \equiv \wedge x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Np. zbiór prostokątów (A) zawiera się w zbiorze czworokątów (B). Rys. 1.

[D3] Dodawanie zbiorów. Suma zbiorów. Działanie na zbiorach, w wyniku którego powstaje suma tych zbiorów, nazywa się dodawaniem zbiorów. Suma zbiorów A i B, jest to taki zbiór $A \cup B$, którego elementy należą bądź do jednego, bądź do drugiego zbioru:

$$x \in A \cup B \equiv (x \in A \vee x \in B).$$

Np. suma zbioru matematyków (A) i zbioru poetów (B) jest to zbiór, do którego należą zarówno matematycy, jak i poeci (Rys. 2).

[D4] Mnożenie zbiorów. Część wspólna zbiorów. Działanie na zbiorach prowadzące do utworzenia części wspólnej tych zbiorów nazywamy mnożeniem zbiorów. Część wspólna zbiorów A i B, jest to zbiór $A \cap B$, zawierający wszystkie i tylko te elementy, które należą zarazem do zbioru A i do zbioru B.

$$x \in A \cap B \equiv (x \in A \wedge x \in B).$$

Np. częścią wspólną zbioru liczb podzielnych przez 3 (A) i zbioru liczb podzielnych przez 2 (B) jest zbiór liczb podzielnych przez 6 (Rys. 3).

[D5] Relacja nieprzynależenia elementu do zbioru, x nie należy do zbioru A, wtedy i tylko, gdy nieprawdą jest, że x należy do zbioru A (piszemy $\in$ lub $\in$).

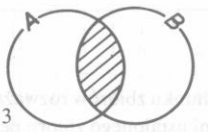
$$x \bar{\in} A \equiv \sim(x \in A).$$

Np.: Sokrates nie jest matematykiem.

[D6] Odejmowanie zbiorów. Różnica zbiorów. Działanie na zbiorach, w wyniku którego tworzy się różnica zbiorów, nazywa się odejmowaniem zbiorów. Różnica zbiorów A i B, jest to zbiór $A-B$ złożony wyłącznie z wszystkich elementów, które należą do zbioru A, lecz nie należą do zbioru B:

$$x \in A-B \equiv (x \in A \wedge x \bar{\in} B).$$

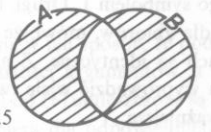
Np. różnicą zbioru książek naukowych A i zbioru książek z zakresu matematyki B jest zbiór książek naukowych, w których nie ma książek matematycznych (Rys. 4).



Rys. 3



Rys. 4



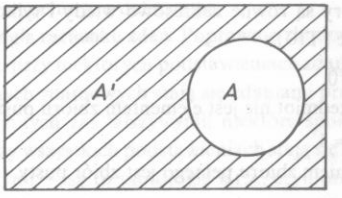
Rys.5

[D7] Różnica symetryczna. Różnica symetryczna zbioru A i B jest to zbiór $A \div B$ złożony wyłącznie z wszystkich elementów, które należą do zbioru A, lecz nie należą do zbioru B, bądź z elementów, które należą do zbioru B, lecz nie należą do zbioru A:

$$x \in A \div B \equiv (x \in A-B \vee x \in B-A).$$

Np. różnicą symetryczną zbioru liczb parzystych i zbioru liczb podzielnych przez 3 jest zbiór złożony z liczb parzystych, lecz nie podzielnych przez 3 (A), jak 2, 4, 8,... oraz z liczb podzielnych przez 3, lecz nie parzystych, jak 3, 9, 15... (B) (Rys. 5).

[D8] Uzupełnienie (dopełnienie) zbioru. Uzupełnienie zbioru A do zbioru pełnego 1, jest to zbiór A', obejmujący te i tylko te wszystkie elementy, które nie należą do zbioru A:



Rys. 6

$$x \in A' \equiv x \bar{\in} A.$$

Jeżeli przez zbiór pełny będziemy rozumieli zbiór wszystkich ludzi, oznaczony prostokątem na rys. 6, a przez zbiór A zbiór poetów, to przez uzupełnienie zbioru A należy

rozumieć zbiór wszystkich ludzi, którzy nie są poetami: część prostokąta zakreskowana.

[D9] Zbiór pusty 0. Zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym. Ponieważ zaś zbiór pełny obejmuje wszystkie rozważane przedmioty, można zdefiniować zbiór pusty jako zbiór elementów należących do dopełnienia zbioru pełnego:

$$x \in 0 \equiv x \in 1'$$

Przykładem zbioru pustego jest zbiór liczb, z których każda jest zarazem parzysta i nieparzysta.

Wyżej podano szereg ważniejszych definicji pojęć rachunku zbiorów. Rolę *aksjomatów rachunku zbiorów pełnią następujące formuły:

[A1] $x \in 1$

[A2] $A \doteq B \rightarrow A = B$.

Pierwszy z nich mówi, że w rachunku zbiorów rozważa się indywidua, które są elementami ustalonego zbioru pełnego, oznaczonego symbolem 1. Drugi, tzw. aksjomat ekstensjonalności dla zbiorów, mówi, że zbiory o tych samych elementach są identyczne. Z aksjomatów tych i definicji można wyprowadzić wiele twierdzeń rachunku zbiorów. Oto ważniejsze:

[T1] $A \subset 1$.

Każdy zbiór indywiduów jest podzbiorem zbioru pełnego.

[T2] $A \doteq A$

[T3] $A \doteq B \rightarrow B \doteq A$

[T4] $A \doteq B \wedge B \doteq C \rightarrow A \doteq C$.

Relacja równości zakresowej jest zwrotna [T2], symetryczna [T3] i przechodnia [T4].

[T5] $A \doteq B \rightarrow A \subset B$.

[T6] $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A \doteq B$.

[T7] $A \subset A$.

[T8] $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$.

Relacja inkluzji jest zwrotna [T7] i przechodnia [T8].

[T9] $A = B \rightarrow A \doteq B$.

[T10] $A \doteq B \equiv A = B$.

Dwa zbiory są równe zakresowo wtedy i tylko, gdy są identyczne [T10].

[T11] $x \overline{\in} 0$.

Żaden przedmiot nie jest elementem zbioru pustego.

[T12] $0 = 1'$.

Dopełnieniem zbioru pełnego jest zbiór pusty.

[T13] $1 = 0'$.

Dopełnieniem zbioru pustego jest zbiór pełny.

[T14] $A \cup 0 = A$.

[T15] $A \cap 1 = A$.

[T16] $A \cup 1 = 1$.

[T17] $A \cap 0 = 0$.

Są to przykładowo podane ważniejsze twierdzenia rachunku zbiorów.

Pomiędzy rachunkiem zbiorów a rachunkiem zdań istnieje związek tego rodzaju, że z wyrażeń rachunku zdań można otrzymywać wyrażenia rachunku zbiorów drogą odpowiednich przekształceń. Najpierw należy rozważyć formuły rachunku zdań, w których nie występują inne stałe poza symbolami $\vee$, $\wedge$, $\sim$. Tak zbudowane wyrażenia rachunku zdań można przekształcać w wyrażenia rachunku zbiorów według następujących sposobów:

1. Zastępując zmienne zdaniowe p, q, r... wyrażeniami $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$,... Wtedy np. wyrażenia $p \wedge q$, $p \vee \sim p$, przejdą w wyrażenia $x \in A \wedge x \in B$, $x \in A \vee \sim(x \in A)$. Tezy rachunku zdań zostają w ten sposób przekształcone w tezy rachunku zbiorów.

2. Zastępując zmienne zdaniowe p, q, r... odpowiednio przez zmienne A, B, C,..., reprezentujące zbiory indywiduów, oraz zastępując symbole $\vee$, $\wedge$, $\sim$, odpowiednio przez symbole $\cup$, $\cap$, $'$, oznaczające działania na zbiorach. Wyrażenia $p \wedge q$ i $p \vee \sim p$, przekształcimy wtedy na wyrażenia $A \cap B$ i $A \cup A'$, które oznaczają zbiory. Jeżeli dane wyrażenie rachunku zdań jest tezą tego rachunku, to odpowiadające mu wyrażenie rachunku zbiorów jest wyrażeniem oznaczającym zbiór pełny. Wobec tego, łącząc to wyrażenie znakiem identyczności z symbolem oznaczającym zbiór pełny, otrzymamy twierdzenie rachunku zbiorów. Wobec tego twierdzeniom: $p \vee \sim p$, $\sim(p \wedge \sim p)$ będą odpowiadały twierdzenia: $A \cup A' = 1$, $(A \cap A')' = 1$.

Rozważmy teraz te wyrażenia rachunku zdań, w których oprócz stałych $\vee$, $\wedge$, $\sim$, występują ponadto symbole $\rightarrow$, $\equiv$. Jeżeli łączą one wyrażenia rachunku zdań, w których nie występują inne stałe, jak $\vee$, $\wedge$, $\sim$, wtedy można zastąpić odpowiednio zmienne p, q, r przez zmienne A, B, C,..., symbole działań $\vee$, $\wedge$, $\sim$ przez $\cup$, $\cap$, $'$, symbol $\equiv$ przez znak identyczności $=$, zaś symbol $\rightarrow$ przez znak inkluzji $\subset$.

Przykłady: Z tez: $(p \wedge q) \rightarrow p$, $p \rightarrow (p \vee q)$ powstaną tezy rachunku zbiorów: $(A \cap B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$.

Twierdzenia rachunku zbiorów można sprawdzać graficznie za pomocą tzw. *diagramów Venna.

I. M. Copi: *Symbolic logic*. 1972; K. Kuratowski: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. 1962; Mostowski: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Suszko: *Wykłady*; Zinowjew: *Osnowy*.

M. P.

rachunek zdań (logika zdań, teoria zdań, teoria dedukcji). Rachunek ten zajmuje się związkami międzyzdaniowymi, ujmowanymi w zdaniach złożonych, powstających z łączenia zdań *funktorami zdaniotwórczymi od argumentów zdaniowych. W rachunku nie używa się konkretnych zdań, lecz posługuje się zmiennymi zdaniowymi, które reprezentują zdania; dlatego w logice zdań nie mamy do czynienia ze zdaniami, lecz z *funkcjami zdaniowymi, a

gdy za zmienne zdaniowe podstawić w funkcji zdaniowej konkretne zdania, funkcja przekształca się w zdanie. Prawdziwość lub fałszywość otrzymanego w ten sposób zdania zależy wyłącznie od prawdziwości lub fałszywości zdań składowych, nie zależy natomiast od ich treści; innymi słowy funkcje występujące w rachunku zdań są prawdziwościowe.

Pojęcia „rachunek zdań" używa się zamiennie z pojęciem „klasyczny rachunek zdań", mimo iż zbudowano także nieklasyczne rachunki zdań, np. *logiki wielowartościowe i *logiki modalne.

1. Język rachunku zdań. W *klasycznym rachunku zdań występują najczęściej stałe logiczne $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, które się odczytuje: nieprawda że, i, lub, jeżeli to, wtedy i tylko, gdy; mają one odpowiednio nazwy: negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność. Prócz stałych logicznych rachunek ten posługuje się zmiennymi zdaniowymi: p, q, r,... Za zmienne zdaniowe można podstawiać zdania w sensie logicznym, tj. wyrażenia prawdziwe bądź fałszywe, dlatego rachunek ten nazywa się dwuwartościowym: zdania mają wartość logiczną prawdy, co zapisujemy przy pomocy symbolu 1, lub mają wartość fałszu, wówczas piszemy 0.

Formułami poprawnie zbudowanymi k. r. z., czyli wyrażeniami sensownymi tego rachunku są:

1) wyrażenia proste: zmienne p, q, r,...

2) wyrażenia złożone:

a) jeśli φ jest wyrażeniem sensownym, to $\sim(\varphi)$ jest wyrażeniem sensownym,

b) jeśli φ jest wyrażeniem sensownym i ψ jest wyrażeniem sensownym, to wyrażenia $(\varphi)\wedge(\psi)$, $(\varphi)\vee(\psi)$, $(\varphi)\rightarrow(\psi)$, $(\varphi)\equiv(\psi)$ są także sensownymi (w systemach, w których występują inne dwuargumentowe funktory, uzyskuje się z wyrażeń sensownych φ i ψ nowe wyrażenia sensowne, wstawiając między (φ) i (ψ) symbol odpowiedniego funktora prawdziwościowego).

3) Tylko formuły opisane w 1) i 2) są sensowne.

Taka definicja wyrażenia sensownego należy do tzw. *definicji indukcyjnych.

Np. w myśl 1) q jest formułą, wobec tego w myśl 2a) $\sim(q)$ jest formułą, a stąd $\sim[\sim(q)]$ jest formułą (także w myśl 2a). Z kolei korzystając z powyższych wyników oraz z 2b) widzimy, że np.: $q\rightarrow\sim[\sim(q)]$ jest formułą. Ostatnią formułę zapiszemy prościej $q\rightarrow\sim(\sim q)$, gdyż można opuszczać zbędne nawiasy, ustaliwszy następującą kolejność łączenia wyrażeń: negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność; z reguły opuszcza się także nawiasy obejmujące pojedyncze zmienne. Np. w wyrażeniu $p\rightarrow(q\vee r)$ można opuścić nawias, $p\wedge(q\vee r)$ nie, gdyż po opuszczeniu go wyrażenie to przeczytalibyśmy $(p\wedge q)\vee r$, jako że koniunkcja wiąże mocniej od alternatywy.

W myśl powyższej definicji sensowne są np. wyrażenia: $p\wedge\sim p\rightarrow q$, $p\rightarrow(p\equiv q\wedge r)$; nie są natomiast wyrażeniami sensownymi: $p\sim q$, $p\wedge(\vee r)$.

K.r.z. jest dwuwartościowy, można przeto określić dla niego (wyczerpując wszystkie możliwości) cztery prawdziwościowe funktory jednoargumentowe, zaś dwuargumentowych funktorów określić można szesnaście:

I

φ	A	B	C	D
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

II

φ	ψ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Tabelki odczytuje się w ten sposób, że pod φ (pod φ i ψ) umieszczone są wartości argumentów, a w kolumnach pod A, B, C i D (od 1 do 16) umieszczone są wartości, jakie dana funkcja przybiera dla odpowiednich argumentów. Tak więc np. w tabelce I pod C w pierwszym wierszu (gdy φ ma wartość 1) stoi 0, zaś w drugim wierszu tabelki (w którym φ ma wartość 0) pod C stoi 1, czyli kolumna C definiuje negację. W tabelce II: 2 określa alternatywę, 5 – implikację, równoważność określona jest przez 7, a koniunkcja przez 8. W rachunku używa się tych funktorów, gdyż mają one znaczenie zbliżone do zwrotów języka potocznego. Pozostałe funktory jedno- i dwuargumentowe dają się za pomocą wymienionych tutaj zdefiniować, np. negacja i implikacja wystarczają już do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów. Z tabelki II funktor oznaczony cyfrą 9, zwany dysjunkcją, sam wystarcza do zdefiniowania pozostałych funktorów (tak samo jak i 15 – binegacja). Wszystkie prawdziwościowe funktory trójlub więcej argumentowe dają się zdefiniować za pomocą dwuargumentowych. Klasyczny rachunek zdań odznacza się więc tzw. pełnością definicyjną.

2. Tautologie rachunku zdań. Poprawnie zbudowane formuły k.r.z. przy niektórych podstawieniach zdań w miejsce zmiennych zdaniowych stają się zdaniami prawdziwymi, przy innych zaś fałszywymi; niektóre spośród nich jednak przy wszystkich podstawieniach stają się zdaniami prawdziwymi – są to tautologie k.r.z., czyli prawa logiczne k.r.z. Mając dane jakieś wyrażenie tego rachunku, łatwo sprawdzić czy jest ono tautologią; wystarczy w tym celu za zmienne zdaniowe podstawić w tym wyrażeniu odpowiednio zdania prawdziwe lub fałszywe we wszystkich możliwych kombinacjach i kolejno sprawdzić według tabelek funktorów, czy wychodzi prawda. Gdy we

wszystkich wypadkach otrzyma się prawdę, formuła jest tautologią. Przy sprawdzaniu używa się tabelek funktorów, czyli matryc, dlatego metoda ta nosi nazwę matrycowej. Nazywa się ją także *metodą zero-jedynkową, ponieważ zazwyczaj używa się jedynki jako symbolu zdania prawdziwego, zaś zera jako symbolu zdania fałszywego. Np. tautologią jest zasada tożsamości:

1° $p \to p$ (jeżeli p, to p), ponieważ podstawiając za p 1 mamy $1 \to 1$, co daje 1 oraz podstawiając za p 0 mamy $0 \to 0$, co daje 1.

2° $\sim (p \wedge \sim p)$ – zasada sprzeczności (nieprawda, że p i nie p) – podstawiając za p 1 mamy

$$\sim (1 \wedge \sim 1),$$
$$\sim (1 \wedge 0),$$
$$\sim (0),$$
$$1.$$

oraz podstawiając za p 0 mamy

$$\sim (0 \wedge \sim 0),$$
$$\sim (0 \wedge 1),$$
$$\sim (0),$$
$$1.$$

Inne wybrane tautologie:

3° $p \vee \sim p$ zasada wyłączonego środka (p lub nie p).

4° $p \to \sim(\sim p)$ (jeżeli p, to nieprawda, że nie p).

5° $\sim(\sim p) \to p$ (jeżeli nieprawda, że nie p, to p); 4° i 5° zwą się prawami podwójnego przeczenia.

6° $(\sim p \to p) \to p$ prawo Claviusa.

7° $(p \to \sim p) \to \sim p$ prawo redukcji do absurdu.

8° $\sim p \to (p \to q)$ prawo Dunsa Szkota.

9° $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

10° $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; 9° i 10° – prawa De Morgana.

11° $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$.

12° $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$; 11° i 12° – prawa transpozycji prostej.

13° $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \to \sim p$ prawo redukcji do absurdu z dwiema zmiennymi.

14° $q \to (p \to q)$ prawo symplikacji.

15° $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

16° $p \vee q \equiv q \vee p$.

17° $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ 15°, 16° i 17° – prawa przemienności.

18° $(p \to q) \wedge p \to q$ modus ponens.

19° $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ modus tollens.

20° $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ prawo sylogizmu hipotetycznego.

21° $(p \wedge q \to r) \to [p \to (q \to r)]$ prawo eksportacji.

22° $[p \to (q \to r)] \to (p \wedge q \to r)$ prawo importacji.

23° $(p \to q) \to [(\sim p \to q) \to q]$ prawo dylematu konstrukcyjnego.

24° $(p \to q) \to [(p \to \sim q) \to \sim p]$ prawo dylematu destrukcyjnego.

3. Z historii rachunku zdań. Wiele praw klasycznego rachunku zdań było znanych w starożytności; tym działem logiki zajmowali się zwłaszcza stoicy (*Logika stoików) i megarejczycy; w średniowieczu funkcje prawdziwościowe badali logicy XIII do XV w. Rachunek zdań w postaci współczesnej stworzył G. Frege. W 1879 r. opublikował sformalizowane ujęcie rachunku zdań w postaci aksjomatycznego systemu implikacyjno-negacyjnego. Peirce w r. 1885 podał tabelki dla funktorów prawdziwościowych. Następnie opracowano szereg systemów klasycznego r.z., wśród których do najciekawszych należą: a) system Whiteheada i Russella z *Principia mathematica*, posługujący się negacją i alternatywą, b) dysjunkcyjny, jednoaksjomatowy system Nicoda i c) implikacyjno-negacyjny system Łukasiewicza.

a) Aksjomatyka systemu A. N. Whiteheada i B. Russella:

Df. $p \supset q .=. \sim p \vee q.$

A1 Cokolwiek jest implikowane przez prawdziwe *zdanie atomowe, jest prawdą.

A2 $\vdash : p \vee p . \supset . p,$

A3 $\vdash : q . \supset . p \vee q,$

A4 $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p,$

A5 $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r),$

A6 $\vdash : . q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r,$

(A. N. Whitehead, B. Russell: *Principia mathematica*. T. 1 1910).

b) J. G. P. Nicoda jedyny aksjomat dysjunkcyjnego systemu logiki zdań, sformułowany za pomocą znaku tzw. dysjunkcji Sheffera (jedynego terminu pierwotnego w tym systemie)

$$[p/(q/r)]/([t/(t/t)]/\{(s/q)/[(p/s)/(p/s)]\}).$$

(J. G. P. Nicod: *A reduction in the number of primitive propositions of logic*. [W:] „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society". T. 19 1917).

J. Łukasiewicz uprościł w 1925 r. aksjomat Nicoda, nadając mu następującą postać:

DD*p*D*qr*DD*s*D*ss*DD*sq*DD*ps*D*ps* (ogłoszony drukiem w 1931 r.).

c) J. Łukasiewicza układ aksjomatyczny implikacyjno-negacyjnego systemu logiki zdań:

A1 C*C*C*pq*C*Cqr*C*pr*.

A2 C*C*N*ppp*.

A3 C*p*C*N*N*pq*.

(Aksjomatyka zbudowana w 1924 r., a zamieszczona w: J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej*, skrypt autoryzowany opr. M. Presburger, 1929).

W latach trzydziestych Jaśkowski oraz Gentzen zbudowali dyrektywalne, czyli założeniowe systemy rachunku zdań zwane systemami *dedukcji naturalnej. Są to systemy z takimi regułami dowodzenia, że zbiór ich założeń

może być pusty. Dzięki możności przeprowadzenia w tych systemach dowodów założeniowych procedura dowodowa jest znacznie uproszczona w stosunku do systemów aksjomatycznych.

Wszystkie systemy k.r.z. zarówno aksjomatyczne, jak i założeniowe, są sobie równoważne, tzn. że każde wyrażenie będące tezą w jednym z systemów jest także tezą (daje się udowodnić) we wszystkich pozostałych systemach. Wszystkie te systemy są pełne, czyli każda tautologia jest tezą każdego systemu, są także zupełne w sensie Posta, co znaczy, że każda formuła nie będąca tezą danego systemu po dołączeniu do zbioru jego tez prowadzi do sprzeczności (*Zupełność systemu). Niektórzy twórcy systemów aksjomatycznych k.r.z. starali się maksymalnie zmniejszyć liczbę aksjomatów oraz ich długość, dzięki czemu uzyskali układy aksjomatów niezależnych i o niezależnych terminach pierwotnych (*Niezależność formuł). Wiele lat tej sprawie poświęcił np. J. Łukasiewicz.

T. Czeżowski: *Logika* 1949; G. Frege: *Begriffsschrift*. 1879; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Kotarbiński: *Elementy*; J. Łukasiewicz: *Z zagadnień logiki i filozofii*, 1961; Mostowski: *Log. mat.*; *Principia*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; P. W. Tawaniec: *Woprosy tieorii suždienija*, 1955; Zinowjew: *Osnowy*.

K. Cz.

redukcja. Termin używany jako skrót wyrażeń; *rozumowanie redukcyjne, *definicja redukcyjna. Występuje też jako składnik zwrotów: reductio ad absurdum (*Dowodzenie–2), *redukcja (sprawdzanie) trybów.

W. M.

redukcja trybów (sprowadzanie trybów). W logice tradycyjnej określano tym terminem dowodzenie trybów sylogistycznych figury II, III i IV, za pomocą trybów figury I. Pierwsze litery występujące w nazwach trybów wskazują, do którego trybu podstawowego należy sprowadzać dany tryb pochodny, mianowicie od tej samej litery zaczynają się: nazwa trybu podstawowego i nazwy trybów pochodnych w stosunku do tego trybu. Np. tryby: Baroco (II fig.), Bocardo (III fig.) i Bamalip (IV fig.), sprowadza się do trybu Barbara (I fig.). Dwa są rodzaje redukcji trybów, mianowicie: redukcja wprost i redukcja nie wprost.

Redukcja wprost jakiegoś trybu do odpowiedniego trybu figury I, polega na wykazaniu za pomocą takich operacji, jak przedstawianie przesłanek, wnioskowanie według któregoś z praw konwersji oraz wnioskowanie według odpowiedniego trybu figury I, że z przesłanek rozważanego trybu pochodnego wynika jego wniosek. Np. tryb Calemes $(PaM \wedge MeS) \rightarrow SeP$ (IV fig.) sprowadza się do trybu Celarent w następujący sposób: Przestawia się przesłanki tego trybu $PaM \wedge MeS$, otrzymując w ten sposób układ: $MeS \wedge PaM$. Z przesłanek MeS i PaM wyprowadza się wniosek: PeS, według trybu Celarent. Z przesłanek PeS wynika SeP (konwersja zwykła). Wobec tego z $PaM \wedge MeS$ wynika SeP, co należało wykazać.

Redukcja nie wprost jakiegoś trybu do odpowiedniego trybu figury I polega na wykazaniu, że jeśli założy się, iż przesłanki rozważonego trybu pochodnego są prawdziwe, a wniosek tego trybu jest fałszywy, to z założeń tych, w drodze wnioskowania według określonego trybu figury I, wyprowadzi się wniosek sprzeczny z tymi założeniami, mianowicie z jedną z przesłanek rozważanego sylogizmu. A więc, jeżeli w danym sylogizmie przesłanki są prawdziwe, to i wniosek jest prawdziwy, gdyż w przeciwnym przypadku dochodzi się do sprzeczności. Tak np. dla udowodnienia nie wprost trybu Baroco: $(PaM \wedge SoM) \rightarrow SoP$ zakładamy najpierw, że prawdziwe są przesłanki tego trybu: PaM i SoM, a fałszywy jest wniosek: SoP, czyli że prawdziwe jest jego zaprzeczenie: SaP. Z koniunkcji: $PaM \wedge SaP$ wynika SaM według trybu Barbara. Ale SaM jest fałszywe, gdyż jest zaprzeczeniem SoM, uznanego za prawdziwe, na mocy założenia. Wobec tego któraś z przesłanek $PaM \wedge SaP$, z których wywnioskowano SaM, jest fałszywa, bo fałsz nie wynika z prawdy. Jeżeli więc PaM jest prawdziwe, to SaP jest fałszywe. Z tego zaś wynika, że SoP jest prawdziwe jako zdanie sprzeczne z SaP. A więc jeżeli prawdziwe są zdania PaM i SoM, przesłanki trybu Baroco, to prawdziwe jest również i SoP – wniosek tego trybu. To właśnie należało wykazać.

Tego rodzaju metoda dowodzenia sylogizmów staje się zbędna, gdy ujmuje się sylogistykę w system dedukcyjny i przeprowadza się dowody w sposób właściwy dla systemów dedukcyjnych.

Zob. też **sylogistyka zdań asertorycznych.**

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; J. Łukasiewicz: *Aristotle's syllogistic*. Wyd. 2 1957.

M. P.

reizm (konkretyzm; z łac. res – rzecz). Rozróżnia się reizm ontologiczny i reizm metodologiczny. Reizm ontologiczny wyraża się w tezie, że istnieją tylko rzeczy, pojęte jako bryły zlokalizowane w przestrzeni i trwające w czasie; nie istnieją natomiast (lub, w sformułowaniu metajęzykowym, nie ma sensu powiedzenie, że istnieją) zdarzenia, własności, zbiory, liczby itp.

Reizm metodologiczny to program postulujący taką konstrukcję języka, by dowolny jego zwrot można było przełożyć na wyrażenie zawierające (oprócz *funktorów) jedynie tzw. nazwy konkretne, tj. nazwy, których desygnatami są rzeczy pojęte w sensie reizmu ontologicznego. Postulat ten wyraża się inaczej w żądaniu eliminowalności nazw abstrakcyjnych, czyli pozornych; należą do nich nazwy zdarzeń, własności, zbiorów, liczb itp. (np. „strzał", „bitwa", „odwaga", „wodzostwo", „tysiąc"). Tak np. myśl zdania „Czas jest dla wszystkich najlepszym lekarzem", można oddać zdaniem „Każdy zostaje wyleczony po pewnym czasie", gdzie zwrot „po czasie" jest przysłów-

kiem, a nie nazwą abstrakcyjną, jak „czas". Zdanie „Dwoje ludzi idzie drogą" przekłada się na zdanie $\vee x, y$ (x idzie drogą $\wedge y$ idzie drogą), co eliminuje abstrakt „dwoje". Nie zawsze jednak taki przekład jest wykonalny. Dla niektórych *terminów teoretycznych (np. „pole elektromagnetyczne") trudno jest znaleźć postulowaną przez reizm metodę przekładu. Inną trudność stanowią pojęcia teorii mnogości, jak „zbiór pusty", „liczba pozaskończona" itp., nie dające się wyeliminować takimi metodami, jak termin „dwoje" w podanym wyżej przykładzie.

Autorem obu sformułowań reizmu, jak również samych terminów „reizm" i „konkretyzm" jest T. Kotarbiński, nawiązujący do idei S. Leśniewskiego (*Systemy Leśniewskiego). Podobne poglądy i tendencje reprezentują w USA W. V. O. Quine i N. Goodman. Prekursorem tych myśli był F. Brentano (1838–1907) w ostatniej fazie swojej twórczości, a jeszcze wcześniej autorzy średniowieczni reprezentujący tzw. *nominalizm.

K. Ajdukiewicz: *Wsprawie Uniwersaliów*. [W:] *JiP*. T. 1; A. Grzegorczyk: *O pewnych formalnych konsekwencjach reizmu*. [W:] *Fragmenty filozoficzne*, seria 2; J. Kotarbińska: *Kłopoty z istnieniem*. [W:] *Fragmenty filozoficzne*, seria 3; Kotarbiński *Elementy*; W. V. O. Quine: *On what there is* [W:] *LPV*.

W. M.

relacja. Wszelki związek czy zależność, zachodząca między przedmiotami danego (dowolnego) rodzaju, np. równość między liczbami, dłuższość między odcinkami, wynikanie między zdaniami, równobarwność między przedmiotami fizycznymi, pokrewieństwo między ludźmi. W logice współczesnej relacje utożsamia się zwykle ze zbiorami *par (trójek itd.) uporządkowanych, złożonych z przedmiotów, między którymi relacje te zachodzą.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

relacja antysymetryczna (r. przeciwsymetryczna). Relacja, która zachodząc między dowolnymi dwoma różnymi przedmiotami (elementami danego zbioru) w jednym kierunku, nie zachodzi między nimi nigdy w przeciwnym kierunku; symbolicznie: R jest relacją antysymetryczną $\equiv \wedge x \wedge y[x \neq y \wedge xRy \rightarrow \sim yRx]$. Przykłady: relacja $\leqslant$ między liczbami, relacja $\subset$ między zbiorami.

Tak rozumiana antysymetria jest osłabieniem asymetrii: każda *relacja asymetryczna jest też antysymetryczna, lecz nie odwrotnie. Termin „relacja antysymetryczna" bywa jednak również używany zamiennie z terminem „relacja asymetryczna" w sensie zdefiniowanym poniżej.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

relacja asymetryczna. Relacja, która zachodząc między dowolnymi dwoma przedmiotami (elementami danego zbioru) w jednym kierunku, nie zachodzi między nimi nigdy w przeciwnym kierunku; symbolicznie: R jest relacją asymetryczną $\equiv \wedge x \wedge y[xRy \rightarrow \sim yRx]$. Przykłady: relacja $<$ między liczbami, relacja ojcostwa między ludźmi.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

relacja częściowo porządkująca (porządek częściowy). Relacją częściowo porządkującą dany zbiór (porządkiem częściowym w tym zbiorze) nazywamy każdą *relację asymetryczną i (zarazem) przechodnią w tym zbiorze. Przykłady: relacja starszeństwa w zbiorze ludzi, relacja posiadania większej objętości w zbiorze brył geometrycznych.

Porządek częściowy jest osłabieniem porządku liniowego: każda *relacja porządkująca jest też relacją częściowo porządkującą, lecz nie odwrotnie.

Relacja częściowo porządkująca bywa też definiowana inaczej, mianowicie jako relacja zwrotna, antysymetryczna i przechodnia (*Relacja porządkująca). W tym sensie, w odróżnieniu od poprzedniego, np. relacja inkluzji $\subset$ jest porządkiem częściowym w zbiorze podzbiorów danego zbioru; odwrotnie – w przypadku relacji inkluzji właściwej $\not\subseteq$.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S.

relacja jednoznaczna (r. wielo-jednoznaczna, funkcja). Relacja, która każdemu elementowi swej *dziedziny przyporządkowuje dokładnie jeden element swej *przeciwdziedziny; symbolicznie: R jest relacją jednoznaczną $\equiv \wedge x \wedge y \wedge z[xRy \wedge xRz \rightarrow y = z]$. Przykłady: relacja zachodząca między osobami x i y wtedy, gdy y jest matką x; relacja zachodząca między liczbami x i y wtedy, gdy $y = x^2$.

Zob. też **funkcja; teoria relacji.**

B. S.

relacja porządkująca (porządek liniowy). Termin ten używany jest w dwóch znaczeniach. Relacją porządkującą (liniowo) dany zbiór (porządkiem liniowym w tym zbiorze) nazywana jest (1) każda *relacja asymetryczna, przechodnia i spójna w tym zbiorze, bądź (2) każda *relacja zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna w tym zbiorze. Definicje te nie są równoważne; są nawet rozłączne, asymetria relacji bowiem wyklucza jej zwrotność. Np. relacja niewiększości $\leqslant$, która nie jest porządkiem w zbiorze liczb w myśl definicji (1), jest porządkiem w tym zbiorze w myśl definicji (2); odwrotnie – w przypadku relacji mniejszości.

Zob. też **teoria relacji.**

B. S

relacja przechodnia. Relacja, która zachodząc między elementami x i y oraz y i z danego zbioru zachodzi zawsze między x i z; symbolicznie: R jest relacją przechodnią $\equiv \wedge x \wedge y \wedge z[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$. Przykłady: relacja

większości $>$ między liczbami, relacja bycia przodkiem między ludźmi.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja przeciwzwrotna. Relacja, która nie zachodzi między żadnym elementem danego zbioru a nim samym; symbolicznie: R jest relacją przeciwzwrotną $\equiv$ $\equiv \wedge x \sim xRx$. Przykłady: relacja większości $>$ w zbiorze liczb, relacja ojcostwa w zbiorze ludzi.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja równoważnościowa (r. równościowa, równość, równoważność). Relacją równoważnościową w danym zbiorze nazywamy każdą *relację zwrotną, symetryczną i zarazem przechodnią w tym zbiorze. Przykłady: rówieśnictwo w zbiorze ludzi, równobarwność w zbiorze przedmiotów fizycznych.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja spójna. Relacja, która zachodzi między dowolnymi dwoma (różnymi) elementami danego zbioru; symbolicznie: R jest relacją spójną $\equiv \wedge x \wedge y[x \neq y \rightarrow$ $\rightarrow (xRy \vee yRx)]$. Przykłady: relacja mniejszości $<$ w zbiorze liczb, relacja starszeństwa w zbiorze ludzi, w którym nie ma rówieśników.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja symetryczna. Relacja, która zachodząc między dowolnymi dwoma przedmiotami (elementami danego zbioru) w jednym kierunku, zachodzi też zawsze w kierunku przeciwnym; symbolicznie: R jest relacją symetryczną $\equiv \wedge x \wedge y[xRy \rightarrow yRx]$. Przykłady: relacja równoległości w zbiorze prostych na płaszczyźnie, relacja pokrewieństwa w zbiorze ludzi.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja wzajemnie jednoznaczna (r. jedno jednoznaczna). *Relacja jednoznaczna, której konwers jest także relacją jednoznaczną. Przykłady: relacja bycia dwukrotnością w zbiorze liczb, relacja bycia żoną w społeczeństwie monogamicznym.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

relacja zwrotna. Relacja, która zachodzi między każdym elementem danego zbioru a nim samym; symbolicznie: R jest relacją zwrotną $\equiv \wedge x xRx$. Przykłady: relacja równości $=$ w zbiorze liczb, relacja podobieństwa w zbiorze trójkątów.
Zob. też **teoria relacji.** B. S.

reprezentowanie. Stosunek zachodzący między zmienną a tymi wyrażeniami stałymi, które wolno, wedle reguł danego języka, podstawiać za daną zmienną. Wolno zaś podstawiać wtedy, gdy podstawiając w wyrażeniu sensownym, otrzymamy w wyniku znowu wyrażenie sensowne, np. w funkcji zdaniowej $F(x)$ – z języka *rachunku kwantyfikatorów – zmienna x reprezentuje nazwy indywidualne.
Kotarbiński: *Elementy.* W. M.

Romahnowa Seweryna (1904–1978). Od 1957 kierownik Katedry Logiki przy Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii w Uniw. Poznańskim. Główne prace: *Wieloznaczność a język nauki.* „Kwartalnik Filozoficzny" XVII 1948; *Kartezjański ideał wiedzy*, ibid. XIV 1951; *Indukcja a prawdopodobieństwo* „St. Log." V 1957; *Classification as a kind of distance function*, ibid. XII 1961; *Pewne pojęcie poprawnej inferencji i pragmatyczne pojęcie wynikania*, ibid. XIII 1962; *A generalized theory of classifications* (wspólnie z T. Batogiem), ibid. XVI 1965 i XVII 1965. W. M.

rozłożony termin (termin wzięty w całym zakresie). Termin pełniący rolę podmiotu w zdaniu ogólnym (twierdzącym lub przeczącym), bądź termin pełniący rolę orzecznika w zdaniu przeczącym (ogólnym lub szczegółowym) nazywany jest w logice tradycyjnej terminem rozłożonym.
Np. termin „prostokąt" jest rozłożony w następujących zdaniach: „każdy prostokąt jest czworobokiem", „żaden trójkąt nie jest prostokątem". Natomiast termin „czworobok" użyty w pierwszym przykładzie nie jest rozłożony.
Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*; Ziembiński: *Log. prakt.* M. P.

rozstrzygalność. Teoria nazywa się rozstrzygalna, gdy istnieje metoda pozwalająca o każdym wyrażeniu tej teorii rozstrzygnąć za pomocą skończonej liczby prób czy jest ono twierdzeniem danej teorii. Tego typu metody nazywają się efektywnymi.
Dokładniejsza definicja rozstrzygalności korzysta z pojęcia funkcji obliczalnej. Funkcja jest obliczalna, gdy istnieje takie jej określenie, które daje metodę obliczenia jej wartości w skończonej liczbie kroków (ściślejsza definicja obliczalności wymagałaby szeregu pojęć pomocniczych – zob. Grzegorczyk 1957). Zbiór jest obliczalny, gdy istnieje co najmniej jedna funkcja obliczalna pozwalająca o dowolnym przedmiocie (z zakresu zmienności funkcji) rozstrzygnąć czy jest on, czy nie jest elementem tego zbioru. Teoria jest rozstrzygalna, gdy zbiór jej twierdzeń jest obliczalny.
Przykładem teorii rozstrzygalnej jest *rachunek zdań, dla którego efektywnym sposobem rozstrzygania jest *metoda zerojedynkowa, sprowadzanie do *postaci normalnej etc. Wielu przykładów metod efektywnych dostarcza arytmetyka (np. rozstrzyganie czy jakaś liczba jest liczbą pierwszą).

Przykładem teorii nierozstrzygalnej jest *rachunek kwantyfikatorów. Pewne jednak fragmenty tego rachunku okazały się rozstrzygalne. Wśród nich znajduje się rachunek jednoargumentowy, a także pewne klasy twierdzeń określone przez swą postać normalną, np. twierdzenia w postaci normalnej nie zawierające ani jednego kwantyfikatora szczegółowego lub nie zawierające ani jednego kwantyfikatora ogólnego, lub ani jednego szczegółowego stojącego przed ogólnym, etc. Teorią rozstrzygalną jest także elementarna *algebra Boole'a, teoria dodawania liczb całkowitych i niektóre inne proste teorie matematyczne.

Pojęcie obliczalności powstało niezależnie u różnych autorów, stąd wyrażane ono bywa różnymi terminami, które okazały się równoważne. Można tu wymienić przykładowo Markowa pojęcie algorytmu i pojęcie maszyny Turinga (funkcja jest obliczalna, jeśli może być obliczona przez pewną maszynę, której opis pochodzi od Turinga, a także, niezależnie, od Posta). Są w użyciu inne jeszcze równoważne pojęcia. Teoria funkcji obliczalnych stanowi intensywnie rozwijany dział logiki matematycznej.

Zob. też **automat**; **funkcje rekurencyjne.**

A. Church: *A note on Entscheidungsproblem.* „JSL" I 1936; A. Grzegorczyk: *Zagadnienia rozstrzygalności.* 1957; – – *Log. mat.*; Kneale: *Development of logic*; Mostowski: *Log. mat.*

W. M.

równokształtność. *Relacja równoważnościowa zachodząca między wyrażeniami o takim samym kształcie. Zwrot „o takim samym kształcie" rozumie się w ten sposób, że między kształtami odnośnych wyrażeń zachodzą różnice istotne. To zaś jakie różnice są istotne, jest określone m. in. przez pewne konwencje; uważa się np. za równokształtne wyrazy pisane różnym krojem czcionek (majuskuła, kursywa itp.), jeśli tylko złożone są z tych samych liter alfabetu, napisanych w tej samej kolejności. Pojęcie równokształtności odgrywa doniosłą rolę w systemach sformalizowanych, gdzie reguły języka odwołują się wyłącznie do kształtu wyrażeń.

L. Koj: *Nazwy cudzysłowowe.* „St. Log." XV 1964; Reichenbach: *Elements*; Tarski: *Pojęcie prawdy.*

W. M.

równoliczność zbiorów. Zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y wtedy i tylko, gdy istnieje *relacja wzajemnie jednoznaczna, której dziedziną jest zbiór X a przeciwdziedziną – zbiór Y. Np. zbiór liczb całkowitych dodatnich jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych; równoliczność tych zbiorów ustala relacja, która zachodzi między całkowitymi liczbami dodatnimi x, y zawsze i tylko, gdy $y = 2x$. Przykład ten pokazuje, że zbiór nieskończony może być równoliczny ze swym podzbiorem właściwym, co oczywiście nie zdarza się w przypadku zbiorów skończonych. Ponieważ stosunek równoliczności jest *relacją równoważnościową, dokonuje on podziału zbioru wszystkich zbiorów zawartych w zbiorze uniwersalnym na *klasy abstrakcji tego stosunku. Klasy te nazywamy liczbami kardynalnymi (mocami) zbiorów, które do nich należą. Liczba kardynalna danego zbioru reprezentuje jego liczność, czyli liczbę jego elementów; w szczególności liczbom naturalnym odpowiadają liczby kardynalne zbiorów skończonych. Pojęcie równoliczności zbiorów pozwala więc – za pośrednictwem pojęcia liczby kardynalnej – zdefiniować pojęcie liczby. Definicja ta, podana przez Fregego, stanowi ważne osiągnięcie, wskazuje bowiem na możliwość zdefiniowania podstawowych pojęć matematyki za pomocą pojęć logicznych.

B. S.

równoważność. Dwa zdania (lub *funkcje zdaniowe) są równoważne, gdy wzajemnie z siebie wynikają. W zależności od rodzaju *wynikania powstają różne rodzaje równoważności.

Równoważność inferencyjna. Wyrażenia A, B są równoważne inferencyjnie (z łac. inferentio – wnioskowanie), gdy A wynika inferencyjnie z B oraz B wynika inferencyjnie z A, tj., gdy każde można otrzymać z drugiego, drogą przekształceń dozwolonych przez reguły danego systemu (zwane regułami dedukcyjnymi lub inferencyjnymi). Reguły tak się dobiera, by prowadziły zawsze od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych. Przykład: Formuła $\wedge\, xF(x) \rightarrow G(x)$ jest równoważna inferencyjnie formule $\wedge\, xF(x) \rightarrow \wedge\, xG(x)$, ponieważ drugą otrzymuje się z pierwszej na mocy reguły dołączania dużego kwantyfikatora, a pierwszą z drugiej na mocy reguły opuszczania tego kwantyfikatora.

Równoważność implikacyjna (materialna). Wyrażenia A, B są równoważne implikacyjnie, gdy oba mają tę samą wartość logiczną, tj. oba są prawdziwe lub oba fałszywe lub (w przypadku funkcji zdaniowych) przy tych samych podstawieniach za zmienne przybierają te same wartości. Zachodzi to wtedy, gdy każde z nich wynika implikacyjnie z drugiego.

Równoważność logiczna. Wyrażenia A, B są równoważne logicznie, gdy każde z nich wynika logicznie z drugiego. Innymi słowy: gdy wyrażenia $A \rightarrow B$ i $B \rightarrow A$ są tautologiami, dzięki czemu ich koniunkcja, czyli $A \equiv B$ jest również tautologią. Np. $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Niektórzy autorzy wprowadzają również pojęcie równoważności formalnej (zob. np. Czeżowski). Jest to obustronna implikacja formalna, przy czym przez implikację formalną rozumie się (w *Principia* i u niektórych innych autorów) implikację, która spełniona jest wtedy, gdy klasa przedmiotów spełniających poprzednik zawiera się w klasie przedmiotów spełniających następnik. Symbolicznie: $\wedge\, x[F(x) \rightarrow G(x)]$. Równoważność formalna ma więc postać: $\wedge\, x[F(x) \equiv G(x)]$.

T. Czeżowski: *Logika.* 1949; C. I. Lewis, C. H. Langford: *Symbolic logic.* 1932; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

równoznaczność (synonimiczność). *Relacja równoważnościowa zachodząca między wyrażeniami o tym samym *znaczeniu. Jeśli pojęcie znaczenia wprowadza się za pomocą pojęcia równoznaczności, to określenie równoznaczności przybiera, w celu uniknięcia błędnego koła, inną postać; przykłady takich określeń — *Znaczenie — (4) i *Znaczenie — (5b). Równoznaczność pojmuje się zwykle jako relację mocniejszą od *równoważności, tzn. przyjmuje się, że każde dwa wyrażenia równoznaczne są też równoważne (logicznie, inferencyjnie itp.), ale nie zawsze równoważność pociąga równoznaczność.

W. M.

Russell Bertrand Arthur William (1872—1970). Studiował w Trinity College w Cambridge, doktoryzując się w roku 1895. Wykładał w Trinity College w Cambridge (1910—1916), w Peking Government Univ. (1920—1921), w Univ. of Chicago (1938—1939); był profesorem uniw. w Los Angeles (1939—1940) i Harvard Univ. (1940). W 1944 wrócił do Trinity College, z którego musiał odejść w 1916 z powodu swych pacyfistycznych poglądów. W 1950 otrzymał literacką nagrodę Nobla.

Russell jest współautorem (z A. N. Whiteheadem) fundamentalnego trzytomowego dzieła *Principia mathematica* (1910—1913), które wywarło decydujący wpływ na rozwój logiki formalnej, filozofii nauki i podstaw matematyki. W kwestii podstaw matematyki dzieło do stanowi próbę zrealizowania programu *logicyzmu (łaciński tytuł dzieła oznacza podstawy matematyki). W analogicznej próbie podjętej przez Fregego Russell wykrył sprzeczność znaną jako paradoks klas (*Antynomie w logice). W systemie Russella i Whiteheada sprzeczności tej zapobiega *teoria typów. Z prac Russella na polu semantyki najbardziej znana jest jego teoria *deskrypcji.

W. M.

S, Ś

sąd. Sądem w sensie logicznym nazywa się *znaczenie zdania oznajmującego. Od sądu w sensie logicznym odróżnia się sąd w sensie psychologicznym, czyli przeżycie, które wyraża się odpowiednim zdaniem oznajmującym. Sąd w sensie logicznym można też określić jako to, co jest wspólne pewnej klasie sądów w sensie psychologicznym. Gdy np. kilku ludzi pomyśli, że pada deszcz, każdy z nich przeżyje tę samą myśl w nieco inny sposób, ale wszystkie będą myślami o tym, że pada deszcz. Indywidualne pomyślenia, to sądy w sensie psychologicznym, to zaś, co jest im wspólne, to sąd w sensie logicznym. W języku angielskim dla określenia sądu w sensie logicznym używa się często terminu „proposition"; jego niemieckim odpowiednikiem bywa „Gedanke" (w sensie Fregego z *SuB*).

K. Ajdukiewicz: *Propedeutyka filozofii*. 1950; – – *Sąd jako konotacja zdania*. [W:] *Sem. pol.*

W. M.

schemat wnioskowania (schemat inferencyjny). Układ wyrażeń powstający z wnioskowania, gdy na miejscu zdań będących przesłankami i wnioskiem znajdą się odpowiednie schematy zdaniowe (inaczej *funkcje zdaniowe). Np. schematem wnioskowania:

Jeżeli dzisiaj jest niedziela, to jutro jest poniedziałek
Dzisiaj jest niedziela

A więc: Jutro jest poniedziałek

jest wyrażenie:

$$\frac{\text{jeżeli } p, \text{ to } q \qquad p}{\text{A więc } q.}$$

Schemat wnioskowania, w którego przesłankach i wniosku nie występują inne stałe niż tylko *stałe logiczne, nazywa się formalnym schematem wnioskowania.

Jeżeli każdy układ wartości zmiennych spełniający przesłankę danego schematu spełnia też i jego wniosek, to taki schemat nazywa się niezawodnym. Inaczej: niezawodny schemat wnioskowania to taki, który od prawdziwych przesłanek prowadzi zawsze do prawdziwego wniosku. Schemat wnioskowania, który jest zarazem formalny i niezawodny, nazywa się logicznym schematem wnioskowania.

Logiczne schematy wnioskowania, które są układami kilku odrębnych zdań, odróżnia się od twierdzeń logicznych; każde takie twierdzenie jest zdaniem złożonym, utworzonym ze zdań prostszych za pomocą spójników. Schemat wnioskowania przechodzi w twierdzenie, jeśli zdania będące przesłankami połączy się spójnikiem *koniunkcji i tę koniunkcję przesłanek połączy się z wnioskiem za pomocą symbolu *implikacji.Twierdzenie powstające w ten sposób ze schematu podanego wyżej jako przykład przybierze postać: $(p \to q) \wedge p \to q$. Jest to tzw. modus ponendo ponens.

Logiczne schematy wnioskowania są pewnym sposobem zapisu reguł wnioskowania (inaczej: reguł dedukcyjnych) o następującej postaci: jeśli uznaje się za prawdziwe zdania o takiej to a takiej budowie (zapis nad kreską), to wolno też uznać za prawdziwe zdanie o budowie takiej to a takiej (zapis pod kreską).

Logikę można budować bądź jako system twierdzeń, bądź jako system reguł; to drugie ujęcie rozwijane jest współcześnie pod nazwą *dedukcji naturalnej.

Ajdukiewicz: *Zarys*; – – *Log. pragm.*; L. Borkowski: *Logika formalna*. 1977; J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej*. 1958 (wyd. 1 1929).

M. P.

semantyka.

(1) Ogólna teoria znaków zwana inaczej *semiotyką.

(2) Jeden z działów semiotyki opisujący stosunki między *znakami a rzeczywistością, do którego znaki się odnoszą, np. stosunek *oznaczania, *denotowania, *konotowania, *prawdziwości itp.

Rozumienia (1) i (2) różnią się od znaczenia będącego w obiegu u lingwistów: semantyka rozumiana jako dział lingwistyki bada znaczenia wyrazów, zmiany tych znaczeń i przyczyny zmian. W takim sensie termin „semantyka", zanim uzyskał znaczenia (1) i (2), został użyty przez językoznawcę francuskiego M. Bréala pod koniec XIX w. Rozumienie (2) rozpowszechniło się dzięki Morrisowi.

Choć sam termin „semantyka" jest stosunkowo niedawnego pochodzenia, rozważania o charakterze semantycznym mają tradycję sięgającą starożytności. Wiązały się one z filozofią, gramatyką, retoryką, logiką. Jako część logiki uprawiane były przez Arystotelesa w traktacie o zdaniach (*De interpretatione*) i w *Analitykach wtórych*, zaś w kompendiach średniowiecznych jako rozdział *Proprietates terminorum. W czasach nowożytnych semantyka również była uprawiana na użytek zagadnień filozoficznych, zwłaszcza teoriopoznawczych. Przykładem – cz. III *Rozważań* Locke'a lub obszerne partie *Logische Untersuchungen* Husserla. W XX w. pojawia się kierunek zwany filozofią analityczną, koncentrujący się na problemach językowych (*Analiza logiczna).

znaczeniowe między terminami teoretycznymi a obserwacyjnymi nazywane są regułami korespondencji (Carnap) lub regułami przyporządkowania (Reichenbach). Twierdzenia, przy których wysłowieniu użyte zostały terminy teoretyczne, noszą nazwę twierdzeń teoretycznych. Twierdzenia lub, ogólniej, zdania, w których występują wyłącznie terminy obserwacyjne, noszą nazwę twierdzeń obserwacyjnych.

Stopień, w jakim znaczenie terminu teoretycznego scharakteryzowane jest za pomocą terminów obserwacyjnych, decyduje o empirycznej sensowności lub bezsensowności danego terminu i tym samym, jak głoszono, jego przydatności lub nieprzydatności w nauce. Filozofowie reprezentujący tendencje neopozytywistyczne występowali z tezą szczególnie silnie głoszoną przez reprezentantów ugrupowania filozoficznego znanego pod nazwą Koła Wiedeńskiego, iż pewne terminy nie posiadają żadnej wartości poznawczej właśnie dlatego, że ich znaczenie nie daje się w dostatecznym stopniu lub, w skrajnym wypadku, nie daje się w ogóle scharakteryzować za pomocą terminów obserwacyjnych. Terminy zidentyfikowane jako terminy pozbawione treści empirycznej winny, postulowano, być usunięte poza obręb nauki. M. in. na tej właśnie zasadzie domagano się odseparowania nauki i filozofii utrzymując, że problemy filozoficzne są problemami 'metafizycznymi', tj. problemami, których nie można sformułować za pomocą terminów empirycznie sensownych. Początkowo pojęcie empirycznej sensowności definiowano nader rygorystycznie: za empirycznie sensowne godzono się uznawać tylko takie terminy, które mogą być zdefiniowane za pomocą terminów obserwacyjnych. W pracy *Testability and meaning* (1936) Carnap opowiada się za bardziej liberalną definicją. Proponuje on, by do empirycznie sensownych zaliczyć również terminy teoretyczne, których sens można eksplikować za pomocą terminów obserwacyjnych posiłkując się tzw. *definicjami redukcyjnymi. Wreszcie i ten punkt widzenia został zrewidowany na korzyść stanowiska jeszcze bardziej liberalnego (Carnap 1956). Ujmując rzecz bardzo niedokładnie, ostatnia z zaproponowanych przez Carnapa definicji zalicza do empirycznie sensownych wszelkie te terminy teoretyczne, dla których wyrugowanie poza obręb teorii naukowej uniemożliwiłoby przeprowadzenie pewnych wnioskowań kończących się konkluzją będącą *zdaniem obserwacyjnym, tj. zdaniem zawierającym jedynie terminy logiczne i obserwacyjne.

Obok pojęcia terminu empirycznie sensownego operowano pojęciem zdania empirycznie sensownego bądź określając je jako zdanie nie zawierające terminu pozbawionego empirycznego sensu, bądź też podejmując próby zdefiniowania pojęcia zdania empirycznie sensownego bez odwoływania się do pojęcia terminu s.e. To drugie ujęcie ilustrują m. in. następujące określenia; do najważniejszych należą: 1° Zdanie e.s. to tyle, co zdanie potwierdzalne, tj. zdanie, które posiada nieskończenie wiele konsekwencji obserwacyjnych; 2° Zdanie e.s. to tyle, co zdanie potwierdzalne lub sprawdzalne (Carnap), przy czym przez zdanie sprawdzalne rozumie się zdanie, które jest konsekwencją jakiejkolwiek niesprzecznej klasy zdań spostrzeżeniowych; 3° Zdanie e.s. to zdanie sprawdzalne, a przy tym falsyfikowalne, tj. takie, którego negacja jest sprawdzalna (Mehlberg).

Wszystkie proponowane definicje empirycznej sensowności, zarówno definicje określające pojęcie terminu e.s., jak określające pojęcie zdania e.s., były przedmiotem licznych i niejednokrotnie bardzo poważnych zarzutów (np. w świetle niektórych definicji wszystkie terminy lub, odpowiednio, wszystkie zdania okazywały się empirycznie sensowne; wadę taką posiadała m. in., nie przytoczona tutaj, definicja pochodząca od Ayera).

Wielu metodologów jest zdania, że pojęcie sensowności empirycznej nie może zostać w pełni zadowalająco zdefiniowane. Również praktyczna przydatność rozważań nad pojęciem s.e., traktowanych jako rozważania normatywne, postulujące pewien sposób uprawiania nauki, okazała się znikoma. Niektóre z nich jednak pozwoliły na określenie pewnych rodzajów związków znaczeniowych między terminami lub zdaniami. Niektóre z tych zależności zasługują na dokładną metodologiczną analizę.

R. Carnap: *The methodological character of theoretical concepts*. [W:] *Minnesota studies in the philosophy of science*. 1956; — — *Testability and meaning*. „Philos. of Sc." III 1936, IV 1937; C. G. Hempel: *Problems and changes in the empiricist criterion of meaning*. „Rev. Intern. de Philos." XI 1950; J. Kamińska: *Ewolucja Koła Wiedeńskiego*. „Myśl Współcz." 1947 nr 2 oraz [W:] *LTN*; H. Mehlberg: *O niesprawdzalnych założeniach nauki*. „Przegl. Filoz." 1948 nr 4 [W:] *LTN*.

R. W.

significatio. W logice średniowiecznej jedna z relacji semantycznych, rozmaicie rozumiana w różnych tekstach (Piotr Hiszpan, Abelard, Duns Szkot, Ockham).

(1) Reprezentowanie jakiejś rzeczy przez umowny znak akustyczny (łac. rei per vocem secundum placitum repraesentatio) — klasyczne określenie Piotra Hiszpana, dostosowane do funkcji nazw.

(2) Funkcja przysługująca nazwom i zdaniom.

(3) Funkcja przysługująca również synkategorematom, czyli wyrażeniom niesamodzielnym (jak np. spójniki), służącym do budowania nazw lub zdań. Różne są także rozumienia tej relacji ze względu na jej człon pozajęzykowy: wg pewnych tekstów jest nim rzecz (substancja), wg innych cecha (łac. essentia), wg jeszcze innych pojęcie (łac. conceptus).

Zob. też **proprietates terminorum.**

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; Kneale: *Development of logic*; M. Ossowska: *Significatio per se i per aliud u Anzelma*. [W:] *Sem pol*.

W. M.

składnia logiczna. Teoria, w której formułuje się systematycznie reguły języka i konsekwencje tych reguł, odwołując się wyłącznie do kształtu wyrażeń, abstrahując natomiast od ich znaczenia. Jedne z tych reguł określają sposoby poprawnego konstruowania (formowania) wyrażeń, pozostałe zaś dotyczą sposobów poprawnego przekształcania (transformowania) wyrażeń, tj. takiego ich przekształcania, by była zachowana jakaś wyróżniona własność formuł, np. tautologiczność. Przykładem reguł konstruowania są reguły określające zbiór wyrażeń sensownych, np. w *rachunku kwantyfikatorów, przykładem drugich reguły dedukcyjne tego rachunku.

Zamiast „składnia logiczna" byłoby właściwiej używać zwrotu „syntaktyka logiczna", ponieważ rozumie się pod tym terminem nie samą składnię, lecz pewną teorię składni; byłby to wówczas zwrot uformowany analogicznie do nazwy „semantyka logiczna".

Carnap: *Syntax.*

W. M.

słownik. Słownikiem języka *J* jest spis wszystkich wyrażeń prostych (tj. takich, że żadna część wyrażenia nie jest wyrażeniem), zarówno stałych, jak i zmiennych. Mając ponadto dane reguły konstruowania wyrażeń, można z jego elementów utworzyć dowolnie wiele nowych wyrażeń danego języka. Przykłady opisów słownika rachunku zdań, rachunku kwantyfikatorów i in. znaleźć można w podręcznikach logiki formalnej (np. Grzegorczyk, *Log. mat.*, J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej* 1958).

T. Czeżowski: *Logika.* 1949; H. Stonert: *Język i nauka.* 1964.

W. M.

sofizmat. Rozumowanie na pozór poprawne logicznie, w którym popełniono błąd logiczny, trudny nieraz do wykrycia, nadający pozory prawdziwości fałszywemu twierdzeniu. Przykład: Rogów nie zgubiłeś, a czegoś nie zgubił, to posiadasz, więc posiadasz rogi.

Istnieje jeszcze inne rozumienie sofizmatu obejmujące dodatkowy warunek, że błąd logiczny popełniono świadomie, w celu nadania pozorów prawdziwości twierdzeniu fałszywemu. Tak rozumiany sofizmat odróżnia się od *paralogizmu, który jest rozumowaniem niepoprawnym łogicznie, lecz w którym rozumujący nie jest świadomy błędu.

T. Pszczołowski: *Umiejętność przekonywania i dyskusji.* 1962; W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii.* T. 1. 1958; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

sorites (łańcusznik). Tradycyjny schemat wnioskowania uzyskany z *polisylogizmu przez opuszczenie w nim wniosków pośrednich. W zależności od tego, czy opuszczone zdania pełniły ponadto rolę przesłanek mniejszych, czy większych w następnych z kolei sylogizmach, wyróżnia się dwa rodzaje łańcuszników: progresywny (Arystotelesa) i regresywny (Gokleniusza). Pod względem swej struktury różnią się one tylko kolejnością przesłanek, a co za tym idzie, rozmieszczeniem podmiotów i orzeczników.

Łańcusznik progresywny. Przykład:

każde *A* jest *B*
każde *B* jest *C*
każde *C* jest *D*
każde *D* jest *E*
---
każde *A* jest *E*.

Warunki poprawności łańcusznika progresywnego: tylko pierwsza przesłanka może być zdaniem szczegółowym; wtedy i wniosek jest zdaniem szczegółowym. Tylko ostatnia przesłanka może być zdaniem przeczącym; wtedy i wniosek jest zdaniem przeczącym.

Łańcusznik regresywny. Przykład:

każde *D* jest *E*
każde *C* jest *D*
każde *B* jest *C*
każde *A* jest *B*
---
każde *A* jest *E*

Warunki poprawności łańcusznika regresywnego: tylko pierwsza przesłanka może być zdaniem przeczącym, wtedy i wniosek jest zdaniem przeczącym. Tylko ostatnia przesłanka może być zdaniem szczegółowym, wtedy i wniosek jest zdaniem szczegółowym.

M. Kowalewski: *Logika.* 1959; J. Śleszyński: *Teoria dowodu.* 1925.

M. P.

spełnianie. Ścisłe pojęcie spełniania (funkcji zdaniowej przez pewne przedmioty) może być sformułowane tylko w odniesieniu do określonego języka, np. języka *rachunku kwantyfikatorów. Intuicyjne pojęcie spełniania, mniej ścisłe, lecz za to dające się wyrazić o wiele krócej, można przedstawić w sposób następujący: Funkcja zdaniowa *F* jest spełniona (ang. satisfied) przez pewne przedmioty, gdy przejdzie w zdanie prawdziwe po podstawieniu (w miejsce jej zmiennych wolnych) nazw tych przedmiotów. Określenie to odwołuje się do pojęcia zdania prawdziwego, które jest intuicyjnie zrozumiałe, ale które w toku systematycznego definiowania wprowadza się później, zakładając już pojęcie spełniania.

Przykłady: *Funkcja zdaniowa $x > y$ jest spełniona w dziedzinie liczb naturalnych przez pary liczb 2,1 i 3,2 i 3,1 itd. Zaś $x + y = z$ jest funkcją spełnioną np. w zbiorze liczb całkowitych przez takie trójki liczb, że pierwszy element tej trójki dodany do drugiego równa się trzeciemu (np. 3, 2, 5). Funkcja $\vee x(x$ ceni $y)$ spełniona jest w zbiorze ludzi przez te wszystkie osoby, które są przez kogoś cenione.

Ścisła definicja spełniania wymaga szeregu kroków przygotowawczych, którymi są: określenie zbioru wyrażeń poprawnie (w danym języku) zbudowanych; przyporządkowanie zmiennych ich wartości, tj. przedmiotów, których nazwy wolno podstawiać za te zmienne; wprowadzenie oznaczeń dla własności i relacji, do których odnoszą się *predykaty naszego języka. Realizując ten ostatni krok ustalamy np., że predykat P_1 będzie przyporządkowany własności p_1, predykat P_2 własności p_2, itd.

Niech językiem, dla którego definiujemy pojęcie spełniania, będzie język rachunku kwantyfikatorów pierwszego rzędu. Metoda określania dla tego języka zbioru wyrażeń poprawnie zbudowanych została podana na innym miejscu (*Rachunek kwantyfikatorów).

Przyporządkowania wartości dokonujemy w następujący sposób. Zmiennymi indywiduowymi naszego języka są litery x_1, x_2, x_3... itd. Przyporządkowane są im przedmioty a_1, a_2, a_3... Ciąg takich przedmiotów oznaczymy przez $\{a_n\}$.

Niech P_i będzie jednym z predykatów naszego języka, zaś p_i odpowiadającą mu własnością (zamiast o własnościach można mówić o zbiorach – *Ekstensjonalność).

Litera $\mathfrak{M}$ niech oznacza dziedzinę złożoną z wymienionego zbioru indywiduów X oraz z odpowiedniej liczby własności. Spełnianie określa się za pomocą *definicji indukcyjnej.

1. Warunek wyjściowy. Wyrażenie atomiczne $P_i(x_k)$ jest spełnione w dziedzinie $\mathfrak{M}$ przez ciąg przedmiotów $\{a_n\}$ wtedy i tylko, gdy $p_i(a_k)$, czyli gdy przedmiot a_k ma własność p_i. Ogólniej, dla predykatów o dowolnej liczbie argumentów, formułujemy warunek wyjściowy w sposób następujący. Wyrażenie atomiczne z predykatem t-argumentowym $P_i(x_{k_1}, ..., x_{k_t})$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez ciąg $\{a_n\}$ wtedy i tylko, gdy zachodzi relacja:

$$p_i(a_{k_1}, ..., a_{k_t}).$$

Symbol k przy literze x należy rozumieć w ten sposób, że jest to miejsce na wstawienie jednego z numerów odróżniających między sobą zmienne indywiduowe naszego języka (np. numery 1 i 2 odróżniają zmienne x_1 i x_2); takie ponumerowanie daje nam do dyspozycji tyle zmiennych, ile jest liczb naturalnych. Natomiast indeks pisany poniżej k, od 1 do t (gdzie $t \geqslant 1$) wskazuje na miejsce zmiennej w ciągu argumentów (ujętym w nawias) danego predykatu.

2. Warunek indukcyjny. Określiwszy w warunku wyjściowym pojęcie spełniania dla formuł atomicznych, określa się następnie, w sposób indukcyjny, pojęcie spełniania dla formuł złożonych (symbol $\equiv$ w poniższych sformułowaniach zastępuje zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy", a zamiast pisać np. „wyrażenie $A \rightarrow B$" pisać będziemy krótko „$A \rightarrow B$").

$A \rightarrow B$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez ciąg $\{a_n\} \equiv$ jeśli A jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$, to B jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$.

$\sim A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv$ nieprawda, że A jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$.

$A \vee B$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$ lub B jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$.

$A \wedge B$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$ oraz B jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$.

$A \equiv B$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy B jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\}$.

$\wedge x_k A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv$ dla każdego indywiduum b z rozważanej dziedziny X: A jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez ciąg

$$\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}, b, a_{k+1}, ...\}$$

powstający z ciągu $\{a_n\}$ przez zastąpienie elementu a_k elementem b. $\vee x_k A$ jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez $\{a_n\} \equiv$ dla pewnego b z X: A jest spełnione w $\mathfrak{M}$ przez ciąg (taki jak podany wyżej), powstający z ciągu $\{a_n\}$ przez zastąpienie elementu a_k elementem b.

Pierwszym, który podał ścisłą definicję spełniania, formułując ją dla języka rachunku zbiorów, był A. Tarski (1933).

Grzegorczyk: *Log. mat.*; S. Krajewski: *Truth.* [W:] *Dic. of logic*; W. Marciszewski: *Predicate logic* [W:] *Dic. of logic*; Mostowski: *Log. mat.*; W.V.O. Quine: *Philosophy of logic*. 1973 (przekł. polski *Filozofia logiki*, 1977); Tarski: *Pojęcie prawdy*.

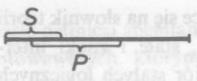
W. M.

spójność syntaktyczna. W jest wyrażeniem syntaktycznie spójnym wtedy i tylko, gdy spełnia następujące warunki: 1° W da się całe rozłożyć na *funktor i jego argumenty; każdy z argumentów – jeśli jest on wyrażeniem złożonym – znowu rozkłada się całkowicie na funktor i argumenty itd. aż do otrzymania samych wyrażeń prostych (tj. nie dzielących się dalej na funktor i argumenty); 2° każdy funktor występujący w W ma w W dokładnie tyle argumentów, ile liter zawiera mianownik jego wskaźnika – tj. napisu określającego *kategorię semantyczną danego funktora.

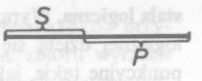
Przykładem wyrażenia, które spełnia pierwszy warunek, a nie spełnia drugiego, jest: $\sim(f, x)$, gdzie litera f, będąca funktorem o wskaźniku $^{z}/_{n}$, pozbawiona jest argumentu żądanego przez mianownik wskaźnika. Wolne od tej wady jest wyrażenie $\sim f(x)$. Niniejsze określenie spójności syntaktycznej, pochodzące od Ajdukiewicza i mające zastosowanie w innych jego badaniach (*Intensjonalność), sformułowane zostało na gruncie Leśniewskiego teorii kategorii semantycznych. Podobnej podstawy teoretycznej dla określenia spójności dostarcza też *teoria typów logicznych.

K. Ajdukiewicz: *O spójności syntaktycznej*.]W:[*JiP*. T. 1,; P. Geach: *A program for syntax*. „Synthese" XXII 1970.

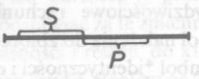
W.M.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

lecz nie będące *S*). Np. zakres nazwy „wróbel" (*S*) jest podrzędny w stosunku do zakresu nazwy „ptak" (*P*).

Krzyżowanie. Zakres nazwy *S* krzyżuje się z zakresem nazwy *P* (Rys. 4 i 5), gdy spełnione są trzy warunki:

a. niektóre *S* nie są *P* (istnieją przedmioty, przynajmniej jeden, będące *S*, lecz nie będące *P*),

b. niektóre *S* są *P* (istnieją przedmioty, przynajmniej jeden, będące *S* oraz *P*),

c. niektóre *P* nie są *S* (istnieją przedmioty, przynajmniej jeden, będące *P*, lecz nie będące *S*).

Dwa są rodzaje krzyżowania się zakresów, w zależności od tego czy:

1° krzyżujące się zakresy obejmują w sumie cały zakres uniwersalny, tzn. każdy przedmiot należy przynajmniej do jednego z krzyżujących się zakresów (Rys. 4). W ten sposób krzyżuje się np. zakres nazwy „zwierzę" (*S*) z zakresem nazwy „nie-kot" (*P*),

2° krzyżujące się zakresy nie obejmują w sumie zakresu uniwersalnego, tzn. są przedmioty nie należące do żadnego z krzyżujących się zakresów (Rys. 5). Tak krzyżuje się zakres nazwy „kwiat" (*S*) z zakresem nazwy „czerwony" (*P*).



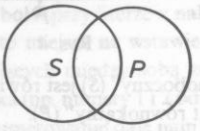
Równoważność



Nadrzędność



Podrzędność



Krzyżowanie



Wykluczanie

Wykluczanie. Zakres nazwy *S* wyklucza się z zakresem nazwy *P* (Rys. 6 i 7), gdy żadne *S* nie jest *P* (nie istnieją przedmioty będące zarazem *S* oraz *P*) i żadne *P* nie jest *S* (nie istnieją przedmioty będące zarazem *P* oraz *S*). Również dwie są odmiany wykluczania, podobnie jak przy krzyżowaniu, mianowicie:

1° wykluczające się zakresy dopełniają się, dające w sumie zakres uniwersalny. Każdy przedmiot należy do jednego z wykluczających się zakresów (Rys. 6). W ten sposób wykluczają się np. zakres nazw „ożywiony" (*S*) i „nieożywiony" (*P*),

2° wykluczające się zakresy nie dopełniają się, tzn. istnieją przedmioty nie należące do żadnego z tych zakresów (Rys. 7). W ten sposób zakres nazwy „ptak" (*S*) wyklucza się z zakresem nazwy „kamień" (*P*).

Stosunki między zakresami nazw przedstawia się często za pomocą tzw. kół Eulera (matematyk szwajcarski, 1707–1783); ten sposób ilustracji graficznej nie pozwala jednak przedstawić krzyżowania w przypadku 1° i wykluczania w przypadku 1°.

Wszystkie przedstawione wyżej stosunki zachodzą w dziedzinie nazw niepustych, natomiast pomiędzy zakresami dwóch dowolnych nazw pustych zachodzi zawsze stosunek równoważności. Np. zakres nazwy „kwadratowe koło" jest równoważny zakresowi nazwy „trójkątny czworobok". Zgodnie bowiem z podaną definicją równoważności: nie istnieją kwadratowe koła nie będące zarazem trójkątnymi czworobokami i nie istnieją trójkątne czworoboki nie będące zarazem kwadratowymi kołami. Jest tak dlatego, że w ogóle nie istnieją ani kwadratowe koła, ani trójkątne czworoboki.

Również jeden tylko stosunek, mianowicie podrzędność zachodzi pomiędzy zakresem dowolnej nazwy pustej i zakresem jakiejkolwiek nazwy niepustej. Np. zakres nazwy „kwadratowe koło" zawiera się w zakresie nazwy „trójkąt", ponieważ w myśl definicji podporządkowania nie istnieją kwadratowe koła nie będące zarazem trójkątami.

Ajdukiewicz: *Zarys*; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych*. 1946; – – *Logika*. 1949; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

subsumpcja. Stosunek inkluzji (właściwej) lub równości zachodzący między zakresami podmiotu i orzecznika zdania ogólnotwierdzącego (*Kwadrat logiczny; *Rachunek zbiorów).

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956.

W. M.

supozycja (z łac. suppositio). W logice średniowiecznej relacja pragmatyczna polegająca na tym, że odnosi się nazwę do jakiegoś przedmiotu (łac. acceptio termini substantivi pro aliquo). Ten sam termin może być odnoszony do różnego typu przedmiotów. Np. termin „człowiek" może być brany m. in. jako a) nazwa zbioru ludzi („Człowiek jest śmiertelny" w sensie „Wszyscy ludzie są śmiertelni"), b) nazwa pojedynczego elementu tego zbioru – gdy jest użyta w konkretnym kontekście sytuacyjnym („Człowiek idzie", w sensie „Ten oto człowiek idzie"), c) nazwa gatunku ludzkiego pojętego jako powszechnik („Człowiek jest jednym z gatunków"), d) nazwa samej siebie, tj. nazwa cudzysłowowa («„Człowiek" ma dwie sylaby»).

Przymiotniki, jakimi określano odmiany supozycji, są

różne u różnych autorów. U Piotra Hiszpana np.: a) – suppositio naturalis, b) – suppositio personalis, c) – suppositio simplex, d) – suppositio materialis. Inna rozpowszechniona terminologia: b) suppositio simplex (zwykła), c) suppositio formalis (formalna). W późniejszym średniowieczu (Ockham) teoria supozycji była uprawiana w związku z teorią prawdy. Jedno z twierdzeń tej teorii: zdanie kategoryczne jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy ten sam jest przedmiot supozycji podmiotu i orzecznika.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; Ph. Boehner: *Ockham's theory of signification*. „Franciscan Studies" VI 1946 nr 2; Kneale: *Development of logic*. M. Kokoszyńska: *Nauka o supozycji terminów według Piotra Hiszpana*. „Przegl. Filoz". XXXVII 1934 zesz. 3; Petrus Hispanus: *Summule logicales*. [W:] *Petri Tatereti... In Summulas Petri Hispani exactae explicationes*. 1490.

W. M.

supozycja materialna. Wyrażenie jest wzięte w supozycji materialnej, gdy jest użyte, mówiąc swobodnie, jako nazwa dla samego siebie, a więc jako *nazwa cudzysłowowa. Przykład: W zdaniu «„Ala ma kota" jest zdaniem», część wyodrębniona za pomocą zwykłego cudzysłowu jest nazwą zdania o Ali; jest to wyrażenie wzięte w supozycji materialnej. Z tradycyjnego podziału *supozycji termin „supozycja materialna" okazał się najtrwalszy i funkcjonuje współcześnie na równi z terminologią odwołującą się do pojęcia cudzysłowu.

Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

Suszko Roman (1919–1979). W l. 1963–1965 kierownik Katedry Logiki II, Wydziału Filozofii i Socjologii Uniw. Warszawskiego. Od 1965 kierownik Zakładu Logiki Instytutu Filozofii i Socjologii PAN. W 1967–1969 – zaproszony z wykładami do Stevens Institute of Technology w Hoboken N. J., USA. Zajmował się zagadnieniami teorii mnogości, algebry, semantyki, lingwistyki matematycznej, stosunku między logiką a filozofią. Autor podręcznika *Wykłady z logiki formalnej* 1965. Inne prace (przykładowo): *Logika formalna a niektóre zagadnienia teorii poznania*. [W:] *LTN*; *Syntactic structure and semantical reference*. „St. Log." VIII 1958 i IX 1960; *An essay in the formal theory of extension and intension*. „St. Log." XX 1967; *Ontologia w „Traktacie" L. Wittgensteina*. „St. Filoz." 1968 nr 1; *On the extending of models* (wspólnie z J. Łosiem). „Fundamenta Mathematicae" 1955 i 1956.

W. M.

sylogistyka zdań asertorycznych. Sylogistyka jest najstarszym systemem logicznym, a zarazem najdawniejszym pomnikiem *systemu dedukcyjnego. Jest on przede wszystkim dziełem Arystotelesa (384–322 p.n.e.), od późniejszych autorów pochodzą mniejszej wagi uzupełnienia lub usprawnienia symboliczne i dydaktyczne. Naszkicowany niżej zarys sylogistyki zdań asertorycznych uwzględnia (w pierwszej części) tę jej postać, na którą wpłynęły również późniejsze modyfikacje i która jest obecnie przedstawiona jako część tzw. logiki tradycyjnej; tam jednak, gdzie wkład Arystotelesa jako inicjatora jest szczególnie ważny, będzie on podkreślany osobną wzmianką.

Sylogistyka w ujęciu tradycyjnym. Jest to teoria czterech stałych logicznych: „każdy... jest...", „żaden... nie jest...", „pewien... jest...", „pewien... nie jest..." Stałe te przyjęło się tradycyjnie zapisywać literami: a, e, i, o. Są to funktory od dwóch argumentów reprezentowanych przez zmienne (S, M, P), których wartościami są tylko terminy ogólne i niepuste. Wykluczone są terminy jednostkowe, puste i negatywne. Stałe wraz z ich argumentami pozwalają na sformułowanie czterech rodzajów funkcji zdaniowych:

Każde S jest P, albo symbolicznie: SaP,
Żadne S nie jest P, symbolicznie: SeP,
Pewne S jest P, albo symbolicznie: SiP,
Pewne S nie jest P, symbolicznie: SoP.

Z tych czterech rodzajów funkcji zdaniowych, za pomocą dwóch funktorów: „jeśli..., to..." oraz „i", formułuje Arystoteles tezy sylogistyki. W niektórych dowodach występuje również funktor negacji przyzdaniowej: „Nie jest prawdą, że...", lub krótko: „nie". Wszystkie tezy są *funkcjami zdaniowymi o postaci okresu warunkowego. Żaden sylogizm w oryginalnej wersji Arystotelesowskiej nie jest sformułowany w postaci reguły dedukcyjnej, wbrew rozpowszechnionym poglądom na ten temat. Tezy sylogistyki Arystotelesa są bądź prawami *konwersji, bądź sylogizmami. W prawach konwersji poprzednik jest jedną tylko funkcją zdaniową, w sylogizmach poprzednik jest *koniunkcją dwóch funkcji zdaniowych. Oto jedno z praw konwersji: Jeżeli żadne S nie jest P, to żadne P nie jest S. Symbolicznie: $SeP \rightarrow PeS$. Przykład sylogizmu: Jeżeli (każde M jest P i każde S jest M), to każde S jest P. Symbolicznie: $(MaP \wedge SaM) \rightarrow SaP$, albo w ten sposób:

$$\frac{\begin{array}{l} MaP \\ SaM \end{array}}{SaP}$$

Funkcje występujące w poprzedniku sylogizmu nazywają się przesłankami sylogizmu, a następnik nazywa się konkluzją lub wnioskiem. Zmienna równokształtna z orzecznikiem konkluzji (P) nazywa się terminem większym. Zmienna równokształtna z podmiotem konkluzji (S) nazywa się terminem mniejszym. Zmienna nie występująca w konkluzji (M) nazywa się terminem średnim. Ze względu na występowanie w przesłankach terminu większego lub mniejszego, mówi się też o przesłance większej lub mniejszej.

W zależności od tego czy termin średni jest w przesłankach podmiotem czy orzecznikiem, dzieli się wszystkie sylogizmy na cztery figury, co uwidacznia następujący schemat:

MP	PM	MP	PM
SM	SM	MS	MS
SP	SP	SP	SP

Jeżeli dokonamy wszystkich możliwych rozmieszczeń funktorów a, e, i, o w przesłankach i konkluzjach czterech figur, to uzyskamy $4 \times 64 = 256$ różnokształtnych sylogizmów, zwanych trybami sylogistycznymi. Spośród nich tylko 24 tryby, po sześć z każdej figury, są sylogizmami prawdziwymi (tezami sylogistyki).

Oto tradycyjnie przyjęte nazwy tych sylogizmów:

I figura: Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Barbari, Celaront,

II figura: Cesare, Camestres, Festino, Baroco, Cesaro, Camestros,

III figura: Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison,

IV figura: Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison, Calemos.

W każdej nazwie sylogizmu występują trzy samogłoski, równokształtne z tymi, które w danym sylogizmie oznaczają funktory (a, e, i, o). Samogłoski: pierwsza i druga odnoszą się do przesłanek pierwszej i drugiej. Trzecia zaś do konkluzji.

Wśród sylogizmów poprawnych Arystoteles wyróżnia tryby doskonałe, tj. oczywiste, nie wymagające dowodu: Barbara i Celarent. One stanowią aksjomaty systemu. Na ich podstawie udowodnione są pozostałe sylogizmy: za pomocą praw konwersji bądź przez sprowadzenie do niedorzeczności. Dowody te opierają się na tezach logiki zdań, jak np. na prawie *sylogizmu hipotetycznego i na prawie transpozycji, którymi Arystoteles posługuje się intuicyjnie. Dowodzenie sylogizmów nazywa się często redukcją lub sprowadzaniem sylogizmów niedoskonałych do sylogizmów doskonałych (*Redukcja trybów).

Arystoteles nie tylko podaje dowody poprawnych sylogizmów, ale również obala błędne sylogizmy: za pomocą konkretnych przykładów lub przez sprowadzenie do innych sylogizmów odrzuconych wcześniej aksjomatycznie. Pierwszy sposób, jakkolwiek jest logicznie poprawny, nie jest zupełnie zadowalający, gdyż wprowadza do systemu terminy i zdania wzięte spoza logiki.

Dzięki stworzeniu sylogistyki Arystoteles zasłużył się bardzo na polu logiki formalnej, w szczególności przez wprowadzenie zmiennych do logiki oraz przez zastosowanie metody aksjomatycznej. Słabą stroną sylogistyki Arystotelesa jest ograniczenie sylogistyki do nazw ogólnych niepustych oraz niedoskonałość metody aksjomatycznej, czego wyrazem jest m. in. niekompletny wykaz aksjomatów, mianowicie pominięcie praw konwersji i tożsamości oraz kilku praw logiki zdań.

Sylogistyka w ujęciu Łukasiewicza. Tych niedoskonałości metodologicznych uniknął Jan Łukasiewicz, ujmując sylogistykę Arystotelesa w system aksjomatyczny zgodnie z wymaganiami współczesnej logiki.

Terminami pierwotnymi są stałe sylogistyki: „każdy... jest..." i „pewien... jest...". Za pomocą tych terminów definiuje się terminy: „żaden... nie jest..." i „pewien... nie jest...". Aksjomatami są dwa sylogizmy: Barbara i Datisi oraz dwa prawa tożsamości „Każde A jest A" i „Pewne A jest A". Regułami wnioskowania są: reguła podstawiania, reguła odrywania i reguła zastępowania definicyjnego. Poza tym jako system pomocniczy przyjmuje się dwuwartościowy *rachunek zdań (system implikacyjno-negacyjny); za zmienną zdaniowe wolno podstawiać wyrażenia sensowne należące do tradycyjnej sylogistyki. Łukasiewicz wykazuje *niesprzeczność i *niezależność formuł swojej sylogistyki. Z aksjomatów tych za pomocą przyjętych reguł wyprowadza się wszystkie prawa kwadratu logicznego, prawa konwersji oraz wszystkie pozostałe poprawne sylogizmy i łańcuszniki, w ogóle wszystkie zdania prawdziwe, jakie można sformułować w języku sylogistyki.

System ten nie daje jednak możliwości wykazania fałszywości sylogizmów odrzuconych przez Arystotelesa. Dla rozwiązania tego zagadnienia Łukasiewicz przyjmuje aksjomatycznie jako fałszywe dwa następujące sylogizmy:

$$(PaM \wedge SaM) \rightarrow SiP \text{ i } (PaM \wedge SeM) \rightarrow SiP$$

oraz wprowadza trzy tzw. reguły odrzucania (jedna z nich pochodzi od Słupeckiego):

1. Reguła odrzucania przez podstawienie: Wolno odrzucić każde wyrażenie, z którego przez podstawianie wynika wyrażenie odrzucone.
2. Reguła odrzucania przez odrywanie: Jeśli uznana jest implikacja $\alpha \rightarrow \beta$ i odrzucony jest następnik β, to wolno odrzucić jej poprzednik α.
3. Reguła odrzucania Słupeckiego: Jeśli odrzucone są zdania: $\alpha \rightarrow \gamma$ i $\beta \rightarrow \gamma$, to wolno odrzucić zdanie $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$, gdzie: α – oznacza wyrażenie typu SeP, β – wyrażenie typu SoP, γ – oznacza albo wyrażenie proste sylogistyki (SaP, SiP, SeP, SoP), albo implikację, której następnik jest wyrażeniem prostym sylogistyki, a poprzednik bądź wyrażeniem prostym, bądź koniunkcją takich wyrażeń prostych.

Za pomocą reguł odrzucania i aksjomatycznie odrzuconych sylogizmów można wykazać, że wszystkie sylogizmy odrzucone przez Arystotelesa są błędne. Każde wyrażenie sensowne tego systemu można albo udowodnić, albo obalić. Jeszcze inne ujęcie sylogistyki przedstawił Łukasiewicz wcześniej, w pracy z r. 1929.

K. Ajdukiewicz: *Założenia logiki tradycyjnej* [W:] *JiP* T. 1.; – – *Zarys*; Aristoteles: *Analytica priora*; L. Borkowski: *Logika formalna*. 1977; T. Czeżowski: *Logika*. 1949; – – *Główne zasady nauk filozoficznych*. 1959; – – *O graficznych metodach rozwiązywania sylogizmów*. [W:] – – *Odczyty filozoficzne*. 1958; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Wykłady*; J. Łukasiewicz: *Aristotle's syllogistic*. 1957; – – *Elementy logiki matematycznej*. 1929; – – *O sylogistyce Arystotelesa* [W:] *Z zagadnień logiki i filozofii*. 1961; A. N. Prior: *Formal logic*. 1962; J. Słupecki: *Z badań nad sylogistyką Arystotelesa*. 1948; A. L. Subotin: *Teorije sillogistiki w sowriemiennoj formalnoj łogik e*. 1965.

M. P

sylogizm hipotetyczny. Formuła tradycyjnej logiki zdań mająca postać bądź reguły wnioskowania, np.:

Jeżeli, p to q
otóż p
———
a więc q

bądź postać okresu warunkowego, np.:

Jeżeli (jeżeli p, to q, oraz p) to q

W *logice stoików rozumiano sylogizmy hipotetyczne jako reguły wnioskowania. W średniowieczu natomiast rozumiano sylogizmy hipotetyczne bądź jako reguły wnioskowania, bądź jako okresy warunkowe.

W wyrażeniu „sylogizm hipotetyczny" słowo „hipotetyczny", czyli warunkowy, wyraża szeroko rozpowszechniony pogląd, że cechą charakterystyczną omawianych tu sylogizmów jest ich budowa w postaci okresu warunkowego, w odróżnieniu od sylogizmów Arystotelesa, zwanych kategorycznymi. Według Łukasiewicza jest to pogląd błędny, gdyż ściśle biorąc sylogizmy Arystotelesa mają również postać okresu warunkowego, a cechą różniącą te dwa rodzaje sylogizmów jest rodzaj zmiennych, które w nich występują. W sylogizmach hipotetycznych występują zmienne zdaniowe, a w sylogizmach kategorycznych – zmienne nazwowe.

J. Łukasiewicz: *Z historii logiki zdań*. [W:] *Z zagadnień logiki i filozofii*. 1961.

M. P.

symbolika Łukasiewicza (notacja Łukasiewicza). Beznawiasowy system notacji logicznej, polegający na wykorzystaniu szyku wyrazów dla określenia ich roli syntaktycznej, w myśl następującej zasady: najpierw *funktor (oznaczany symbolem literowym), następnie jego argument lub argumenty. Przykłady: Np (*negacja), Cpq (*implikacja), Apq (*alternatywa), Kpq (*koniunkcja), Epq (*równoważność). W przypadku bardziej złożonych wyrażeń zasadę tę można odczytać z następujących, podanych tu przykładowo, przekładów z symboliki nawiasowej na symbolikę Łukasiewicza.

$[(p \to q) \wedge p] \to q$	CKCpqpq.
$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$	CKCpqNqNp.
$(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	ENApqKNpNq

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; J. J. Leman: *Modal logic: the Lewis modal systems*. 1973; J. Łukasiewicz: *Elementy logiki matematycznej*. 1929.

W. M.

symbolika Peano-Russella rozwinęła się z symboliki stosowanej przez G. Peano w jego pracach, a następnie zmodyfikowanej przez B. Russella. Symbolika ta nie jest zupełnie konsekwentna i często bywa modyfikowana przez różnych autorów. Stosowana jest głównie do teorii logicznych i stąd specyficzne jej znaki są *stałymi logicznymi:

$$\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv, (x), (\exists x).$$

Są to odpowiednio znaki *negacji, *koniunkcji, *alternatywy, *implikacji, *równoważności, *kwantyfikatora ogólnego i *kwantyfikatora szczegółowego. Specyficzność symboliki Peano-Russella polega nie tyle na takim właśnie doborze stałych logicznych, co na użyciu kropek jako znaków przestankowych przy tworzeniu zdań złożonych.

Załóżmy, że ustalony jest jakiś ciąg nawiasów (w zasadzie nieskończony):

$$(), [], \{\}, ()\ldots$$

Będziemy je kolejno nazywać nawiasami stopnia 1-go, 2-go, itd. Nawiasy te będziemy stosowali przestrzegając, aby nawiasy stopnia n-go obejmowały tylko formuły zdaniowe stopnia n-go. Wprowadźmy następnie ciąg znaków kropkowych

$$., :, :., ::, :.:, ::, \ldots$$

Wyrazy tego ciągu będziemy nazywali odpowiednio znakiem kropkowym n-go stopnia ($n = 1, 2, \ldots$). Przy tych założeniach każdą formułę zdaniową zapisaną za pomocą dowolnej symboliki i powyższego ciągu nawiasów możemy (w zasadzie) wyrazić w symbolice Peano-Russella i odwrotnie.

Dyrektywa przekładu na symbolikę Peano-Russella jest następująca:

1° dokonujemy zastąpienia stałych logicznych występujących w formule przez odpowiednie stałe logiczne symboliki Peano-Russella.

2° zastępujemy wszędzie nawiasy przez znaki kropkowe, zastępując n-ty nawias (każdy z osobna) przez znak kropkowy n-go stopnia ($n = 1, 2, \ldots$).

3° kolejno opuszczamy po jednym z dwu znaków kropkowych n-go stopnia obejmujących formułę tegoż stopnia, zachowując przy tym ten z nawiasów, który stoi przy stałej logicznej bezpośrednio tworzącej z tą formułą (i ewentualnie inną formułą k-go stopnia) formułę stopnia wyższego, równego $\max(n, k)+1$.

4° jeżeli przy kropce pełniącej rolę znaku koniunkcji stoją znaki kropkowe stopni wyższych niż 1, to zastępujemy te trzy znaki znakiem kropkowym stopnia najwyższego z nich. Przykład:

$$\wedge x(\{(Fx) \wedge [\sim (Gx)]\} \rightarrow (Fx))$$
$$(x)\ (\{(Fx).[\sim (Gx)]\} \supset (Fx))$$
$$(x)\ ::.\ Fx\ .:\ \sim .\ Gx.:.\ \supset .\ Fx\ .::$$
$$(x)\ ::Fx\ .:\ \sim .\ Gx:.\ \supset .Fx$$
$$(x)\ ::Fx\ .:\ \sim .\ Gx:.\ \supset .Fx$$
$$(x)\ ::Fx:\ \sim .\ Gx:.\ \supset .Fx$$

Aby dokonać tłumaczenia fomuły zdaniowej z symboliki Peano-Russella należy dokonać czynności odwrotnych i w odwrotnej kolejności. Oczywiście przy pewnej wprawie można dokonać i dokonuje się w obu tych procedurach różnych uproszczeń.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; *Principia*. J. B. Rosser: *Logic for mathematicians*. 1953.

H. S.

syntaktyka. Jeden z działów *semiotyki (obok semantyki i pragmatyki). Dotyczy stosunków między znakami, takich jak wynikanie, sprzeczność, stosunki między elementami wyrażenia złożonego itp. Syntaktykę można przedstawić jako zbiór reguł, które dzielą się na dwie grupy: reguły składania (formowania) wyrażeń, określające, jak łączyć wyrażenia w bardziej złożone całości, oraz reguły przekształcania (transformowania), mówiące, jak otrzymywać jedne wyrażenia z innych w taki sposób, by dziedziczyła się przy tym określona własność wyrażeń, np. należenie do systemu. Przykładem tych ostatnich są reguły dedukcyjne *rachunku zdań, jak reguła odrywania czy podstawiania.

Carnap *Symb. log.*; – – *Syntax.*

W. M.

system dedukcyjny. Zbiór złożony ze zdań przyjętych bez dowodu, zwanych aksjomatami (twierdzeniami pierwotnymi) oraz zdań przyjętych na podstawie dowodów, których przesłankami są bądź twierdzenia pierwotne, bądź ich *konsekwencje.

Systemy dedukcyjne budowane są z różnym stopniem metodologicznej precyzji. Odpowiednio do tego mówi się o systemach dedukcyjnych w postaci przedaksjomatycznej, aksjomatycznej i sformalizowanej.

Inne rozróżnienie: Systemy dedukcyjne buduje się bądź za pomocą aksjomatów i reguł dowodzenia, bądź za pomocą samych reguł. Ta druga metoda nazywa się *dedukcją naturalną. W dalszym ciągu będzie mowa tylko o systemach budowanych pierwszą metodą, która nosi miano aksjomatycznej.

Często pojęcie systemu dedukcyjnego rozumie się węziej, nie obejmując nim nauki w postaci przedaksjomatycznej, albo jeszcze węziej: utożsamiając pojęcie systemu dedukcyjnego z pojęciem systemu sformalizowanego.

1. System dedukcyjny w postaci przedaksjomatycznej. Najwcześniej znana, najmniej zaawansowana metodologicznie postać nauki dedukcyjnej.

Twierdzenia przyjęte bez dowodu nie są wyraźnie wymienione; może być takim twierdzeniem każde zdanie oczywiste. Również nie wymienia się terminów przyjętych bez definicji.

Twierdzeń pochodnych dowodzi się w ten sposób, że szuka się jakichś zdań oczywistych albo już wcześniej udowodnionych, stanowiących rację logiczną dla danego zdania, a znalazłszy je, wyprowadza się z nich jako wniosek dane zdania dowodzone. To wnioskowanie ma charakter intuicyjny, tzn. opiera się na poczuciu oczywistości wynikania, a nie na regułach określających dokładnie stosunek wynikania.

2. System aksjomatyczny (niesformalizowany). System dedukcyjny, w którym zostały już skodyfikowane twierdzenia pierwotne i terminy pierwotne, natomiast sposób dowodzenia i definiowania nie jest ustalony.

Aksjomaty. Wyraźnie są wymienione aksjomaty, czyli twierdzenia pierwotne, lub podane są reguły tworzenia aksjomatów. Ten drugi sposób stosuje się, gdy przytoczenie wszystkich aksjomatów jest trudne, np. z powodu zbyt wielkiej ich liczby. Lista aksjomatów składa się bądź wyłącznie z twierdzeń należących do danej nauki ujętej w system dedukcyjny, bądź ponadto z twierdzeń zapożyczonych z innych nauk. Np. aksjomatycznie ujęta geometria zakłada logikę i arytmetykę liczb naturalnych, a *sylogistyka zdań asertorycznych zakłada *rachunek zdań. Aksjomaty nie zapożyczone z innej nauki nazywają się aksjomatami swoistymi (specyficznymi) danej nauki. Od aksjomatów, jako od twierdzeń przyjętych do systemu bez dowodu, żąda się, aby były oczywiste, co traktuje się jako gwarancję ich prawdziwości. Dąży się na ogół do tego, by liczbę aksjomatów ograniczyć do minimum.

Terminy pierwotne. Wyraźnie są wymienione wszystkie terminy przyjęte do systemu bez definicji (terminy pierwotne). Zachowują one swój dotychczasowy sens, przysługujący im w mowie potocznej. W systemie aksjomatycznym opartym na jakiejś innej nauce występują terminy zapożyczone z tamtej nauki i terminy swoiste (specyficzne) danej nauki, ujętej w system aksjomatyczny. Np. w *sylogistyce zdań asertorycznych terminami swoistymi są m. in.: „pewien... jest...", „każdy... jest..." Natomiast terminem zapożyczonym z rachunku zdań jest: „jeżeli..., to..."

Terminy pochodne. Obok terminów pierwotnych wprowadza się do systemu aksjomatycznego szereg terminów pochodnych, tj. terminów, które zostały zdefiniowane za pomocą terminów pierwotnych.

Twierdzenia pochodne i ich dowodzenie. Po zamknięciu listy aksjomatów tylko te zdania mogą być włączone do systemu aksjomatycznego, jako jego twierdzenia pochodne, które zostaną uprzednio udowodnione. Dowodzenie zaś polega po pierwsze na znalezieniu wśród aksjomatów lub twierdzeń już włączonych do systemu takich zdań, z których wynika zdanie dowodzone; po

drugie na wywnioskowaniu z nich zdania dowodzonego. Wnioskowanie to ma charakter intuicyjny (jak w systemie przedaksjomatycznym), tzn. opiera się na poczuciu oczywistości wynikania, nie jest określone przez wyraźnie sformułowane reguły.

3. System aksjomatyczny sformalizowany. Najbardziej zaawansowana metodologicznie postać systemu dedukcyjnego. Ściśle określona jest struktura wyrażenia sensownego, wymienione są aksjomaty, terminy pierwotne i ewentualnie sposób definiowania terminów pochodnych oraz skodyfikowane są reguły dowodzenia.

Definicja zdania sensownego. Dana jest lista wyrażeń prostych (stałe, zmienne i ewentualnie nawiasy) oraz reguły formowania (reguły sensu), które wymieniają warunki wystarczające, aby jakieś wyrażenie (proste lub złożone) było wyrażeniem sensownym w danej teorii. Np. w implikacyjno-negacyjnym rachunku zdań prostymi wyrażeniami są: znak implikacji „$\rightarrow$", znak negacji przyzdaniowej „$\sim$", zmienne zdaniowe p, q, r, ... oraz nawiasy różnej postaci.

Przykłady reguł formowania: „Jeżeli wyrażenie W jest jedną z prostych liter p, q, r, ..., to jest ono wyrażeniem sensownym". „Jeżeli wyrażenie W składa się z wyrażenia sensownego ujętego w nawiasy i poprzedzonego znakiem negacji, to jest ono wyrażeniem sensownym".

Aksjomaty. Terminy pierwotne. Wyraźnie wymienione są wszystkie aksjomaty. Dąży się, aby one były wzajemnie niezależne, tj. aby żaden z nich nie dał się wyprowadzić z pozostałych (*Niezależność formuł). Zamiast wykazu aksjomatów podaje się niekiedy reguły strukturalne jednoznacznie charakteryzujące aksjomaty, gdy np. aksjomatów jest nieskończenie wiele (*Aksjomatyzowalność).

Terminy pierwotne zapożyczone z innej teorii zachowują sens, jaki im przysługuje w tamtej teorii. Sens terminów specyficznych określony jest przez układ aksjomatów. Inaczej mówiąc, terminom pierwotnym specyficznym dla danej teorii nadaje się takie znaczenie, przy którym są spełnione aksjomaty tej teorii. Zwykle aksjomaty dopuszczają więcej niż jeden sposób rozumienia terminów pierwotnych. Przypisywanie terminom pierwotnym jakiegoś określonego sensu, przy którym aksjomaty tego systemu (a tym samym i twierdzenia pochodne) są spełnione, jest intepretowaniem tego systemu. Układ przedmiotów (tj. indywiduów, klas, stosunków), które jako denotacje terminów pierwotnych danej teorii dedukcyjnej lub jako zakres zmienności zmiennych zawartych w jej aksjomatach spełniają aksjomaty tej teorii, nazywa się *modelem tej teorii.

Definicje. Nie w każdym systemie sformalizowanym występują terminy pochodne, tj. zdefiniowane za pomocą terminów pierwotnych. Jeśli do systemu sformalizowanego wprowadza się terminy pochodne, to ściśle określa się strukturę definicji. Tak np. ustala się, czy definicje mają być tezami systemu, czy regułami zastępowania. Następnie wymaga się od definicji, aby spełniały pewne określone warunki, jak np. niesprzeczność, przekładalność (*Definicja normalna).

Reguły dowodzenia. Jako twierdzenia pochodne systemu sformalizowanego przyjmuje się tylko te zdania, które zostały udowodnione na gruncie tego systemu. Udowodnić jakieś twierdzenie w danym systemie znaczy tyle, co wyprowadzić to twierdzenie z aksjomatów tego systemu za pomocą reguł wnioskowania obowiązujących w tym systemie. Reguły te, zwane również regułami dedukcji lub dedukcyjnymi regułami wnioskowania, lub regułami inferencji, określają stosunek wynikania i mają charakter strukturalny. Przykłady reguły wnioskowania stosowanej w rachunku zdań: Jeśli uznajemy za prawdziwe pewne zdanie o postaci implikacji $\alpha \rightarrow \beta$ oraz uznajemy za prawdziwy poprzednik α tej implikacji, to musimy uznać za prawdziwy następnik β tej implikacji. Jest to tzw. reguła odrywania.

4. Rodzaje systemów sformalizowanych. W zależności od tego, czy aksjomaty traktuje się jako tezy uznane, czy rozumie się je inaczej, system jest asertoryczno-dedukcyjny lub hipotetyczno-dedukcyjny.

System dedukcyjny, którego aksjomaty się stwierdza, czyli uznaje, i w którym na podstawie uznania aksjomatów dochodzi się w drodze wnioskowania dedukcyjnego do uznania twierdzeń pochodnych, jest systemem asertoryczno-dedukcyjnym (łac. assertio – stwierdzenie).

System dedukcyjny, którego aksjomatów ani się nie uznaje, ani się nie odrzuca, a z tych aksjomatów wyprowadza się dedukcyjnie twierdzenia pochodne tego systemu, których również ani się nie odrzuca, ani się nie uznaje, jest systemem hipotetyczno-dedukcyjnym.

Systemy sformalizowane są bądź asertoryczno-dedukcyjne, bądź hipotetyczno-dedukcyjne, natomiast systemy nie sformalizowane są wyłącznie asertoryczno-dedukcyjne.

5. Własności metalogiczne systemów dedukcyjnych. Od systemów dedukcyjnych wymaga się lub uważa się za pożądane, by spełniały pewne warunki. Bezwzględnie wymaga się od każdego systemu *niesprzeczności (o ile ma on mieć jakieś zastosowanie w sensie *interpretacji); cechy pożądane, ale nie w każdym systemie osiągalne, to pełność, *zupełność, *rozstrzygalność, *kategoryczność, *niezależność aksjomatów. Są to tzw. metalogiczne własności systemu, które stanowią przedmiot obszernego działu metamatematyki, czyli teorii systemów dedukcyjnych.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Systemy aksjomatyczne z metodologicznego punktu widzenia.* [W:] *LTN* oraz [W:] *JiP.* T. 2; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; Kotarbiński: *Wykłady*; M. Przełęcki: *Interpretacja systemów dedukcyjnych.* [W:] *LNT*; H. Stonert: *Definicje w naukach dedukcyjnych.* 1959.

M. P.

systemy Leśniewskiego: prototetyka, ontologia, mereologia. Systemy logiczne Leśniewskiego składają się z trzech teorii: prototetyki, ontologii i mereologii. Dwa pierwsze są ze sobą ściślej związane, tworzą swego rodzaju całość. Z tego względu omówione zostaną razem, a osobno system mereologii.

1. Prototetyka i ontologia. Prototetyka jest systemem, którego język obejmuje wyrażenia kategorii zdania i kategorii funktorów zdaniopochodnych. Jest to język maksymalnie bogaty, zawiera bowiem wyrażenia wszystkich możliwych do pomyślenia kategorii zdaniopochodnych. Prototetyka obejmuje rachunek zdań, rachunek zdań z kwantyfikatorami, a nadto nadbudowaną nad nim swego rodzaju teorię funkcji zdaniopochodnych. W systemie tym są np. zmienne, których wartościami są funkcje odpowiadające czterem spójnikom jednoargumentowym rachunku zdań lub zmienne, których wartościami są funkcje odpowiadające szesnastu spójnikom dwuargumentowym rachunku zdań. Prototetyka jako system obejmujący rachunek zdań i jego nadbudowę jest systemem oryginalnym. Prototetyka jest systemem, który może być oparty na różnych terminach pierwotnych i na różnych aksjomatykach. Najbardziej elegancki jest system oparty na równoważności jako na terminie pierwotnym i na następującym jedynym aksjomacie zapisanym w symbolice zbliżonej do *symboliki Peano-Russella:

$$[p, q]::p \equiv q. \equiv :.[f]:.f(pf(p[u].u)). \equiv :[r]:f(qr). \equiv .q \equiv 1$$

Ontologia, u której podstaw leży system tzw. rachunku nazw, jest systemem obejmującym rachunek klas, rachunek relacji oraz niemal całą problematykę systemu *Principia mathematica*. Od tego systemu ontologia różni się tym, że o ile w nim wyrażenia najniższego typu przebiegają indywidua, to wyrażenia najniższego rodzaju w ontologii przebiegają klasy takich indywiduów. Nadto ontologia jest systemem o nieporównanie bogatszej hierarchii kategorii semantycznych.

Język ontologii obejmuje zmienne i stałe wyrażenia *kategorii semantycznej nazw, wszelkiego rodzaju *funktory nazwotwórcze od argumentów nazwowych, funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych oraz różne rodzaje funktorów funktorotwórczych; słowem, wszystkie kategorie semantyczne dające się określić za pomocą dwu podstawowych kategorii semantycznych: nazwy i zdania. System ontologii można oprzeć na różnych terminach pierwotnych i aksjomatach. Najbardziej elegancki system ontologii opiera się na tzw. epsylonie ontologicznym ε i na jednym aksjomacie bardzo prostym

$$[A, a]: A \varepsilon a. \equiv .[\mathrm{E}B]. A \varepsilon B. B \varepsilon a.$$

Zdanie typu $A \varepsilon a$ czytamy: „A jest a" lub „A jest jednym z a", gdzie A, a są stałymi lub zmiennymi kategorii semantycznej nazwowej. Zdanie $A \varepsilon a$ jest prawdziwe, gdy zakres nazwy A zawiera się w zakresie nazwy a, a nadto zakres nazwy A składa się z jednego przedmiotu.

2. Pewne właściwości charakterystyczne systemów Leśniewskiego. Jedną z cech specyficznych obydwu tych systemów jest adaptacja do języków sformalizowanych tzw. funkcji wieloogniwowych złożonych z dowolnej ilości ogniw: (symbol S jest tu jakąś stałą logiczną):

$$\mathrm{S}(\ldots, \ldots, \ldots)\{\ldots, \ldots\}[\ldots, \ldots, \ldots](\ldots, \ldots, \ldots).$$

Wewnątrz tych nawiasów mogą występować wyrażenia odpowiednich kategorii semantycznych. Schemat ten może być schematem wyrażenia z kategorii semantycznej nazwy, jak i zdania. Dzięki wprowadzeniu wyrażeń wieloogniwowych język systemów Leśniewskiego osiągnął maksymalne bogactwo wszystkich możliwych do pomyślenia kategorii semantycznych. Podkreślmy, że kwantyfikator i wielorakie nawiasy znajdują się w tych systemach poza podziałem na kategorie semantyczne. Kategorie semantyczne wyrażeń w systemach Leśniewskiego zaznacza się kształtem nawiasów.

Sam Leśniewski, a za nim Tarski podkreślali naturalność podziału wyrażeń na kategorie semantyczne, który został zastosowany przez Leśniewskiego, częściowo znajdującego się pod wpływami Husserla. Hierarchia ta jest tak naturalna, że według opinii tych logików doszłoby do jej powstania, nawet gdyby nie wyłoniło się zagadnienie zapobiegania antynomiom, które doprowadziły, w przypadku Russella, do powstania podziału wyrażeń na typy. Również pewne partie systemu ontologii, w szczególności tzw. ontologia elementarna, zawierają konstrukcje szczególnie bliskie mowie potocznej. To m. in. skłoniło T. Kotarbińskiego, wybitnego polskiego filozofa i logika, do przyjęcia ontologii za podstawę wielu konstrukcji teoretycznych, którym dał wyraz w znanym dziele *Elementy*. Dla swych systemów Leśniewski opracował oryginalną, pomysłową, nie pozbawioną walorów plastycznych symbolikę. Odznaczała się ona jednak dużym stopniem komplikacji i nie była zbyt przejrzysta. Z tego względu sam autor, jak i jego uczniowie stosowali ją niejako od święta, na co dzień używając zmodyfikowanej *symboliki Peano-Russellowskiej. Do oryginalnej symboliki odwoływały się dyrektywy tych systemów.

Formalizm systemu Leśniewskiego, według opinii Tarskiego, należy uznać za szczytowe osiągnięcie swego czasu, jeśli się zważy, że są to systemy; 1° o maksymalnie bogatej hierarchii kategorii semantycznych, 2° o specyficznie konstruktywistycznej koncepcji w pojmowaniu systemu, 3° zawierające funkcje wieloogniowe, 4° z definicjami pojętymi jako tezy systemu. W wielu punktach formalizacji prace Leśniewskiego były, na owe czasy, pionierskie.

Systemy Leśniewskiego oparte są na następujących regułach (dyrektywach): A. dyrektywa podstawiania; B. dy-

rektywa odrywania w odniesieniu do równoważności; C. dyrektywa rozkładania dużego kwantyfikatora; D_1. dyrektywa dołączania definicji typu prototetycznego, D_2. dyrektywa dołączania definicji typu ontologicznego; E_1. dyrektywa dołączania tez ekstensjonalności typu prototetycznego, E_2. dyrektywa dołączania tez ekstensjonalności typu ontologicznego. System prototetyki opiera się na dyrektywacn A, B, C, D_1, E_1. System ontologii na dyrektywach A, B, C, D_1, D_2, E_1, E_2. Ściśle rzecz biorąc, prototetyka, jeśli nie uprawiana autonomicznie, jest częścią systemu ontologii.

Na uwagę zasługuje występująca u Leśniewskiego koncepcja systemu dedukcyjnego, którą zastosował do swych systemów prototetyki i ontologii – w przeciwieństwie do panującej obecnie koncepcji teorii naukowej, ukształtowanej w dużej mierze pod wpływem prac Tarskiego, według której system dedukcyjny jakiejś teorii jest zbiorem zdań potencjalnie danym jako całość, potencjalnie ukształtowanym. Jego wyrażenia są (z wyjątkiem może terminów definiowanych) z góry dane. Natomiast system według koncepcji Leśniewskiego to zbiór zdań, który się stopniowo rozwija. Stąd system ten to zawsze skończony zbiór zdań zaczynający się od aksjomatów, a kończący na jakiejś tezie. System, dla którego ustalone są ścisłe formy rozwoju. Podobnie i kształt wyrażeń stałych i zmiennych nie jest dla niego przewidziany. Można więc uznać, że jest to w pewnym sensie jakaś konstruktywistyczna koncepcja systemu.

Specyficzna jest również rola definicji w systemach Leśniewskiego. Pojmował on definicje zawsze jako tezy systemu. Zdania te podlegały w zasadzie dwu schematom definicji prototetycznych, dotyczących zdań i funktorów zdaniotwórczych, i ontologicznych, dotyczących nazw i funktorów nazwotwórczych. Definienda w tych definicjach są zawsze kontekstami zdaniowymi. Definicje w tych systemach wprowadzają kategorię semantyczną, tzn. wolno używać zmiennych tej kategorii, która występuje w aksjomacie lub w wyrażeniu zdefiniowanym. Ważna jest również metodologiczna funkcja definicji. Pełnią one w systemach Leśniewskiego rolę twórczą, tzn. w systemach tych są tezy nie zawierające terminów zdefiniowanych, których nie można udowodnić bez uciekania się do pomocy definicji. Twórczością definicji i tym, że są one tezami systemu, da się w pewnej mierze wytłumaczyć rekordowa prostota aksjomatyki tych systemów.

3. Mereologia jest trzecim z kolei systemem Leśniewskiego, zakładającym prototetykę i ontologię jako systemy logiczne wcześniejsze. Mereologia jest teorią stosunku części do całości, można ją również uważać za teorię zbioru i klasy w znaczeniu kolektywnym. Pojęcia te są w mereologii charakteryzowane na drodze aksjomatycznej lub definicyjnej. Ponieważ pojęcie części całości jest raczej oczywiste, ograniczymy się więc do wyjaśnienia dwu pozostałych pojęć: zbioru (kolektywnego) i klasy (kolektywnej). Zbiór kolektywny a-ków to taki przedmiot A, którego każda część ma w sobie część tego lub innego a-ka będącego częścią przedmiotu A. Zaś klasa kolektywna a-ków to przedmiot A, którego każda część zawiera w sobie część jakiegoś z a-ków, będącego częścią przedmiotu A i nadto każdy a-k jest częścią przedmiotu A. W pojęciu zbioru kolektywnego i klasy kolektywnej, jak widać, uwikłane jest pojęcie *zbioru w sensie dystrybutywnym – jest to konsekwencja zastosowania ontologii do mereologii. Pojęcia mereologiczne znajdują liczne zastosowania.

Mereologię, podobnie jak inne systemy Leśniewskiego, można oprzeć na różnych terminach pierwotnych i różnych aksjomatykach. Przytoczymy jedyny aksjomat mereologii sformułowany za pomocą jednego terminu pierwotnego „el" (czyli element) będącego funktorem typu $\frac{n}{n}$.

$$[AB]:: A \varepsilon \mathrm{el}(B). \equiv :: B\varepsilon B: \cdot :[Ca]: :[D]: :D\varepsilon C. \equiv :. [E]::E\varepsilon a. \supset . E\varepsilon\mathrm{el}(D):. [E]: E\varepsilon\mathrm{el}(D). \supset .[\exists F\ G]:F\varepsilon a.\ G\varepsilon\mathrm{el}(E).\ G\varepsilon\mathrm{el}(F):\cdot :B\varepsilon\mathrm{el}(B):\cdot : \supset .A\varepsilon\mathrm{el}(C).$$

4. Uwagi historyczne. Stanisław Leśniewski ogłosił problematykę mereologiczną w postaci systemu dedukcyjnego w r. 1916 w związku z zagadnieniem *antynomii. Uważał on początkowo, że źródłem antynomii Russella jest pomieszanie pojęcia zbioru w sensie kolektywnym i dystrybutywnym. Zdając sobie sprawę, że mereologia wymaga podbudowy w postaci ogólniejszej teorii, skonstruował w r. 1920 system rachunku nazw, który nazwał ontologią. Ontologia najpierw była teorią elementarną, a następnie nadbudowany na niej został system hierarchii kategorii semantycznych. W międzyczasie Leśniewski zainteresował się rachunkiem zdań i uogólnił go do systemu protetyki. Przez cały okres swej działalności Leśniewski i jego współpracownicy doskonalili i badali skonstruowane przez niego systemy logiczne głównie pod względem uściślenia ich formalizmu, uproszczenia ich aksjomatyki, wyboru tych lub innych terminów pierwotnych. W badaniach nad systemami Leśniewskiego współpracowali z nim A. Tarski, M. Wajsberg, P. Sobociński, J. Słupecki i C. Lejewski.

Znaczenie systemów Leśniewskiego należy ocenić na tle okresu, w którym one się pojawiły. Był to okres, w którym usiłowano zbudować wielkie systemy obejmujące całą więdzę dedukcyjną, usiłowano sprowadzić matematykę do logiki. Systemy Leśniewskiego należy oceniać jako realizację tego właśnie programu na równi z systemami prostej teorii typów i z systemem *Principia mathematica*, nad którym systemy Leśniewskiego górowały pod wieloma względami. Obecnie wielkie systemy straciły na aktualności, przestano się nimi interesować na korzyść systemów o małym zasięgu, obejmujących poszczególne teorie matematyczno-logiczne. Systemy Leśniewskiego podzie-

liły ten los na równi z systemami prostej *teorii typów i systemem *Principia mathematica*.

Oceniając znaczenie systemów Leśniewskiego nie sposób nie podkreślić ich wielkiego wpływu, jaki wywierały bezpośrednio lub pośrednio na środowisko logiczne, które w okresie międzywojennym żyło w aurze badań nad tymi systemami. Nie sposób również nie wspomnieć o wpływie filozoficznym, jaki systemy Leśniewskiego wywierały poprzez prace T. Kotarbińskiego, który pewne ich fragmenty i koncepcje zaadaptował do głoszonych przez siebie poglądów filozoficznych.

Pewną aktualność i zastosowanie znajdują obecnie mereologia i elementarna ontologia. Ta ostatnia stanowi podstawę licznych prac logicznych T. Kubińskiego; nawiązują do niej badania R. Suszki nad skonstruowaniem bezkwantyfikatorowych systemów możliwie zbliżonych do języka naturalnego. Systemy Leśniewskiego kultywowane są we wrocławskim środowisku logicznym grupującym się wokół J. Słupeckiego. Systemy Leśniewskiego były przedmiotem fragmentarycznych badań metalogicznych prowadzonych przez samego Leśniewskiego i jego uczniów; dotyczyły one m. in. związków tych systemów z innymi systemami logicznymi. Ostatnio A. Grzegorczyk, rozwijając pewne sugestie Tarskiego, zauważył pewne związki między fragmentami systemów Leśniewskiego a *algebrą Boole'a. Badania te są bardzo utrudnione m. in. z uwagi na specyficzne właściwości cechujące te systemy, o których wspominaliśmy.

Wszechstronne i wnikliwe omówienie systemów Leśniewskiego zawierają prace Słupeckiego. Pełne monograficzne opracowanie daje Luschei. Przystępny wykład szeregu twierdzeń i definicji ontologii zawierają *Elementy* Kotarbińskiego. Opis języków systemów Leśniewskiego znajduje się w pracy Stonerta. Pewne uwagi krytyczne zawiera artykuł Grzegorczyka.

A. Grzegorczyk: *The systems of Leśniewski in relation to contemporary logical research*, „St. Log." III 1955; Kotarbiński: *Elementy*; E. C. Luschei: *The logical systems of Leśniewski*. 1962; J. Słupecki: *St. Leśniewski's calculus of names*, „St. Log." III 1955; – – *St. Leśniewski's protothetics*. „St. Log." III 1953; – – *Towards a generalised mereology of Leśniewski*. „St. Log." VIII 1958; H. Stonert: *Definicje w naukach dedukcyjnych*. 1959.

H. S.

Śleszyński Jan (1854–1931; Polska). Studiował na wydziale matematycznym w uniw. w Odessie (1871–1875). Docent matematyki uniw. w Odessie (1893–1898) i profesor zwyczajny tejże uczelni (1898–1909); docent Uniw. Jagiellońskiego (1911–1919); profesor zwyczajny matematyki i logiki tejże uczelni (1919–1924). Zajmował się m. in. *rachunkiem zdań, który nazywał teorią dowodu.

W. M.

Tarski Alfred (1901 – 1983) jeden z czołowych przedstawicieli warszawskiej szkoły logicznej. Studiował w Uniwersytecie Warszawskim pod kierunkiem J. Łukasiewicza i S. Leśniewskiego, doktoryzując się z matematyki w 1924. W 1926 został docentem tegoż uniwersytetu. W 1939 znalazł się w USA, w 1942 został wykładowcą matematyki w University of California (Berkeley), a w 1946 tamże profesorem matematyki.

Wszechstronna działalność Tarskiego na polu rachunków logicznych, metamatematyki i semantyki, a także teorii mnogości, algebry, topologii, arytmetyki i geometrii, jak i doniosłość osiągniętych wyników stawiają go w rzędzie najwybitniejszych matematyków naszego stulecia; jego prace z logiki matematycznej stanowią też znaczący wkład do filozofii. Do szczególnie znanych osiągnięć należą definicje prawdy, definiowalności, modelu, konsekwencji logicznej, ω-niesprzeczności, ω-zupełności, także rachunek systemów, algebraiczne ujęcia logiki, badania nad rozstrzygalnością, logika nieskończenie długich formuł (*Logiki uogólnione), słabe logiki drugiego rzędu (tj. ze zmiennymi ograniczonymi do zbiorów skończonych). Umiał też Tarski w sposób dla każdego zrozumiały i ciekawy przedstawiać idee logiczne i matematyczne, o czym świadczy m. in. książka *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, 1936, która stała się światowym bestsellerem logicznym; w 1937 ukazała się po niemiecku, a po ukazaniu się rozszerzonej wersji angielskiej *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*, 1941 (ulepszone wydanie 1946) doczekała się niezliczonych przekładów i wznowień.

Najdonioślejszą dla rozwoju logiki i filozofii jest praca *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, 1933 (wersja niemiecka w „Studia Philosophica I" 1936), w której po raz pierwszy w dziejach filozofii została precyzyjnie sformułowana klasyczna definicja prawdy, ze wskazaniem zarazem ograniczeń, którym musi podlegać taka definicja by zapobiec pojawieniu się antynomii kłamcy. Pozostałe monografie książkowe: *A decision method for elementary algebra and geometry*, 1951; *Undecidable theories*, 1953 (wspólnie z A. Mostowskim i R. M. Robinsonem). Ważniejsze prace z lat 1923 – 1938, przełożone na angielski przez J. H. Woodgera, zostały wydane w tomie *Logic, semantics, metamathematics*, 1956.

Alfred Tarski stał się najszerzej znanym w świecie uczonym polskim XX wieku, o czym świadczy rekordowo wielka liczba odniesień do jego twórczości występujących w pracach nie tylko logików i matematyków, lecz także filozofów, lingwistów i in. Pod względem liczby odniesień zajmuje on także pierwsze miejsce wśród logików naszego stulecia; jest to obiektywny wskaźnik wpływu Tarskiego na współczesną logikę, a tę on sam uważał za naukę, która na równi ze współczesną fizyką dokonała przewrotu w myśleniu ludzi o własnym umyśle.

W. M.

tautologia. Wyrażenie, które jest prawdziwe w każdej (niepustej) *dziedzinie. Jako przykład tautologii może służyć dowolne prawo klasycznego *rachunku zdań lub *rachunku kwantyfikatorów.

Formułując dokładniej określenie tautologii, dogodnie jest uczynić to osobno dla rachunku zdań i dla rachunku kwantyfikatorów, ze względu na odmienną budowę wyrażeń w tych rachunkach. Oto odpowiednie określenia.

Wyrażenie W jest tautologią klasycznego rachunku zdań wtedy i tylko, gdy przy każdym podstawieniu stałych za zmienne przechodzi w zdanie prawdziwe.

Przykład. Wyrażenie $p \rightarrow \sim \sim p$ staje się zdaniem prawdziwym zarówno wtedy, gdy podstawimy za p jakiekolwiek zdanie prawdziwe (np. $2+2=4$), jak i wtedy, gdy podstawimy jakiekolwiek zdanie fałszywe (np. $2+2=0$).

Ponieważ w odniesieniu do wyrażeń rachunku kwantyfikatorów nie można się posłużyć pojęciem podstawiania (ze względu na obecność *zmiennych związanych), definicję tautologii trzeba sformułować inaczej:

Zdanie Z zawierające predykaty $P_1, P_2, ..., P_k$ jest tautologią rachunku kwantyfikatorów wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie przy dowolnym rozumieniu symboli $P_1, P_2, ..., P_k$ jako wyrażeń odnoszących się do pewnych własności lub relacji z danej dziedziny.

Przykład. Zdanie $\sim \wedge x P(x) \rightarrow \forall x \sim P(x)$ jest prawdziwe niezależnie od tego, jakie przedmioty są wartościami zmiennej x (innymi słowy – prawdziwe w każdej dziedzinie przedmiotów); mogą to być liczby, ludzie, gwiazdy, chrabąszcze itd. Jest też prawdziwe przy każdej interpretacji symbolu P, tzn. niezależnie od tego, jaki sens przypisze się temu symbolowi. W dziedzinie liczb naturalnych może to być np. predykat „jest większe od 3"; wtedy powyższy wzór jest równoznaczny ze zdaniem: „Jeśli nie każda liczba naturalna jest większa od 3, to istnieje liczba naturalna, która nie jest większa od 3". O ile rozważaną

dziedzinę stanowi zbiór ludzi, a wśród predykatów znajduje się zwrot „stoi na głowie", to nasz wzór jest prawdziwy również w tej dziedzinie i przy tej interpretacji predykatu P. Znaczy on wówczas: „Jeśli nie każdy stoi na głowie, to istnieje ktoś, kto nie stoi na głowie".

Zbiór tautologii pokrywa się ze zbiorem twierdzeń w *klasycznym rachunku logicznym. Tej własności, zwanej pełnością, (*Zupełność systemów), dotyczy twierdzenie Gödla z r. 1930.

Logiczne pojęcie tautologii należy odróżniać od potocznego rozumienia tego terminu, przy którym znaczy on tyle, co: powtórzenie tego, co zostało już powiedziane. To obiegowe rozumienie wywodzi się z identycznego znaczenia greckiego słowa $\tau\alpha\nu\tau o\lambda o\gamma\iota\alpha$ (od $\tau\alpha\nu\tau o\varsigma$ – ten sam, $\lambda o\gamma o\varsigma$ – mowa), które pojawiło się w pismach Dionizjusza z Halikarnasu, autora dzieł historycznych i retorycznych z czasów Augusta. Przystosowanie słowa „tautologia" na użytek logiki nastąpiło za sprawą L. Wittgensteina i F. P. Ramseya w latach dwudziestych. W *Traktacie* Wittgensteina znalazło się sformułowanie, podjęte następnie przez K. Poppera i in., że tautologia dopuszcza każdy możliwy stan rzeczy (lässt jede mögliche Sachlage zu; punkt 4.462). Innymi słowy: nie dostarcza żadnej informacji, tak jak nie dostarcza jej powiedzenie „Pada lub nie pada", otrzymane z podstawienia w $p \vee \sim p$. W sposób widoczny własność ta przysługuje tezom rachunku zdań, gdy się je przedstawi w koniunkcyjnej *postaci normalnej; np. $((p \to q) \wedge p) \to q$, po odpowiednich przekształceniach sprowadza się do postaci $(q \vee (\sim p \vee p)) \wedge ((q \vee \sim q) \vee p)$, będącej tautologią jako koniunkcja dwóch tautologii.

Carnap: *MaN*; K. Gödel: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. „MMP" XXXVII 1930; Grzegorczyk: *Log. mat.*; J. Hintikka: *Distributive normal forms in first-order logic*. [W:] *Formal systems and recursive functions* (wyd. J. N. Crossley, M. A. E. Dummet). 1963; – – *Are logical truths analytic?* „Philos. Rev." LXXIV 1965; Mostowski: *Log. mat.*; Popper: *Log. sc. disc.*; F. P. Ramsey: *The foundations of mathematics*. 1931; G. H. v. Wright: *Logical studies* 1957; L. Wittgenstein: *Tractatus logico-philosophicus*. 1922.

W. M.

teoria dedukcyjna. Zbiór wyrażeń jest teorią dedukcyjną, zwaną też system.em dedukcyjnym, wtedy i tylko, gdy każda teza w tym zbiorze wynika z aksjomatów oraz każde wyrażenie wynikające z aksjomatów jest tezą.

Grzegorczyk: *Log. mat.*

W. M.

teoria mnogości (t. zbiorów). Przedmiotem badań teorii mnogości są własności zbiorów w sensie dystrybutywnym; jej twierdzenia orzekają o dowolnych zbiorach, niezależnie od tego, czym byłyby elementy tych zbiorów. Samo pojęcie zbioru oraz pojęcie bycia elementem nie posiadają definicji na gruncie teorii mnogości, są one w tej teorii pojęciami pierwotnymi. W aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości znaczenie tych pojęć określone jest przez aksjomaty, w których one występuia.

1. Przegląd zagadnień. Podstawowymi działami teorii mnogości są: *rachunek zbiorów (algebra zbiorów) oraz *teoria relacji. W pierwszym z nich opisane są działania na zbiorach – podane są więc własności sumy, iloczynu, różnicy i różnicy symetrycznej zbiorów, dopełnienia zbiorów, a także iloczynu kartezjańskiego zbiorów. Scharakteryzowane są prócz tego: zawieranie się zbiorów, czyli inkluzja, równość zbiorów; ponadto wprowadzone są pojęcia zbioru pustego i pełnego. Pokrewną z rachunkiem zbiorów jest bardziej abstrakcyjna teoria – *algebra Boole'a, ciekawa ze względu na swe różnorodne zastosowania (część rachunku zbiorów może być uważana za jej *interpretację).

Drugi z działów – teoria relacji – jest niejako na pierwszym nadbudowany, gdyż relacje (stosunki) określone są jako podzbiory *iloczynów kartezjańskich zbiorów (np. relacje dwuargumentowe jako zbiory par elementów). W rachunku relacji występują działania na relacjach analogiczne do działań na zbiorach z rachunku zbiorów. W rachunku relacji zdefiniowane są jeszcze: relacja odwrotna do danej (konwers relacji) i złożenie relacji (superpozycja). Odrębne miejsce w teorii relacji zajmują rozważania dotyczące funkcji, tj. relacji jednoznacznych, gdzie w szczególności opisuje się relacje jedno-jednoznaczne. Ze względu na posiadane formalne własności, ważne są relacje równoważności oraz relacje porządkujące, których pojęcia wyprecyzowane w rachunku relacji służą wielu dyscyplinom matematycznym. Także dwa następne działy teorii mnogości: *teoria mocy zbiorów oraz w swym klasycznym ujęciu *teoria zbiorów uporządkowanych oparte są, odpowiednio, na pojęciu równoliczności, które jest pewną relacją równoważnościową, oraz na pojęciach relacji porządkujących.

Trzeci dział teorii mnogości, zwany teorią mocy, zajmuje się zagadnieniami związanymi z uogólnieniem pojęcia ilości elementów w zbiorze na zbiory nieskończone. Poprzez określenie pojęcia mocy (liczności zbiorów), które jest ufundowane na pojęciu równoliczności, definiuje się tutaj liczby kardynalne. W ramach teorii mocy rozbudowana jest *arytmetyka liczb kardynalnych, która dla skończonych liczb kardynalnych pokrywa się ze zwykłą arytmetyką liczb naturalnych. Zasadnicze znaczenie ma zdefiniowanie zbiorów nieskończonych oraz wyróżnienie spośród nich zbiorów przeliczalnych i zbiorów mocy continuum.

Teoria zbiorów uporządkowanych bada własności zbiorów zależne od uporządkowania ich elementów. Analizowane są zbiory częściowo uporządkowane, uporząd-

kowane liniowo oraz dobrze uporządkowane. Pojęcie typu porządkowego umożliwia klasyfikację zbiorów uporządkowanych i jest punktem wyjścia rozważań o liczbach porządkowych – typach porządkowych zbiorów dobrze uporządkowanych, które ujęte są w arytmetyce liczb porządkowych. Obecnie modne jest traktowanie zbiorów uporządkowanych jako pewnego rodzaju struktur algebraicznych.

Zadaniu całościowego ujęcia teorii mnogości w postaci sformalizowanego systemu dedukcyjnego próbują sprostać liczne aksjomatyzacje tej teorii (*Teoria mnogości Zermelo; *Teoria mnogości v. Neumanna, *Teoria mnogości Quine'a).

Doniosłość swą teoria mnogości zawdzięcza bogatym zastosowaniom na gruncie poszczególnych nauk matematycznych, które nie tylko posługują się jej pojęciami, ale także korzystają z twierdzeń w niej udowodnionych.

2. Rys historyczny. Twórcą teorii mnogości jest G. Cantor (1845–1918), który w pracach opublikowanych w latach 1871–1883 sformułował zasadniczy zrąb tej teorii, podając podstawowe własności pojęcia zbioru, definiując za jego pomocą szereg innych pojęć oraz dowodząc licznych twierdzeń, które zajmują do tej pory miejsce centralne w teorii. Jednakże pewne działy teorii mnogości, zwłaszcza algebra zbiorów, ukształtowały się już wcześniej. Początków algebry zbiorów można doszukać się w pracach G. Leibniza (XVII w.), którego pomysły były rozwijane przez J. H. Lamberta (1728–1777) oraz L. Eulera (1707–1783). Powszechnie znanym osiągnięciem Eulera w tej dziedzinie jest podanie ilustracji geometrycznej stosunków między zbiorami. Pierwsze próby formalnego ujęcia relacji znajdujemy u Hamiltona (1788–1856) i de Morgana (1806–1878). G. Boole (1815–1864) ujął rachunek zbiorów w postaci w pełni sformalizowanej teorii, zwanej od jego imienia algebrą Boole'a (pierwsza praca na ten temat w 1854 r.). Rachunek relacji w połączeniu z algebrą zbiorów rozwijali Ch. S. Peirce (1839–1914) i E. Schröder (1841–1902). Zaawansowane rozważania o zbiorach nieskończonych występują w pracach z analizy matematycznej, np. u Dedekinda czy Du Bois-Reymonda. Wszystkie te wcześniejsze rozważania były tylko fragmentaryczne oraz nie dorównywały swą precyzją ujęciu Cantora. Ale i Cantor posługiwał się intuicyjnym, nie sprecyzowanym jednoznacznie pojęciem zbioru, co na przełomie XIX i XX w. doprowadziło do powstania szeregu antynomii na gruncie jego teorii. Do najbardziej znanych należą antynomie Russella i Burali-Fortiego. Już w 1904 r. E. Zermelo opracował pierwszą aksjomatykę teorii mnogości, która zawężając zakres pojęcia zbioru uniemożliwiła konstruowanie antynomii. B. Russell obmyślił inny sposób uniknięcia antynomii, jego pomysł polegał na wyróżnieniu typów logicznych. W 1910 r. opublikował wraz z A. N. Whitehead dem fundamentalne dzieło *Principia mathematica*, w którym między innymi wyłożona jest *teoria typów – jest to pierwszy całościowy i w pełni usystematyzowany wykład teorii mnogości. Te dwie drogi znalazły licznych kontynuatorów. System Zermelo został ulepszony kolejno przez A. A. Fraenkla i Th. Skolema. Nieco odmienną aksjomatykę podał v. Neumann; stała się ona punktem wyjścia systemów v. Neumanna-Gödla-Bernaysa. Na drodze wytyczonej przez Russella istotnych postępów dokonał L. Chwistek (1892–1943). W r. 1933 A. Tarski opracował ogólną teorię klas. Także w tym kierunku prowadził badania A. Church, który w 1940 r. ogłosił prostą teorię typów. Do tej grupy można zaliczyć także *systemy Leśniewskiego. Odmienne od wymienionych tutaj jest ujęcie teorii mnogości przez Quine'a.

Spośród wielu szczególnych zagadnień teorii mnogości, jakie zostały rozwiązane od czasów Cantora, na szczególną uwagę zasługują osiągnięcia P. J. Cohena, który w 1964 r. podał dowód niezależności kontrowersyjnego *pewnika wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości oraz wykazał niezależność *hipotezy continuum od aksjomatyki Zermelo-Fraenkla-Skolema.

Znaczny wkład w rozwój teorii mnogości wnieśli logicy i matematycy polscy, zwłaszcza jeśli idzie o zastosowanie jej do innych nauk matematycznych.

P. S. Aleksandrow: *Wwiedienije w obszczuju tieoriju mnożetsw i funkcij*. 1948; P. Bernays: *Axiomatic set theory*. 1958; N. Bourbaki: *Théorie des ensembles*. 1970; J. Brener: *Introduction to the theory of sets*. 1958; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Hao-Wang, R. McNaughton: *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*. 1953; F. Hausdorff: *Mengenlehre*. 1927; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Suszko: *Wykłady*; A. Tarski: *Cardinal algebras*. 1949.

K. Cz.

teoria mnogości Quine'a obejmuje dwa systemy.

System New Foundations, krótko zwany NF. Ogłoszony został przez Quine'a w jego pracy z r. 1934. U podstaw tego systemu leżą dwie idee zapobiegania antynomiom logicznym. Jedna z nich to pomysł Zermelo, zastosowany w jego systemie teorii mnogości, polegający na ograniczeniu tworzenia 'zbiorów bardzo obszernych' głównie przez ograniczenie dawnego pewnika abstrakcji

$$\bigvee y \bigwedge x [x \in y \equiv \Phi(x)].$$

Drugi to idea Russella zabezpieczenia się przed *antynomiami poprzez typizację wyrażeń języka (*Teoria typów). Quine z każdej z tych myśli coś zatrzymał. Zreformował pewnik abstrakcji (wpływ Zermelo), nakładając na występującą w tym pewniku formułę $\Phi(x)$ warunek stratyfikowalności (wpływ Russella).

System NF jest systemem elementarnym, zawiera tylko jeden rodzaj zmiennych $x, y, z, \ldots$ Jedynym jego terminem jest dwuargumentowy predykat $\ldots \in \ldots$ System ten opiera

się na dwu aksjomatach

$$\wedge x(x \in y \equiv x \in z) \rightarrow y = z$$

(odpowiednik *aksjomatu ekstensjonalności) oraz

$$\vee y \wedge x[x \in y \equiv \Phi(x)],$$

gdzie formuła $\Phi(x)$ jest stratyfikowalna i nie zawiera zmiennej y. Aksjomat ten jest odpowiednikiem pewnika podzbiorów (aksjomatu wyróżnienia) z teorii mnogości.

Stratyfikowalność. Formuła F jest stratyfikowalna, gdy istnieje podstawienie za zmienne występujące w zdaniach elementarnych formuł F liczb całkowitych tak, aby zdanie elementarne przekształciło się w formułę, w której po $\in$ występuje liczba o jeden większa niż liczba stojąca przed tym znakiem. Formuła $x \in y \wedge y \in z$ jest stratyfikowalna, natomiast $x \in y \wedge y \in x$ nie jest stratyfikowalna.

Pewnik definicyjny Quine'a zapewnia istnienie zbiorów podlegających hierarchii typów. Jest to wielka liberalizacja w stosunku do teorii typów, w której stratyfikowalne są wszystkie zdania, podczas gdy u Quine'a tylko formuła składowa pewnika deficyjnego. W systemie NF niektóre twierdzenia są formułami niestratyfikowalnymi.

System NF nie ma również wad systemu teorii typów: nie występuje w nim zjawisko systematycznej wieloznaczności: zbiór uniwersalny, zbiór pusty, liczby naturalne występują w tym systemie raz.

W systemie tym dają się przedstawić: *rachunek zbiorów, *teoria relacji, *arytmetyka, pewne partie klasycznej teorii mnogości. W wielu jednak punktach teoria mnogości systemu NF różni się od teorii mnogości klasycznej. Istnieje zbiór uniwersalny. Każdy zbiór ma swoje uzupełnienie. Nie zachodzi w całej rozciągłości twierdzenie, że każdy zbiór jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swych jednoelementowych podzbiorów. Nie jest również ogólnie słuszne twierdzenie Cantora, że każdy zbiór jest mniejszej mocy od zbioru wszystkich swoich podzbiorów. Nie wszystkie dowody przez indukcję dadzą się przeprowadzić. Również pewnik wyboru może być stosowany w nich tylko do zbiorów, o których założy się, że są zbiorami Cantorowskimi, tj. równolicznymi ze zbiorem swych jednoelementowych podzbiorów. Widać stąd, że u podstaw systemu NF leży inne pojęcie zbioru niż w klasycznej teorii mnogości.

Dotychczas nie udało się udowodnić niesprzeczności systemu NF w oparciu o system Zermelo, w odwrotną stronę natomiast takie twierdzenie udało się udowodnić.

System NF, jakkolwiek nie bardzo rozpowszechniony wśród matematyków, stanowi jednak podstawę obszernego podręcznika logiki dla matematyków napisanego przez Rossera.

System Mathematical Logic. Zwany krótko ML, ogłoszony został w r. 1940 w książce Quine'a *Mathematical logic*, która doczekała się licznych wydań. System ML stanowi rozwinięcie systemu NF analogicznego do rozszerzenia dokonanego przez v. Neumanna w odniesieniu do systemu Zermelo. Choć system ML uchodzi za bardziej wygodny i obszerniejszy od systemu NF, mimo to, zakładając niesprzeczność systemu NF, można udowodnić niesprzeczność systemu ML.

Hao Wang, R. Mc Naughton: *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*. 1953; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Quine: *ML*; — — *New foundations for mathematical logic*. „American Mathematical Monthly" XLIV 1934; J. B. Rosser: *Logic for mathematicians*. 1953.

H. S.

teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla. System aksjomatycznej *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla był i do dziś jest uważany za zadowalający. Zaspokaja on dobrze potrzeby matematyki. Można w nim ujmować całą problematykę teorii mnogości. Nadaje się również do licznych zastosowań i włączany jest do wielu podręczników logiki. Pewnym brakiem tego systemu, i to zarówno z punktu widzenia matematycznego, jak i filozoficznego, jest niemożność mówienia w tym systemie o pewnego rodzaju zbiorach, np. zbiorze wszystkich zbiorów, zbiorze wszystkich liczb porządkowych, zbiorze wszystkich liczb kardynalnych itp. Zbiory takie nie istnieją w systemie teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, gdyż dopuszczenie ich prowadziłoby nieuchronnie do powstania *antynomii. Z drugiej strony, niemożność mówienia o takich zbiorach jest pewnego rodzaju niewygodą. Także z filozoficznego punktu widzenia jest to ograniczenie wskazujące na to, że Zermelowskie ujęcie zbiorów jest w pewnym sensie zbyt wąskie.

Na ukształtowanie się koncepcji zbioru leżącej u podstaw Zermelowskiej teorii mnogości duży wpływ wywarły antynomie i troska o ich zlikwidowanie. Analizując aksjomaty tego systemu, zauważymy, że poza aksjomatem nieskończoności tylko aksjomat tworzenia par stwierdza istnienie zbiorów w sposób bezwzględny. Pozostałe zaś aksjomaty pozwalają wprowadzać zbiory na podstawie zbiorów już istniejących, które można dodawać, tworzyć zbiór ich podzbiorów itp. Jak z tego widać, droga wprowadzania zbiorów leżąca u podstaw systemu Zermelo jest bardzo wąska i wiele zbiorów nie może się przez nią 'przecisnąć'. Ograniczenie to podyktowane zostało przeświadczeniem panującym w okresie walki z antynomiami, które podzielał również Zermelo, że antynomie, nazwane później logicznymi, powstają przez dopuszczenie do rozważań zbiorów w pewnym sensie 'bardzo bogatych', 'bardzo dużych', jak wspomniany wyżej zbiór wszystkich zbiorów czy zbiór wszystkich liczb porządkowych. Gdyby bezpośrednie niebezpieczeństwo antynomii minęło, gdy w ten lub w inny sposób umiano im zapobiegać, wśród filozofów i matematyków zajmujących się podstawami matematyki zaczęto się zastanawiać nad tym, czy zastosowane

przeciw nim środki nie były zbyt drakońskie i czy w rezultacie nie okroiły zbyt poważnie koncepcji zbioru, usuwając tym samym z teorii mnogości pewne jego rodzaje i zubożając problematykę teorii.

Do myślicieli tego kręgu należał J.v. Neumann. Matematyk ten już w 1920 r. dał wyraz swemu niezwykle oryginalnemu i wnikliwemu poglądowi, że powodem powstawania antynomii logicznych Russella, Burali-Fortiego, zbioru wszystkich zbiorów itp. jest nie to, że dopuszcza jako przedmiot rozważań zbiory 'bardzo obszerne', jak to powszechnie uważano, ale niewłaściwe ich traktowanie, polegające na używaniu ich jako elementów innych zbiorów. Według niego zbiory 'bardzo obszerne' nie mogą być elementami i nie można z nich tworzyć innych zbiorów.

W myśl koncepcji v. Neumanna 'kolektywy' stanowiące przedmiot badania teorii mnogości dzielą się na dwie grupy:

1. 'kolektywy', które mogą zawierać jakieś elementy i same być elementami innych 'kolektywów',
2. 'kolektywy', które mogą zawierać jakieś elementy, ale same nie mogą być elementami innych 'kolektywów'.

Pierwsze v. Neumann nazywa **zbiorami** i one intuicyjnie i formalnie odpowiadają zbiorom Zermelowskiej teorii mnogości, drugie zaś **klasami**, i te nie mają swego odpowiednika w tym systemie.

W latach 1924–1925 v. Neumann ogłosił system teorii mnogości mający za przedmiot badań wspomniane wyżej zbiory i klasy. W systemie tym można już było mówić o takich antynomialnych 'kolektywach', jak klasa wszystkich zbiorów, klasa wszystkich liczb porządkowych – są one bowiem klasami, a nie zbiorami. Ponieważ nie mogą być elementami innych zbiorów czy klas, nie można w odniesieniu do nich skonstruować odnośnych antynomii. System teorii mnogości v. Neumanna, aczkolwiek logicznie i formalnie bez zarzutu, miał pewne braki natury 'dydaktycznej', był dość zawiły, przedstawiał pewne trudności techniczne z uwagi na aparat pojęciowy, w którym sformułowane były jego aksjomaty, oparty był na pojęciu funkcji zamiast zbioru itp. Względy te sprawiły, że chociaż idea rozróżnienia universum teorii mnogości na zbiory i klasy została przyjęta z entuzjazmem i znalazła wielu naśladowców, to sam system w ujęciu v. Neumanna nie rozpowszechnił się.

Dopiero w r. 1937 P. Bernays ogłosił podstawy, a w latach 1937–1954 bardzo obszerny system aksjomatycznej teorii mnogości, realizujący ideę v. Neumanna rozważania zarówno zbiorów, jak i klas, ale jednocześnie ujął ten system w języku zbliżonym do języka systemu Zermelo-Fraenkla. Dzięki temu system ten był bez porównania lepiej percypowany i bardziej się rozpowszechnił.

Universum systemu Bernaysa składa się z dwu części. Pierwszą stanowią zbiory reprezentowane przez zmienne będące małymi literami łacińskimi $x, y, \ldots$, drugą zaś stanowią klasy reprezentowane przez zmienne będące dużymi literami łacińskimi $A, B, \ldots,$. System Bernaysa nie jest więc systemem elementarnym. Jego terminami pierwotnymi są: predykat $\ldots \in \ldots$ bycie elementem (zbioru), odpowiadający Zermelowskiemu $\ldots \in \ldots$ oraz predykat $\ldots \eta \ldots$ należenia do (klasy) w kontekstach zdaniowych $x \in y$, $x \eta A$. Warunkiem sensowności pierwszego z nich jest, aby obydwa argumenty były zmiennymi pierwszego rodzaju przebiegającymi zbiory, a warunkiem prawdziwości drugiego, aby pierwszy był zmienną pierwszego rodzaju, przebiegającą zbiory, a drugi – zmienną drugiego rodzaju przebiegającą klasy. Inaczej wyrażenia takie nie będą sensowne ($A \in x$, $A \in B$, $A \eta B$, $A \eta x$, $x \eta y$ itp.). Aksjomatyka systemu Bernaysa składała się z aksjomatów odnoszących się do zbiorów, analogicznych do aksjomatów Zermelowskich, oraz aksjomatów odnoszących się do klas. Rewelacją tej aksjomatyki była jej skończoność. Bernaysowi udało się przedstawić ją w postaci skończonego układu zdań, a nie schematów zdań, jak to ma miejsce w systemie Zermelo-Fraenkla, którego nie można zaksjomatyzować w sposób skończony. Nadto Bernays zbogacił teorię mnogości o szereg nowych wyników, którym dał wyraz w swym systemie.

W słynnej pracy o niesprzeczności *pewnika wyboru i *hipotezy kontinuum z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości z roku 1938–1939 K. Gödel podał aksjomatyczny system teorii mnogości, który jest właściwie drobną modyfikacją systemu Bernaysa. Modyfikacja ta polega na uczynieniu z systemu Bernaysa systemu elementarnego, którego język zawiera tylko jeden rodzaj zmiennych, co z różnych względów może być rzeczą pożądaną.

W systemie Gödla terminami pierwotnymi są: jednoargumentowy predykat Z(...), jednoargumentowy predykat K(...) i dwuargumentowy predykat $\ldots \in \ldots$ Wyrażenia $Z(a)$, $K(a)$, $a \in b$ czytamy odpowiednio: a jest zbiorem, a jest klasą i a jest elementem b.

Aksjomatyka systemu Gödla składa się z pięciu grup aksjomatów. Przytaczając te aksjomaty, sformułujemy je wprowadzając pewnego rodzaju uproszczenia. Polegać one będą na tym, że posługiwać się będziemy również terminami zdefiniowanymi, skrótami zastępczymi oraz stosować dla zmiennych przebiegających klasy duże litery $X, Y, Z, \ldots$, a dla zmiennych przebiegających zbiory małe litery $x, y, z, \ldots$. W oryginalnym zapisie to zróżnicowanie nie jest istotne.

Aksjomaty grupy A.

[1] $K(x)$.

[2] $X \in Y \rightarrow Z(X)$.

[3] $\wedge u[u \in X \equiv u \in Y] \rightarrow X = Y$.

[4] $\wedge x, y \vee z[u \in z \equiv (u = x \vee u = y)]$.

Pierwszy aksjomat wyraża, że każdy zbiór jest klasą, drugi aksjomat mówi nam, że każda klasa, która jest elementem

innej klasy, jest zbiorem. Aksjomaty te pouczają nas, że w systemie Gödla universum składa się z klas, które rozpadają się na dwie grupy: klasy, które mogą być elementami (zbiory), oraz klasy, które nie są zbiorami i nie mogą być elementami (klasy właściwe). Trzeci aksjomat jest zasadą ekstensjonalności. Czwarty stwierdza, że z dwóch zbiorów można utworzyć trzeci, będący ich zwykłą parą.

Aksjomaty grupy B.

Aksjomaty te zostaną sformułowane za pomocą pojęcia pary i trójki uporządkowanej, których definicje są następujące:

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle y, \langle y, z\rangle\rangle.$$

[1] $\vee A \wedge x, y[\langle x, y\rangle \in A \equiv x \in y]$.
[2] $\wedge A, B \vee C \wedge u[u \in C \equiv (u \in A \wedge u \in B)]$.
[3] $\wedge A \vee B \wedge u[u \in B \equiv \sim (u \in A)]$.
[4] $\wedge A \vee B \wedge x[x \in B \equiv \vee y(\langle y, x\rangle \in A)]$.
[5] $\wedge A \vee B \wedge x, y[\langle x, y\rangle \in B \equiv x \in A]$.
[6] $\wedge A \vee B \wedge x, y[\langle x, y\rangle \in B \equiv \langle y, x\rangle \in A]$.
[7] $\wedge A \vee B \wedge x, y, z[\langle x, y, z\rangle \in B \equiv \langle y, z, x\rangle \in A]$.
[8] $\wedge A \vee B \wedge x, y, z[\langle x, y, z\rangle \in B \equiv \langle x, z, y\rangle \in A]$.

Aksjomaty tej grupy dotyczą istnienia klas.

Aksjomaty grupy C.

Aksjomaty te sformułowane są za pomocą dodatkowych następujących skrótów: $F(X)$ – wyrażającego, że X jest funkcją (relacją jednoznaczną), $P(X)$ – wyrażającego, że X jest klasą pustą, oraz znanych predykatów $\subseteq$, $\subset$.

$$F(X) \equiv \wedge u, v, w(\langle v, u\rangle \in X \wedge \langle w, u\rangle \in X \rightarrow v = w).$$

$$P(X) \equiv \wedge u(\sim u \in X).$$

[1] $\vee a\{\sim P(a) \wedge \wedge x[x \in a \rightarrow \vee y(y \in a \wedge x \subset y)]$.
[2] $\wedge x \vee y \wedge u, v(u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in y)$.
[3] $\wedge x \vee y(u \subseteq x \rightarrow u \in y)$.
[4] $\wedge x, A\{P(A) \rightarrow \vee y \wedge u[u \in y \equiv \vee v(v \in x \wedge \langle u, v\rangle \in A)]\}$.

Pierwszy aksjomat jest aksjomatem nieskończoności, drugi aksjomatem sumy, trzeci aksjomatem potęgowym, czwarty aksjomatem zastępowania.

Aksjomat grupy D.

Sformułujemy go za pomocą następującego skrótu $Er(X, Y)$, który czytamy X i Y wzajemnie się wykluczają:

$$Er(X, Y) \equiv \wedge u \sim (u \in X \wedge u \in Y).$$

$\sim P(A) \rightarrow \vee u[u \in A \wedge Er(u, A)]$.

Aksjomat ten głosi, że niepusta klasa A nie ma żadnego elementu wspólnego z żadnym elementem tej klasy A.

Aksjomat grupy E.

$\vee A\{F(A) \wedge \wedge x[\sim P(x) \rightarrow \vee y(y \in x \wedge \langle y, x\rangle \in A)]\}$.

Zdanie to jest bardzo mocną postacią aksjomatu wyboru.

Wzajemny stosunek systemu von Neumana-Bernaysa-Gödla do systemu Zermeli był przedmiotem licznych badań. Do ważniejszych wyników w tym względzie należą twierdzenia głoszące, że: 1° system von Neumana-Bernaysa-Gödla jest niesprzeczny, o ile niesprzeczny jest system Zermeli oraz, że: 2° zbiór twierdzeń dotyczących zbiorów w obu tych systemach jest jednakowy.

P. Bernays; A. Fraenkel: *Axiomatic set theory*. 1958; N. Bourbaki: *Théorie des ensembles*. 1970; P. J. Cohen: *Set theory and continuum hypothesis*. 1966; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; K. Gödel: *The consistency of the continuum hypothesis*. 1940; W. Guzicki, P. Zbierski: *Podstawy teorii mnogości*. 1978; T. J. Jech: *Lectures in set theory with particular emphasis on method of forcing*. 1971; A. Mostowski: *Constructible sets with applications*. 1969; J. v. Neumann: *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*. „Journ. f. die reine und angewandte Math." CLIV 1925, CLV 1926.

H. S.

teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema. Powstanie teorii mnogości poprzedziły prace uczonych XIX w., takich jak: Bolzano, Weierstrass, Fourier, Riemann, Hankel. Jako pierwsze prace z zakresu teorii mnogości można uznać rozprawy Dedekinda i Du Bois-Reymonda. W pracach tych jednak przeważały zastosowania pewnych pojęć teoriomnogościowych do analizy matematycznej, a nie rozważania tej teorii jako takiej. Za twórcę, teorii mnogości uważa się G. Cantora. W latach 1871–1883 ogłosił on kilka prac, w których stworzył całą strukturę tematyczną teorii mnogości zachowaną po dzień dzisiejszy, omówił wiele jej pojęć, podał liczne definicje i twierdzenia.

W początkowym okresie teoria mnogości uprawiana była w sposób intuicyjny, nie będąc ujęta w ramy systemu aksjomatycznego. Ujęcie to było i jest obecnie udziałem wielu teorii matematycznych. Odkrycie *antynomii i usiłowanie przezwyciężenia ich były zjawiskiem, które przyspieszyło proces aksjomatyzacji teorii mnogości. Pojawiły się próby aksjomatyzacji tej dyscypliny i tym samym ukonstytuowania pojęcia zbioru jako takiego. Taka próba zbudowania aksjomatycznych podstaw teorii mnogości przedsięwzięta została przez E. Zermelo około r. 1904. Podał on układ aksjomatów wystarczający do ugruntowania niemal wszystkich ówcześnie znanych osiągnięć tej nauki. Aksjomatyka Zermelo była w ciągu lat doskonalona i uzupełniana, co doprowadziło do powstania całej linii rozwojowej systemów aksjomatycznej teorii mnogości. Inną linię rozwojową zapoczątkowała Russella *teoria typów.

Podstawy koncepcji Zermelo. O ile u podstaw systemu Russella leżało założenie, że zbiory tworzą dość rygorystyczną hierarchię typów, z której usunięte są zbiory mieszane, to założenia Zermelo były zupełnie odmienne. Starał się on zachować, o ile możności, wszystkie intuicje, związane ówcześnie z pojęciem zbioru, nie rezygnować ze zbiorów mieszanych, a usunąć tylko intuicje będące, jego zdaniem, źródłem antynomii. Za prowadzące do antynomii uznał Zermelo zbiory 'maksymalnie bogate', obejmujące bardzo wiele elementów, jak zbiór wszystkich zbiorów, zbiór wszystkich liczb porządkowych, zbiór wszystkich liczb kardynalnych, zbiór zbiorów, które nie są włas-

nymi elementami itp. Zbiory te, jako źródło antynomii, postanowił Zermelo usunąć z rozważań teorii mnogości, tak dobierając aksjomaty, aby dopuszczały jedynie zbiory 'dobre', a uniemożliwiały wprowadzanie zbiorów antynomialnych.

Aksjomatem stanowiącym „furtkę" dla zbiorów antynomialnych jest tzw. pewnik abstrakcji, zw. też pewnikiem definicyjnym (ang. comprehension axiom)

$$\vee x \wedge y[y \in x \equiv \Phi(y)],$$

gdzie $\Phi(x)$ jest formułą zdaniową zawierającą jako zmienną tylko zmienną y. Pewnik ten pozwalał konstruować zbiory z elementów spełniających jakąś, w zasadzie dowolną, własność wyrażoną w języku teorii mnogości. Na jego podstawie, dobierając odpowiednią formułę $\Phi(x)$, można było udowodnić istnienie zbiorów antynomialnych. W owych czasach wierzono w nieograniczoną możliwość konstruowania zbiorów, czemu dawał wyraz wspomniany pewnik. Stąd usiłowania reformistyczne Zermelo szły w kierunku takiego zreformowania pewnika abstrakcji, aby nie stanowił on „furtki" dla antynomii. Reforma ta polegała na tym, że pozwalało się tworzyć zbiory z elementów spełniających dowolne własności (wyrażone w języku teorii mnogości), ale nie z dowolnych elementów (jak na to pozwalał pewnik abstrakcji), lecz z elementów należących już do jakichś istniejących zbiorów. Inaczej: można tworzyć zbiory elementów spełniających jakąś własność, ale jako podzbiory istniejących już zbiorów. Intuicje te wyraża zdanie

$$\vee x \wedge y[y \in x \equiv x \in z \wedge \Phi(y)],$$

gdzie $\Phi(x)$ jest formułą zdaniową języka teorii mnogości zawierającą jako jedyną zmienną wolną y; zmienne x, z przebiegają zbiory. Zdanie to, przyjęte na miejsce pewnika abstrakcji, nazwano aksjomatem wyróżniania lub aksjomatem podzbiorów. Aksjomat ten sam przez się nie może doprowadzić do istnienia zbiorów antynomialnych (jeśli one inną drogą nie zostały wprowadzone), gdyż pozwala tylko stwierdzić istnienie, 'wyróżnić' podzbiory już istniejących zbiorów.

Obecność innych aksjomatów w systemie Zermelo może być uważana za konsekwencję przeprowadzonej reformy pewnika abstrakcji. W teorii mnogości rozważa się bowiem różne zbiory, jak sumy, iloczyny, różnice, zbiory potęgowe innych zbiorów. Istnienie tych zbiorów dawniej wynikałoby z pewnika abstrakcji. Po jego jednak odrzuceniu i zastąpieniu aksjomatem wyróżniania istnienie wspomnianych zbiorów trzeba zagwarantować poprzez specjalne aksjomaty. Stąd obecność w aksjomatyce podanej przez Zermelo aksjomatu istnienia par, aksjomatu sumy, aksjomatu zbioru potęgowego. Zermelo zaopatrzył swój system jeszcze w aksjomat nieskończoności, stwierdzający istnienie zbioru nieskończonego, oraz aksjomat ekstensjonalności, który podaje warunek identyczności zbiorów. Aksjomat ten nie stwierdza istnienia żadnego zbioru. Aksjomatyka ta była następnie przedmiotem wielu badań i ulepszeń prowadzonych zarówno przez swego twórcę, jak i wielu innych autorów. Badania te szły w następujących kierunkach: 1° wzbogacenia aksjomatyki systemu Zermelo, 2° wykrywania pewnych związanych z nią pojęć i 3° rozszerzenia universum tego systemu.

Dalszy rozwój systemu. Aksjomatyka systemu Zermelo wzbogacona została przez swego twórcę o tzw. pewnik wyboru, który w jednej ze słabszych wersji stwierdza, że dla każdego zbioru niepustych i rozłącznych zbiorów istnieje zbiór, który ma dokładnie po jednym elemencie z każdego z owych zbiorów. Aksjomat ten wywołał długą dyskusję, miał wielu zwolenników i przeciwników, gdyż pociągał za sobą liczne i paradoksalne konsekwencje. W latach dwudziestych system Zermelo uzupełniony został dodatkowym aksjomatem zastępowania. Stwierdza on, że dla dowolnego przyporządkowania jednoznacznego i dowolnego zbioru stanowiącego dziedzinę tego przyporządkowania istnieje zbiór będący przeciwdziedziną tego przyporządkowania. Aksjomat wprowadza się nie jako jedno zdanie, ale jako nieskończoną ilość zdań podpadających pod określony schemat. Aksjomat zastępowania został wprowadzony niezależnie przez D. Mirimanoffa, A. Fraenkla i Th. Skolema; pozwala on znacznie 'wzmocnić' system teorii mnogości. Z tego względu system aksjomatycznej teorii mnogości oparty o aksjomaty Zermelo i aksjomat zastępowania nazywa się Systemem Zermelo-Fraenkla-Skolema.

Około r. 1930 Zermelo adaptując idee Mirimanoffa (1917) i v. Neumanna (1925) sformułował aksjomat ufundowania (zob. dalej), który gwarantuje nieistnienie zbiorów tworzących np. takie cykle, jak $A \in A$, $A \in B \wedge B \in A$, $A \in B \wedge B \in C \wedge C \in A$.

Wspomniany proces klarowania pojęć dotyczył głównie sformułowania aksjomatu podzbiorów i zastępowania. Początkowo pochodzące z 1908 r. sformułowanie aksjomatu podzbiorów było niejasne. Sprawę wyklarowały dopiero w r. 1922 badania Skolema.

Rozszerzenie zakresu universum aksjomatycznej teorii mnogości Zermelo o nowy rodzaj 'zbiorów' zwanych klasami dokonane zostało przez J. v. Neumanna około r. 1922; doprowadziło ono do powstania odmiennego rozszerzonego systemu teorii mnogości (*Teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla).

W wyniku tych ewolucji i ulepszeń aksjomatyczny system teorii mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema opiera się na dwu pojęciach pierwotnych: jednoargumentowym predykacie Z(...) i dwuargumentowym predykacie ... $\in$ ... . Zdanie $Z(x)$ czytamy x jest zbiorem, zaś $x \in y$ czytamy x jest elementem y. System oparty na tych terminach jest elementarny — zawiera jeden rodzaj zmiennych. Dla przej-

rzystości sformułowania aksjomatów wprowadzimy umowę, że występujące w nich kwantyfikatory, przy których użyto dużych liter jako zmiennych, należy zrelatywizować do predykatu Z(...), – bycia zbiorem; i tak np. formułę $\wedge X[F(x)]$ należy zapisać $\wedge x[Z(x) \to F(x)]$, zaś formułę $\vee X[F(X)]$ zapiszemy $\vee x[Z(x) \wedge F(x)]$. W sformułowaniu pewnych aksjomatów posłużymy się również skrótami, które będą wyjaśnione sukcesywnie i na podstawie bardziej znanych terminów teorii mnogości, łatwo definiowalnych za pomocą terminów pierwotnych. Aksjomatami omawianego systemu są następujące zdania:

[A1] $\wedge x(x \in X \equiv x \in Y) \to X = Y$.

[A2] $\vee X \wedge z[z \in X \equiv (z = x \vee z = y)]$.

[A3] $\wedge Y \vee X \wedge x[x \in X \equiv x \in Y \wedge \Phi(x)]$.

gdzie $\Phi(x)$ jest dowolną formułą zawierającą x jako jedyną zmienną wolną.

[A4] $\wedge X \vee S \wedge x[x \in S \equiv \vee Y(x \in Y \wedge Y \in X)]$.

[A5] $\wedge X \vee Y \wedge S(S \in Y \equiv S \subset X)$.

[A6] $\wedge X[X \neq \emptyset \to \vee x(x \in X \wedge \wedge y(y \in x \to \sim y \in X)$.

[A7] $\vee X[\emptyset \in X \wedge \wedge Y(Y \in X \to Y \cup \{Y\} \in X)]$.

[A8] $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge X(x \in X \wedge \Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \to (y = z) \to$
$\to \vee Y \wedge y(y \in Y \equiv \vee x(x \in X \wedge \Phi(x, y))$,

gdzie $\Phi(x, y)$ jest dowolną formułą zdaniową zapisaną w języku teorii mnogości

[A9] $\wedge S[\wedge X \wedge Y([X \in S \wedge Y \in S \wedge X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \wedge (X \neq X \to X \cap Y = \emptyset)]) \to \vee W \wedge X(X \in S \to \to \vee x \wedge y(y \in W \cap X \equiv y = x))]$.

[A1] jest aksjomatem ekstensjonalności, [A2] – aksjomatem tworzenia par, [A3] – aksjomatem podzbiorów, [A4] – aksjomatem sumy, [A6] – aksjomatem ufundowania; głosi on, że w każdym niepustym zbiorze istnieje taki element, którego z kolei żaden element nie jest elementem owego zbioru. [A5] jest aksjomatem zbioru potęgowego, [A7] – aksjomatem nieskończoności (jedno z wielu możliwych ujęć). Głosi on, że istnieje zbiór, którego elementem jest zbiór pusty i który się tym odznacza, że wraz z każdym elementem zawiera zbiór złożony z tego właśnie elementu i zbioru, którego ten element jest jedynym elementem. Jest to więc zbiór $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots, \}$. [A8] – aksjomat zastępowania jest właściwie schematem zdań aksjomatycznych. Poprzednik jego głosi, że formuła zdaniowa o dwu zmiennych wolnych wyraża przyporządkowanie jednoznaczne w odniesieniu do elementów jakiegoś zbioru X, następnik natomiast głosi, że istnieje zbiór, którego elementami są przedmioty przyporządkowane jednoznacznie elementom zbioru X. Z aksjomatu tego wynika aksjomat podzbiorów [A3]. [A9] jest jedną ze słabszych postaci aksjomatu wyboru. Stwierdza on, że dla każdego zbioru niepustych i rozłącznych zbiorów istnieje zbiór zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdego z tych zbiorów. Poprzednik tego zdania głosi, że S jest zbiorem niepustych i wzajem rozłącznych zbiorów, zaś następnik głosi, że istnieje zbiór W zawierający po jednym elemencie z każdego ze zbiorów należących do S.

Dla prostych zastosowań wystarcza teorię mnogości oprzeć na aksjomatach: [A1], [A2], [A3], [A4], [A5] i ewentualnie [A9]. Dalsze aksjomaty: [A6], [A8] i [A9] potrzebne są dla potrzeb własnych teorii mnogości. Podany układ aksjomatów [A1] – [A9] można zredukować do układu: [A1], [A4], [A5], [A6], [A7], [A8] i [A9].

Przez długi okres system Zermelo był stosowany w stosunkowo wąskim kręgu matematyków. Szerszemu rozpowszechnieniu stała na przeszkodzie teoria typów, która wówczas cieszyła się ogromnym autorytetem w świecie matematyków, logików i filozofów. Mniej więcej około r. 1950 sytuacja ulegała diametralnej zmianie. Teoria typów przestała cieszyć się powodzeniem, a jej miejsce zajęła teoria mnogości w ujęciu aksjomatycznym. Aksjomatyczny system teorii mnogości Zermelo odgrywa obecnie doniosłą rolę. Jest przyjmowany za podstawę wykładów i licznych podręczników zarówno teorii mnogości, jak i logiki. Znajduje liczne zastosowania w pracach matematycznych. System ten jest również wdzięcznym przedmiotem badań metodologicznych. Powodem tej wziętości wśród matematyków, a ostatnio i logików, jest prostota i przejrzystość systemu oraz to, że w zasadzie (pomijając pewne trudności) nadaje się on do ujęcia wszystkich ważniejszych działów teorii mnogości.

Za pewne wady systemu Zermelo można uznać to, że: 1° nie można w nim w sposób wyraźny mówić o *liczbach kardynalnych i typach porządkowych (*Teorie zbiorów uporządkowanych) oraz 2° system ten nie obejmuje teorii 'zbiorów bardzo bogatych', jak wspomniane zbiory antynomialne. Trudności pierwszej zapobiega się przez uzupełnienie systemu Zermelo dodatkowymi terminami pierwotnymi i dodatkowymi aksjomatami: jako terminy pierwotne wprowadza się symbole funkcyjne K(...), O(...), które czytamy odpowiednio: liczba kardynalna zbioru x i typ porządkowy zbioru x. Jako dodatkowe aksjomaty przyjmuje się zdania:

$$K(X) = K(Y) \equiv X \text{ jest równoliczny z } Y;$$
$$O(X) = O(Y) \equiv X \text{ jest podobny do } Y,$$

zaś liczby kardynalne i typy porządkowe definiujemy odpowiednio:

$$\text{Card}(x) \equiv \vee X[K(X) = x];$$
$$\text{Ord}(x) \equiv \vee X[O(X) = x].$$

Card (x) i Ord (x) czytamy, odpowiednio, jako: x jest liczbą kardynalną i x jest typem porządkowym.

Inny sposób wprowadzenia liczb porządkowych i kardynalnych do systemu Zermelo pochodzi od v. Neumanna (1923) i polega na interpretowaniu liczb porządkowych

jako tzw. liczb porządkowych w sensie v. Neumanna, a liczb kardynalnych jako liczb porządkowych (*Teoria zbiorów uporządkowanych; zob. też Suszko). Metoda ta jest bardziej elegancka, a wprowadzone na jej podstawie liczby porządkowe i kardynalne bardziej organicznie wiążą się z systemem Zermelo, niż to ma miejsce, gdy wprowadza się je na drodze aksjomatycznej – teoretycznie zbędnej. Podkreślmy, że pojęcia typu porządkowego w ten sposób nie można wprowadzić.

Wspomniane wyżej ograniczenie systemu Zermelo zostało przezwyciężone nie w ramach tego systemu, a poprzez budowę odrębnych systemów aksjomatycznej teorii mnogości.

A. A. Fraenkel: *Abstract set theory*. 1953; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1952; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; P. Suppes: *Axiomatic set theory*, 1960; Suszko: *Wykłady*.

H. S.

teoria mocy zbiorów. Pojęcie mocy zbioru jest uogólnieniem pojęcia ilości elementów, obejmującym także zbiory nieskończone. Zbiór złożony z Warszawy, Berlina i Pragi ma tyleż samo elementów, co zbiór złożony z syreny, niedźwiedzia i lwa (gdy każdy jest wzięty tylko raz), bo można Warszawie przypisać syrenę, Berlinowi niedźwiedzia, a Pradze lwa; tutaj sytuacja jest banalna – oba zbiory mają po trzy elementy. Stwierdzamy, że na sali balowej jest tyle samo pań co panów, zauważywszy, iż wszyscy tańczą parami – każda pani ma swego partnera, a każdy pan partnerkę; nie musimy więc liczyć pań i panów, a potem porównywać ich liczby, aby wiedzieć, że liczby te są równe. Liczbom naturalnym: 0, 1, 2, 3, ... można przyporządkować liczby parzyste: 0, 2, 4, 6, ... w ten sposób, że każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje się liczbę dwukrotnie od niej większą, a więc liczbie 0 przyporządkujemy 0, liczbie 1 przyporządkujemy 2, liczbie 2 przyporządkujemy 4 itd.; ogólnie, liczbie naturalnej n przyporządkujemy liczbę $2n$. Każdej liczbie naturalnej w ten sposób przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba parzysta i na odwrót, każda liczba parzysta przyporządkowana jest dokładnie jednej liczbie naturalnej, O zbiorach: złożonym z Warszawy, Berlina i Pragi oraz złożonym z emblematów syreny, niedźwiedzia i lwa, o zbiorach: pań znajdujących się na sali balowej oraz panów w tejże sali, tak jak i o zbiorach: liczb naturalnych oraz liczb parzystych mówimy że, odpowiednio, są r ó w n o l i c z n e. Zbiory X i Y są równoliczne: (symbolicznie: $X \sim Y$) wtedy i tylko, gdy istnieje jedno-jednoznaczna relacja R zachodząca między ich elementami. Dla każdego więc elementu x ze zbioru X istnieje w zbiorze Y taki element y, że x jest w relacji R do y, a gdy x jest w relacji R do y_1 i do y_2, to $y_1 = y_2$; i na odwrót: dla każdego elementu y ze zbioru Y istnieje w zbiorze X taki element x, że x jest w relacji R do y oraz, gdy x_1 jest w relacji R do y, i x_2 jest w relacji R do y, to $x_1 = x_2$.

Czyli: $X \sim Y \equiv \vee R\{\wedge x \in X \vee y \in Y[xRy \wedge \wedge y_1, y_2(xRy_1 \wedge xRy_2 \to y_1 = y_2)] \wedge \wedge y \in Y \vee x \in X[xRy \wedge \wedge \wedge x_1, x_2(x_1Ry \wedge x_2Ry \to x_1 = x_2)]\}$.

Dwa zbiory skończone są równoliczne, gdy mają tę samą ilość elementów. Przykład przyporządkowania liczbom naturalnym liczb parzystych wskazuje, że istnieją zbiory równoliczne z pewnymi swymi podzbiorami właściwymi; własność taką posiadają tylko zbiory nieskończone. Niepusty zbiór X jest skończony, gdy można znaleźć taką liczbę naturalną n, że zbiór X ma n elementów, czyli gdy jest on równoliczny ze zbiorem liczbowym: $0, 1, 2, \ldots n-1$. Liczbę n nazywa się wtedy mocą, czyli liczbą kardynalną zbioru X; pisze się $\overline{\overline{X}} = n$ (czasami także: card (X), nc (X)). Moc zbioru pustego $= 0$. Moc zbioru X, czyli liczbę kardynalną zbioru X, definiuje się formalnie jako klasę abstrakcji zbiorów równolicznych ze zbiorem X. Symbolicznie ($Z(Y)$ czytamy: Y jest zbiorem):

$$\overline{\overline{X}} \overset{\text{df}}{=} \{Y/Z(Y) \wedge Y \sim X\}$$

Określona jest równość liczb kardynalnych oraz nierówności. $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko, gdy $X \sim Y$; $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko, gdy istnieje podzbiór Y_1 zbioru Y taki, że $X \sim Y_1$ (gdy przy tym X nie jest równoliczne z Y, zapisuje się $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$).

Zbiór X równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych nazywa się przeliczalnym nieskończonym, elementy takiego zbioru można więc przyporządkować kolejno liczbom naturalnym, czyli ustawić je w ciąg nieskończony. Moc przeliczalnego nieskończonego zbioru X zapisuje się za pomocą symbolu $\aleph_0$ (alef zero): $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$.

1° Suma dwu zbiorów $X \cup Y$ przeliczalnych jest przeliczalna, ponieważ mając ustawione elementy zbiorów X i Y odpowiednio w ciągi $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots$ oraz $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n \ldots$, możemy utworzyć ciąg $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots x_n, y_n \ldots$ składający się ze wszystkich elementów zbioru $X \cup Y$ (ewentualnie niektóre elementy wystąpią w tym ciągu dwukrotnie, o ile X i Y nie były zbiorami rozłącznymi).

2° Iloczyn kartezjański dwu zbiorów $X \times Y$ przeliczalnych jest przeliczalny, co pokazał Cantor rozumując następująco: Elementy zbioru X ustawione są w ciąg $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, elementy Y w ciąg $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, iloczyn kartezjański $X \times Y$ składa się z par x_j, y_j (napiszemy krótko $x_i, y_j = a_{ij}$); można te pary ustawić w tabelę:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & a_{13} & \to & a_{14} \ldots \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow & \\
a_{21} & & a_{22} & a_{23} & & a_{24} \ldots \\
 & \nwarrow & \swarrow & \nearrow & & \\
a_{31} & & a_{32} & a_{33} & & a_{34} \ldots \\
 & \swarrow & \nearrow & & & \\
a_{41} & & a_{42} & a_{43} & & a_{44} \ldots \\
\ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

i wypisać elementy według kolejności, jak leżą wzdłuż przekątnych w ciąg $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots$, który

obejmie wszystkie pary. Na tej drodze wykazuje się, że np. zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a także zbiór liczb algebraicznych (będących pierwiastkami wielomianów o współczynnikach wymiernych) jest przeliczalny.

3° Istnieją nieskończone zbiory nieprzeliczalne; np. zbiór nieskończonych ciągów zerojedynkowych jest nieprzeliczalny, co wykazuje się nie wprost, zakładając, że da się takie ciągi ustawić w ciąg nieskończony. Mielibyśmy więc ciąg ciągów $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \{a_{3n}\}, \ldots, \{a_{rn}\}, \ldots$ czyli:

$$\begin{aligned}
\{a_{1n}\} &= a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad \ldots, \quad a_{1n}, \quad \ldots \\
\{a_{2n}\} &= a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \quad \ldots, \quad a_{2n}, \quad \ldots \\
\{a_{3n}\} &= a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}, \quad \ldots, \quad a_{3n}, \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\{a_{nn}\} &= a_{n1}, \quad a_{n2}, \quad a_{n3}, \quad \ldots, \quad a_{nn}, \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

gdzie przy dowolnych i oraz j wyraz a_{ij} jest zerem lub jedynką. Utworzymy ciąg $\{C_n\}$ taki, że:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \text{ jeśli } a_{11} = 0, \text{ zaś } c_1 = 0 \text{ gdy } a_{11} = 1 \\
c_2 &= 1 \text{ jeśli } a_{22} = 0, \text{ zaś } c_2 = 0 \text{ gdy } a_{22} = 1 \\
c_3 &= 1 \text{ jeśli } a_{33} = 0, \text{ zaś } c_3 = 0 \text{ gdy } a_{33} = 1 \\
&\ldots\ldots\ldots

wań zbioru Y w zbiór X: $m^n = \overline{\overline{X^Y}} = \overline{\overline{(X)^Y}}$. Potęgowanie liczb kardynalnych posiada analogiczne własności, co i potęgowanie liczb naturalnych:

$$n^{p+q} = n^p \cdot n^q,$$
$$(n \cdot p)^q = n^q \cdot p^q,$$
$$(n^p)^q = n^{p \cdot q}.$$

Zbiór potęgowy 2^X — zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X ma moc 2^X; $2^X = (2^X)$, np. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Przy dowodzeniu 4° milcząco skorzystaliśmy z założenia, że moce dowolnych zbiorów można z sobą porównywać. Stwierdza to następujące twierdzenie o trychotomii liczb kardynalnych.

5° Jeżeli $m \geqslant n$ i $n \geqslant m$; to $m = n$; twierdzenie to nosi nazwę Cantora-Bernsteina.

G. Cantor: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. 1878; — — *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*. „Math. Annalen" 1895; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Suszko: *Wykłady*; A. Tarski: *Cardinal algebras*. 1949.

K. Cz.

teoria modeli. Współczesna dziedzina logiki matematycznej zajmująca się badaniami modeli dla teorii aksjomatycznych. Badania syntaktyczne teorii sformalizowanych datować należy od Euklidesa, który stworzył system aksjomatów dla geometrii elementarnej. Badania matematyków zajmujących się geometrią nieeuklidesową w pierwszej połowie XIX w. (w szczególności Łobaczewskiego) można zaliczyć do pierwszych prac teorii modeli. Badania te były nieformalne, nie posługiwały się jeszcze współczesnym aparatem. Dopiero początek wieku XX i sformalizowane badania podstaw matematyki doprowadziły do wzrostu znaczenia pojęć związanych z modelami. Aparat teorii modeli umożliwił badanie szeregu zasadniczych problemów logiki matematycznej, takich jak: *niesprzeczność teorii, *niezależność aksjomatów, *definiowalność pojęć i in. Udowodnione przez K. Gödla w r. 1931 twierdzenie o pełności ukazało, że pojęcia syntaktycznej i semantycznej (modelowej) niesprzeczności są tym samym. Późniejsze badania w dziedzinie teorii modeli wykazały szczególnie bliskie związki, a nawet przenikanie z algebrą, a w szczególności z pewną jej dziedziną, tzw. algebrą ogólną. Szereg operacji stosowanych w teorii modeli jest blisko związanych z operacjami badanymi w algebrze; jednocześnie systemy algebraiczne, takie jak grupy, pierścienie, ciała mogą służyć często jako ilustracja i zastosowanie badań teoriomodelowych. Badania nad operacjami wprowadzonymi w teorii modeli, takimi jak iloczyn prosty, iloczyn redukowany, branie podmodelu, suma rosnącego ciągu systemów umożliwiły ustalenie pełniejszych związków pomiędzy pojęciami syntaktycznymi i semantycznymi. Przykładem mogą tu być badania nad charakteryzacją klas elementarnych.

Oprócz licznych związków z algebrą można zauważyć w teorii modeli szereg wpływów teoriomnogościowych związanych m. in. z badaniami systemów uniwersalnych, a także z konstrukcjami różnych modeli.

Wiele wyników teorii modeli ma interesujące konsekwencje dla licznych dziedzin matematyki i filozofii. Przykładem tu twierdzenie Skolema-Löwenheima, wskazujące na istnienie paradoksalnie małych czy też wielkich modeli dla teorii matematycznych. Metody teorii modeli pozwoliły na rozwiązanie bądź uproszczenie szeregu problemów współczesnej algebry. Przykładem prace A. Robinsona nad tzw. XVII problemem Hilberta, A. Malcewa nad szeregiem problemów algebry abstrakcyjnej. W dziedzinie logiki matematycznej teoria modeli pozwala na uproszczenie licznych wyników rozstrzygalności, a także uzyskanie nowych. Szczególnie ważne okazały się prace J. Łosia i R. Vaughta, a także prace A. Ehrenfeuchta i użyte przez niego metody teoriogrowe. Ważne wyniki uzyskano za pomocą metod i pojęć teoriomodelowych też w zakresie podstaw geometrii, w której szczególną wagę posiadają prace A. Tarskiego i in., a także teorii mnogości, gdzie użycie pojęcia ultraproduktu pozwoliło H. Gaifmanowi uzyskać szereg niezwykle cennych wyników. Inne metody teorii modeli (Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego) pozwoliły uzyskać J. Silverowi podobne rezultaty. Bardzo poważne wyniki uzyskano też w zakresie niezależności zdań teorii mnogości (P. J. Cohen).

Uzyskano też w teorii mnogości szereg bardzo głębokich wyników nie związanych z innymi teoriami. W szczególności M. Morley udowodnił hipotezę Łosia o teoriach kategorycznych w mocach nieprzeliczalnych. Poważne znaczenie posiadają też wyniki Keislera, Scotta, Fefermana i in.

Metody teorii modeli użyte zostały także do badań semantyki dla *logik uogólnionych.

Grzegorczyk: *Log. mat.*; R. C. Lyndon: *O logice matematycznej*. 1968; Mostowski: *Log. mat.*; A. Robinson: *Intruduction into model theory*. 1963; C. C. Chang, H. J. Keisler: *Model theory*. 1973

W. Mk

teoria relacji. Relacją (stosunkiem) nazywamy wszelki związek czy zależność zachodzącą między dwoma lub więcej przedmiotami, np. rówieśnictwo, pokrewieństwo czy przyjaźń między ludźmi, posiadanie większego ciężaru lub wyższej temperatury między przedmiotami fizycznymi, mniejszość czy podzielność między liczbami, podobieństwo między figurami geometrycznymi itp. Relacje wyrażane są przez *predykaty dwu- lub więcej argumentowe (w tym samym sensie, w jakim predykaty jednoargumentowe wyrażają własności indywidualnych przedmiotów), przy czym liczba argumentów predykatu stanowi o liczbie członów relacji, którą predykat ten wyraża; dwuargumentowy predykat „... jest ojcem ..." wyraża pewną relację dwuczłonową (zachodzącą między każdymi dwie-

ma osobami, z których pierwsza jest ojcem drugiej), trójargumentowy predykat „... leży między ... a ...” – odpowiednią trójczłonową relację zachodzącą między punktami prostej, itd.

1. Historia teorii relacji. Teoria relacji została zapoczątkowana przez A. De Morgana (1806–1878) jako uogólniona postać sylogistyki, obejmująca tzw. sylogizmy skośne. Znaczna część pojęć tej teorii pochodzi od Ch. S. Peirce'a (1839–1914), a jej pierwsze systematyczne ujęcie – od E. Schrödera (1841–1902). Rozwój teorii relacji był ściśle związany z zainicjowaną przez G. Boole'a (1815–1864) algebraizacją logiki; wszyscy jej twórcy świadomie dążyli do takiego rozszerzenia *algebry Boole'a, które pozwoliłoby traktować ją jako logikę wszelkich predykatów, nie tylko bezwzględnych (jednoargumentowych), lecz i względnych (wieloargumentowych). Od ukazania się *Principia mathematica* (1910), w których rachunek relacji Peirce'a i Schrödera ujęty został w kontekst pewnego systemu teorii mnogości (*Teoria typów), teoria relacji konstruowana jest w ramach teorii mnogości.

2. Teoriomnogościowe pojęcie relacji. Uprawianie teorii relacji jako fragmentu teorii mnogości związane jest z traktowaniem relacji jako szczególnego rodzaju zbiorów. Mianowicie relacje dwuczłonowe jako własności *par uporządkowanych przedmiotów, między którymi zachodzą, utożsamiane są ze zbiorami takich par; odpowiednio relacje trójczłonowe utożsamiane są ze zbiorami trójek uporządkowanych itd. Tak np. relacja mniejszości zachodząca między liczbami rzeczywistymi jest zbiorem, do którego należą wszystkie pary liczb rzeczywistych mające jako pierwszy element liczbę mniejszą od tej, która jest drugim elementem. Relacja podzielności ograniczona do zbioru liczb naturalnych większych od 1 a mniejszych od 7 jest zbiorem, który przy użyciu symboli teorii mnogości można przedstawić w postaci: $\{\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle\}$.

Utożsamienie relacji ze zbiorami par (trójek itd.) uporządkowanych ma pewne konsekwencje, które budzą sprzeciw intuicji. Mianowicie, zgodnie z zasadą *ekstensjonalności, wszelkie dwa zbiory, które mają te same elementy, są identyczne. Odpowiednio – dowolne dwie relacje zachodzące między tymi samymi przedmiotami są tą samą relacją. Teza ta nie jest prawdziwa przy jednym z potocznych pojęć relacji (ogólniej – własności), tym mianowicie, zgodnie z którym np. relacja bycia przyjacielem byłaby czymś innym niż relacja rówieśnictwa, nawet wtedy, gdyby przyjaźnili się ze sobą wszyscy i tylko ludzie równi wiekiem. Jak dotąd jednak próby ścisłego zdefiniowania tego pojęcia relacji i skonstruowania jego teorii (ogólniej – próby zbudowania teorii nieekstensjonalnie – a więc nie teoriomnogościowo – rozumianych własności) nie doprowadziły do ogólnie uznanych rezultatów.

3. Terminologia i symbolika teorii relacji. Zachodzenie dwuczłonowej relacji R między przedmiotami x, y wyraża się symbolicznie w jednej z następujących postaci: xRy, $R(x, y)$, $\langle x, y\rangle \in R, x, y \leftarrow R$. Lewe człony par należących do relacji R zwane są jej poprzednikami, prawe zaś – jej następnikami. Zbiór poprzedników relacji R nazywamy jej dziedziną (lub lewą dziedziną) i oznaczamy symbolem $D(R)$ (lub $\mathfrak{D}_l(R)$); zbiór następników relacji R nazywamy jej przeciwdziedziną (lub prawą dziedziną) i oznaczamy symbolami $\breve{D}(R)$, $\mathfrak{D}(R)$ (lub $D_p(R)$). Sumę dziedziny i przeciwdziedziny relacji R nazywamy polem relacji R i oznaczamy symbolami $P(R)$ lub $C(R)$. Np. dziedziną relacji bycia mężem jest zbiór wszystkich żonatych mężczyzn, przeciwdziedziną tej relacji jest zbiór wszystkich mężatek, a jej polem – zbiór wszystkich osób pozostających w stanie małżeńskim.

Każda relacja jest podzbiorem *iloczynu kartezjańskiego swej dziedziny i przeciwdziedziny (a także podzbiorem kwadratu swego pola).

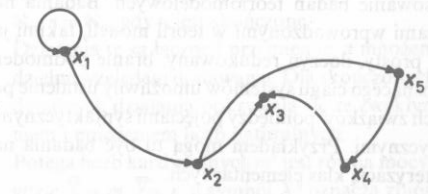
Relację, która zachodzi między każdymi dwoma elementami rozważanego zbioru, nazywamy relacją pełną lub uniwersalną. Relację, która nie zachodzi między żadnymi elementami rozważanego zbioru, nazywamy relacją pustą.

4. Reprezentowanie relacji dwuczłonowych. Jeżeli rozważany zbiór przedmiotów ma skończoną (i raczej małą) liczbę elementów $x_1, x_2, ..., x_n$, to każdą relację dwuczłonową w tym zbiorze możemy opisać za pomocą tabeli o postaci

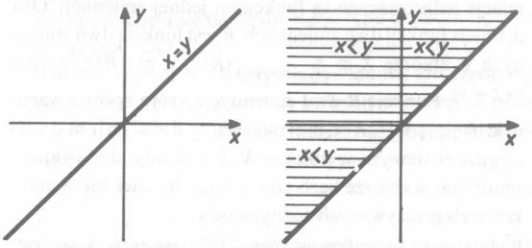
	x_1	x_2	...	x_n
x_1				
x_2				
⋮				
x_n				

stawiając odpowiednie znaki na przecięciu jej kolumn i wierszy (np. stawiając na przecięciu wiersza x_i i kolumny x_j $(i, j = 1, 2, ..., n)$ znak „+”, jeśli relacja ta zachodzi między przedmiotami x_i, x_j, znak „–” zaś – jeśli nie zachodzi).

Relację zachodzącą między elementami takiego zbioru można też przedstawić graficznie reprezentując jego elementy jako punkty na płaszczyźnie i prowadząc strzałkę od punktu x_i do punktu x_j, jeśli dana relacja zachodzi między przedmiotami x_i, x_j, np.:



Relacje dwuczłonowe zachodzące między liczbami rzeczywistymi lub punktami prostej można ilustrować jako zbiory punktów na płaszczyźnie o ustalonym układzie współrzędnych. Rysunki (a), (b) są kolejno wykresami relacji identyczności i relacji mniejszości.



(a) (b)

5. Rachunek relacji. Na relacjach, jako zbiorach par, można wykonywać wszystkie działania określone dla dowolnych zbiorów (*Rachunek zbiorów): dodawanie, mnożenie, odejmowanie, odejmowanie symetryczne, dopełnianie. Oprócz tych działań (zwanych boole'owskimi) w rachunku relacji rozpatruje się działania określone tylko dla relacji. Należą do nich działania konwersu i iloczynu względnego, wykonalne na relacjach dwuczłonowych (zwane działaniami peirce'owskimi). Konwersem relacji R (relacją odwrotną do R) nazywamy relację, która zachodzi między x i y zawsze i tylko, gdy między y a x zachodzi relacja R; oznaczamy ją symbolami $\breve{R}$, R^{-1}. Konwersem relacji mniejszości jest relacja większości, konwersem relacji zwierzchnictwa – relacja bycia podwładnym itd. Zachodzą m. in. następujące równości:

$$\mathrm{D}(\breve{R}) = \breve{\mathrm{D}}(R) \qquad \breve{R \cap S} = \breve{R} \cap \breve{S}$$
$$\breve{\mathrm{D}}(\breve{R}) = \mathrm{D}(R) \qquad \breve{R \cup S} = \breve{R} \cup \breve{S}$$
$$\breve{\breve{R}} = R \qquad \breve{R - S} = \breve{R} - \breve{S}$$
$$\breve{R}' = \breve{R}'$$

Iloczynem względnym (iloczynem relatywnym, złożeniem lub superpozycją) relacji R i S nazywamy relację, która zachodzi między x i y zawsze i tylko, gdy istnieje z takie, że między x i z zachodzi relacja R, zaś między z i y zachodzi relacja S; oznaczamy ją symbolami $R;S$, $R \circ S$. Iloczynem względnym relacji bycia żoną i relacji bycia synem jest relacja bycia synową; iloczyn względny relacji większości i relacji równości w zbiorze liczb jest identyczny z pierwszą z tych relacji. Między działaniem tym a innymi działaniami na relacjach zachodzą m. in. następujące zależności:

$$\breve{R;S} = \breve{S};\breve{R} \qquad R;(S \cup T) = R;S \cup R;T$$
$$(R;S);T = R;(S;T) \qquad (R \cap S);T \subset R;T \cap S;T$$
$$(R \cup S);T = R;T \cup S;T \quad T;(R \cap S) \subset T;R \cap T;S$$

Iloczyn względny jest, w odróżnieniu od zwykłego iloczynu, działaniem nieprzemiennym.

Rozważa się także rozmaite działania określone na układach „mieszanych": relacja – zbiór. Należy do nich ograniczanie relacji do pewnego zbioru i tworzenie obrazu zbioru wedle danej relacji. Relacją R ograniczoną do zbioru X (symbolicznie: R/X) nazywamy podzbiór relacji R złożony z wszystkich i tylko takich par, których elementy należą do X. Np. relacja $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ jest relacją mniejszości ograniczoną do zbioru pierwszych trzech liczb naturalnych. Obrazem zbioru X wedle relacji R (R-owym obrazem zbioru X) nazywamy zbiór tych przedmiotów, do których co najmniej jeden element zbioru X pozostaje w relacji R; oznaczamy go symbolami: $R(X)$, $R''(X)$. Np. obrazem zbioru Polaków wedle relacji bycia ojcem jest zbiór osób, których ojcowie są Polakami. Zachodzą m. in. następujące zależności:

$$\breve{\mathrm{D}}(R) = R(\mathrm{D}(R)) \qquad R(X \cap Y) \subset R(X) \cap R(Y)$$
$$\mathrm{D}(R) = \breve{R}(\breve{\mathrm{D}}(R)) \qquad R(X) - R(Y) \subset R(X - Y)$$
$$R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y) \quad X \subset Y \to R(X) \subset R(Y)$$

6. Formalne własności relacji. Relacje posiadają pewne własności formalne, tj. niezależne od ich charakteru oraz od natury przedmiotów, między którymi zachodzą. Oto ważniejsze własności formalne relacji dwuczłonowych (w ich definicjach korzystamy dla zwięzłości z przyjętych w *rachunku zdań i w *rachunku kwantyfikatorów symboli spójników zdaniowych i zwrotów kwantyfikujących):

Relacja R jest zwrotna w zbiorze $X \equiv \wedge_{x \in X} xRx$.

Przykłady: równość w zbiorze liczb, rówieśnictwo w zbiorze ludzi.

Relacja R jest przeciwzwrotna w zbiorze $X \equiv \equiv \wedge_{x \in X} \sim xRx$.

Przykłady: mniejszość w zbiorze liczb, starszeństwo w zbiorze ludzi.

Relacja R jest symetryczna w zbiorze $X \equiv \wedge_{x,y \in X} (xRy \to yRx)$.

Przykłady: podobieństwo w zbiorze trójkątów, pokrewieństwo w zbiorze ludzi.

Relacja R jest asymetryczna w zbiorze $X \equiv \wedge_{x,y \in X} (xRy \to \sim yRx)$.

Przykłady: mniejszość w zbiorze liczb, ojcostwo w zbiorze ludzi.

Relacja R jest antysymetryczna w zbiorze $X \equiv \equiv \wedge_{x,y \in X} (x \neq y \wedge xRy \to \sim yRx)$.

Przykłady: niewiększość ($\leqslant$) i relacja bycia podzielnikiem w zbiorze liczb.

Relacja R jest przechodnia w zbiorze $X \equiv \equiv \wedge_{x,y,z \in X} (xRy \wedge yRz \to xRz)$.

Przykłady: podzielność w zbiorze liczb, rówieśnictwo w zbiorze ludzi.

Relacja R jest spójna w zbiorze $X \equiv \wedge_{x,y \in X} (x \neq y \to \to (xRy \vee yRx))$.

Przykłady: mniejszość w zbiorze liczb, starszeństwo w zbiorze osób, w którym nie ma rówieśników.

7. Ważniejsze rodzaje relacji. Dla celów badań logicznych i matematycznych wyróżnia się pewne rodzaje relacji opierając się na ich formalnych własnościach. Oto ważniejsze rodzaje relacji dwuczłonowych:

Relacja, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia w zbiorze X, nazywa się równoważnością (równością) w X. Przykłady: rówieśnictwo w zbiorze ludzi, równobarwność w zbiorze przedmiotów fizycznych, podobieństwo w zbiorze figur geometrycznych. Pojęcie relacji równoważnościowej jest ściśle związane z pojęciem *podziału: mianowicie każda relacja będąca równoważnością w danym zbiorze wyznacza pewien podział tego zbioru, i odwrotnie. Np. relacji rówieśnictwa w zbiorze ludzi odpowiada podział tego zbioru na grupy rówieśnicze itd. (*Klasy abstrakcji).

Relację, która jest asymetryczna, przechodnia i spójna w zbiorze X, nazywamy relacją porządkującą zbiór X (porządkiem liniowym w X). Przykłady: mniejszość i większość w zbiorze liczb, posiadanie większego ciężaru w zbiorze przedmiotów, w którym nie ma przedmiotów równociężkich. Relację asymetryczną i przechodnią w zbiorze X (nie koniecznie spójną) nazywamy relacją częściowo porządkującą zbiór X (częściowym porządkiem w X). Przykłady: starszeństwo w zbiorze ludzi, posiadanie większego ciężaru w zbiorze przedmiotów fizycznych.

Relacja R jest jednoznaczna w zbiorze $X \equiv \equiv \wedge_{x,y,z\in X}(xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$. Przykłady: relacja bycia następnikiem w zbiorze liczb naturalnych, relacja bycia córką w zbiorze kobiet.

Relacja R jest odwrotnie jednoznaczna w zbiorze $X \equiv \equiv \wedge_{x,y,z\in X}(xRy \wedge zRy \rightarrow x = z)$. Przykłady: relacja bycia kwadratem w zbiorze liczb, relacja ojcostwa w zbiorze ludzi.

Relacją wzajemnie jednoznaczną (jedno-jednoznaczną) w danym zbiorze nazywamy relację, która jest w tym zbiorze zarazem jednoznaczna i odwrotnie jednoznaczna. Przykłady: relacja bycia kwadratem w zbiorze liczb dodatnich, relacja bycia żoną w społeczeństwie monogamicznym.

Pojęcie relacji jednoznacznej jest teoriomnogościową rekonstrukcją matematycznego pojęcia *funkcji; relacje wzajemnie jednoznaczne odpowiadają funkcjom odwracalnym (różnowartościowym).

8. Relacje wieloczłonowe. W matematyce, a także w innych dziedzinach wiedzy, rozważa się często relacje trój- i więcejczłonowe. Teoria relacji wieloczłonowych nie jest jednak tak rozwinięta, jak teoria relacji dwuczłonowych, a większość pojęć tej ostatniej nie przenosi się w naturalny sposób na relacje trój- i więcejczłonowe. Tak np. w teorii relacji trójczłonowych zamiast jednego pojęcia konwersu występuje pięć różnych jego odpowiedników; mamy tu również pięć różnych pojęć symetrii i asymetrii, natomiast pojęcia przechodniości i spójności nie mają w tej teorii naturalnych odpowiedników.

Ważne jest uogólnienie pojęcia relacji jednoznacznej na relacje wieloczłonowe, zwane funkcjami wielu zmiennych lub funkcjami wieloargumentowymi (dwuczłonowe relacje jednoznaczne są funkcjami jednej zmiennej). Oto definicja funkcji dwu zmiennych: R jest funkcją dwu zmiennych w zbiorze $X \equiv \wedge_{x,y,z,v\in X}(R(x, y, z) \wedge R(x, y, v) \rightarrow \rightarrow z = v)$. Funkcję R dwu zmiennych, która spełnia warunek: $\wedge_{x,y\in X} \vee_{z\in X} R(x, y, z)$ nazywamy działaniem dwuargumentowym w zbiorze X. Przykłady: dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb rzeczywistych, dzielenie w zbiorze liczb rzeczywistych różnych od 0.

L. Borkowski: *Logika formalna*. Wyd. 2 1977; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Mostowski: *Log. mat.*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Suszko: *Wykłady*; Zinowjew: *Osnowy*.

B. S.

teoria typów. System logiczny, obejmujący *rachunek zbiorów i *teorię relacji, mający służyć, po wprowadzeniu odpowiednio silnych założeń, do wyprowadzenia zeń całej *arytmetyki. System ten, pochodzący od A. N. Whiteheada i B. Russella, został wyłożony w dziele *Principia mathematica* (1910–1913). Rozróżnia się *teorię typów prostą i *teorię typów rozgałęzioną. Prosta teoria typów wyłoniła się z rozgałęzionej w wyniku modyfikacji wprowadzonych przez F. P. Ramseya i L. Chwistka.

W. M.

teoria typów, prosta.

1. Przedmiot badania prostej teorii typów. Dziedzinę przedmiotów opisywanych przez prostą teorię typów dzieli się zazwyczaj na nieskończenie wiele klas niepustych i wzajemnie rozłącznych. Klasy tych przedmiotów nazywa się zazwyczaj typami lub typami logicznymi. Rozważenie bogactwa i rozmaitości typów logicznych, badanych przez teorię typów, poprzedzimy rozważaniami na temat sposobów ich oznaczania, gdyż ułatwi to zarówno orientację w ich bogactwie i różnorodności, jak również umożliwi przeprowadzenie ich systematyki.

Prosta teoria typów bada dwa rodzaje przedmiotów: indywidua i relacje różnego rodzaju. Relacje jednoargumentowe nazywamy też zbiorami lub własnościami. Wszystkie indywidua zaliczamy do jednego typu, który oznaczać będziemy kropką . Typ relacji dwuczłonowej zachodzącej między przedmiotami najniższego typu oznaczać będziemy symbolem $(\cdot, \cdot)$. Typ relacji jednoczłonowej, własności lub zbioru przedmiotów typu $\cdot$ oznaczać będziemy symbolem $(\cdot)$. Ogólnie niech $t_1, t_2, ..., t_k (k = 1, 2, ...)$ będą jakimiś typami logicznymi, niekoniecznie różnymi, to typ relacji k-członowej zachodzącej między przedmiotami odpowiednio typów $t_1, t_2, ..., t_k$ oznaczymy symbolem $(t_1, t_2, ..., t_k)$. W poszczególnym zaś przypadku typ relacji jedno-

członowej zbioru, którego elementem jest przedmiot typu np. t_1, oznaczymy symbolem (t_1). Typ relacji dwuczłonowej, zachodzącej między przedmiotami odpowiednio typu t_5, t_2, oznaczymy symbolem (t_5, t_2).

Typy logiczne przedmiotów rozważanych w systemie teorii typów dzielą się na rzędy. Rząd typu oznacza się liczbą naturalną i określa się na drodze indukcyjnej. Do rzędu 0-go należy tylko jeden typ indywiduów. Do rzędu n-go należą typy relacji (zbiorów), których członami są przedmioty o typach rzędu $k < n$ i takie, że przynajmniej jeden z tych członów jest przedmiotem typu należącego do rzędu $(n\text{-}1)$-go. Pojęcie rzędu przypisuje się również, w sposób pośredni, przedmiotom teorii typów. Przedmiot ma mianowicie ten sam rząd, co odpowiedni typ logiczny, który mu przysługuje.

Pewną orientację w rozmaitości typów logicznych daje poniższa tabela, daleka zresztą od kompletności.

0

1 $(\cdot)$, $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, ...,

2 $((\cdot))$, $((\cdot,\cdot))$, $((\cdot,\cdot,\cdot))$, $((\cdot),(\cdot))$, ..., $((\cdot),\cdot)$, $((\cdot,\cdot),\cdot,\cdot)$, $(\cdot,(\cdot,\cdot),\cdot)$, $((\cdot),(\cdot,\cdot),\cdot)$, ...,

3 $(((\cdot)))$, $(((\cdot,\cdot)))$, $(((\cdot),(\cdot,\cdot)))$, $(((\cdot)),(\cdot)))$, ..., $(((\cdot),\cdot,\cdot),\cdot,\cdot)$, ...,

Cyfry umieszczone w kolumnie po lewej stronie wskazują rząd typów wypisanych obok. Jeżeli założymy, że przedmioty rzędu 0 są liczbami rzeczywistymi, to relacja wyrażona wzorem $x < y$ będzie miała typ $(\cdot,\cdot)$, relacja wyrażona wzorem $x = y+z$ będzie miała typ $(\cdot,\cdot,\cdot)$, zaś relacja wyrażona wzorem $y = \lim_{x \to a} f(x)$ będzie typu $(\cdot,(\cdot,\cdot),\cdot)$.

Charakterystyczna właściwość przedmiotów rozważanych przez teorię typów ujawnia się w pełni w przedmiotach badania autonomicznego fragmentu teorii typów zwanego ogólną teorią klas. W systemie tym rozważa się wyłącznie indywidua oraz relacje jednoargumentowe (zbiory). Typy logiczne tych przedmiotów pokazuje poniższa, daleka od kompletności tablica:

rząd	0	1	2	3	4	...
typ	$\cdot$	$(\cdot)$	$((\cdot))$	$(((\cdot)))$	$((((\cdot))))$	...

Z tablicy tej widać, że zbiory te cechuje następująca ważna własność: elementami zbiorów mogą być przedmioty rzędu dokładnie o jeden niższego od rzędu zbiorów.

2. Język prostej teorii typów. Wyrażenia teorii typów, z których tworzy się zdania proste, dzielą się na dwie odrębne grupy: termy i funktory zdaniotwórcze. Termy odnoszą się jedynie do przedmiotów typu $\cdot$, czyli indywiduów. Funktory zaś do wszystkich pozostałych typów przedmiotów będących relacjami (zbiorami).

Jeżeli jakaś relacja r wyrażona jest funktorem X i zachodzi między jej członami $a_1, a_2, ..., a_k$ wyrażonymi, odpowiednio, przez $x_1, x_2, ..., x_k$, to zachodzenie tej relacji między tymi przedmiotami wyraża się zdaniem prostym

$$X(x_1, x_2, ..., x_k)$$

polegającym na wypisaniu funktora, a następnie w nawiasie jego argumentów.

Wszystkie wyrażenia teorii typów służące do tworzenia zdań prostych są poklasyfikowane na typy. Zachodzi przy tym ścisła odpowiedniość między podziałem przedmiotów na typy logiczne a podziałem wyrażeń na typy. Podstawą tej odpowiedniości jest to, że wyrażenia należące do typu wyrażeń odnoszą się do przedmiotów typu skorelowanego z tym typem wrażeń. Ta ścisła odpowiedniość pozwala na zastosowanie do typów wyrażeń tego samego systemu oznaczeń, jakie są zastosowane do typów przedmiotów. Tak więc typ termów, wyrażeń odnoszących się do typu logicznego indywiduów, oznacza się symbolem $\cdot$, takim samym, jak typ indywiduów. Podobnie typ funktora zdaniotwórczego od dwu argumentów będących termami funktora odnoszącego się do relacji dwuczłonowej zachodzącej między dwoma indywiduami, oznacza się symbolem $(\cdot,\cdot)$, takim samym zresztą, jakim oznacza się typ wspomnianej relacji.

W języku prostej teorii typów nie występują w zasadzie terminy stałe poza stałymi logicznymi. Wyrażenia, z których tworzy się zdania proste tego systemu, są więc zmiennymi. Zmienne te będą tu literami X zaopatrzonymi u dołu we wskaźniki liczbowe dla zaznaczenia kształtu zmiennej: $X_1, X_2, ...$ Ponieważ w teorii typów przedmioty każdego typu logicznego są reprezentowane przez wyrażenia odpowiedniego, skojarzonego z nim, typu przedmiotów, przeto każdemu typowi przedmiotów odpowiada odpowiedni typ zmiennych, które reprezentują przedmioty tego typu. Dla wskazania typu zmiennych zaopatruje się je u góry z prawej strony w specjalne indeksy wskazujące ich typ – X_i^t, gdzie $i = 0, 1, ..., t$ zaś jest jednym z symboli oznaczających typy logiczne, np. $X_3^{(\cdot,\cdot)}$, $X_2^{\cdot}$, $X_{15}^{((\cdot))}$ itp. Wyrażenie X_i^t czytamy: zmienna i-go kształtu i t-typu. Tak jak w innych teoriach, przyjmuje się nieskończenie (przeliczalnie) wiele zmiennych.

Analogicznie jak to miało miejsce w odniesieniu do przedmiotów, typy wyrażeń służących do tworzenia zdań prostych też dzielą się na rzędy. Pośrednio zaś podział na rzędy można rozszerzyć i na same wyrażenia. Zasady przypisywania rzędu typom wyrażeń i pośrednio wyrażeniom są przy tym zupełnie analogiczne do zasad podziału typów przedmiotów i samych przedmiotów na rzędy. Np. zmienne X_2, $X_1^{(\cdot)}$, $X_3^{(\cdot,\cdot)}$, $X_{(5}^{((\cdot))}$ są odpowiednio rzędu 0, 1, 1 i 3.

Dla lepszej orientacji w rozmaitości zmiennych, ich typów i rzędów podajemy fragmentaryczną tablicę nie wyczerpującą zresztą całej ich rozmaitości.

0 $X_1^{\cdot}, X_2^{\cdot}, ...,$

1 $X_1^{(\cdot)}, X_2^{(\cdot)}, ..., X_1^{(\cdot,\cdot)}, X_2^{(\cdot,\cdot)}, ..., X_1^{(\cdot,\cdot,\cdot)}, X_2^{(\cdot,\cdot,\cdot)}, ...,$

2 $X_1^{((\cdot))}, X_2^{((\cdot))}, ..., X_1^{((\cdot),(\cdot))}, X_2^{((\cdot),(\cdot))}, ...,$

3 $X_1^{(((\cdot)))}, X_2^{(((\cdot)))}, ..., X_1^{(((\cdot),\cdot),\cdot)}, X_2^{(((\cdot),\cdot),\cdot)}...,$

. . . . . .

Tabela zaś zmiennych systemu ogólnej teorii klas (fragmentu teorii typów) przedstawia się następująco:

0 $X_1, X_2, \ldots,$
1 $X_1^{(\cdot)}, X_2^{(\cdot)}, \ldots,$
2 $X_1^{((\cdot))}, X_2^{((\cdot))}, \ldots,$
3 $X_1^{(((\cdot)))}, X_2^{(((\cdot)))}, \ldots,$
. . . . . .

Cyfry pierwszej kolumny obu tych tablic wskazują rzędy zmiennych.

Zwróćmy uwagę na to, że druga z podanych tabel jest znacznie prostsza. W ogólnej teorii klas występują zmienne po jednym tylko typie w każdym rzędzie, natomiast w pełnym systemie teorii typów w każdym rzędzie, z wyjątkiem rzędu 0-go, mamy nieskończenie wiele typów. Zmienne rzędu poczynając od pierwszego są w ogólnej teorii klas funktorami zdaniotwórczymi od jednego tylko argumentu.

W języku pełnego systemu prostej teorii typów zdania proste podpadają pod następujący schemat

$$({}^{\eta}_{i}X \cdots {}^{\varepsilon_1}_{i_1}X)^{\delta}_{t}X$$

zdania proste zaś ogólnej teorii klas pod schemat

$$X^t_p(X^s_e).$$

Warunkiem koniecznym sensowności (syntaktycznej) zdań tego typu jest zgodność typów funktora i argumentów. Zgodność ta dotyczy zarówno jakości, jak ilości argumentów. Warunek sensowności dla zdań pierwszego rodzaju wyraża się wzorem

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

dla zdań drugiego rodzaju zaś

$$t = (S).$$

Zdania języka systemu teorii typów określa się na drodze indukcyjnej

(1) jeżeli wyrażenia $X^t_p, X^{t_1}_{i_1}, X^{t_2}_{i_2} \ldots X^{t_k}_{i_k}$ są zmiennymi, $t, t_1, t_2, \ldots, t_k$ symbolami oznaczającymi typy, $p, i_1, i_2, \ldots, i_k$ liczbami naturalnymi 0, 1, ... i takimi, że spełniony jest warunek sensowności $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, to wyrażenie

$$X^t_p(X^{t_1}_{i_1}, X^{t_2}_{i_2}, \ldots, X^{t_k}_{i_k})$$

jest zdaniem teorii typów.

(2) jeżeli A, B są zdaniami teorii typów, to wyrażenia

$$\sim A,\ A \to B,\ A \equiv B,\ A \vee B,\ A \wedge B$$

są również zdaniami teorii typów.

(3) jeżeli A jest zdaniem teorii typów, to wyrażenia

$$\vee X^t_p A,\ \wedge X^t_p A$$

są zdaniami teorii typów.

W zdaniach czystej teorii typów nie występują stałe różne od stałych logicznych. Gdyby się jednak chciało ten system w związku z jego zastosowaniami uzupełnić stałymi, należałoby te stałe zaopatrywać w indeksy typikalne i indeksy różnicujące te stałe. Pisząc zdanie teorii typów, tam, gdzie nie spowoduje to nieporozumień, można opuszczać wskaźniki typikalne. Wskazana jest tu jednak daleko posunięta ostrożność.

3. Aksjomatyka prostej teorii typów składa się z dwu grup aksjomatów: aksjomatów o charakterze logicznym przyjmowanych w (prawie) wszystkich systemach oraz aksjomatów specyficznych dla danego systemu. Aksjomatami o charakterze logicznym są aksjomaty *rachunku zdań i *rachunku kwantyfikatorów. Ściślej mówiąc, zdania języka prostej teorii typów podpadające pod schemat tych aksjomatów. Aksjomatów teorii *identyczności nie przyjmuje się, gdyż na ogół pojęcia te definiuje się w rachunkach tego systemu.

Aksjomaty specyficzne systemu prostej teorii typów są zdaniami podpadającymi pod któryś z dwu niżej podanych schematów.

Schemat (A)

$$\wedge X^{t_1}_1 \wedge X^{t_2}_2 \ldots \wedge X^{t_k}_k [X_1^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)}(X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k) \equiv$$
$$\equiv X_2^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)}(X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k)] \to$$
$$\to [X_1^{((t_1, t_2, \ldots, t_k))}(X_1^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)} \equiv$$
$$[({}^{(\delta} {}^{\cdots} {}^{\varepsilon_1)}_{\varsigma}X)^{((\delta} {}^{\cdots} {}^{\varepsilon_1)))}_{1}X \equiv$$

Schemat (B)

$$\vee X_1^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)} \wedge X^{t_1}_1 \wedge X^{t_2}_2 \ldots$$
$$\wedge X^{t_k}_k [X_1^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)}(X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k) \equiv A(X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k)],$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots$, tu są wskaźnikami dowolnych typów, zaś $A(X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k)$ – funkcją zdaniową, której zmiennymi wolnymi są dokładnie zmienne $X^{t_1}_1, X^{t_2}_2, \ldots, X^{t_k}_k$ i która nie zawiera jako zmiennej $X_1^{(t_1, t_2, \ldots, t_k)}$, zaś $k = 1, 2, \ldots$.

Aksjomatów podpadających pod powyższe schematy jest oczywiście nieskończenie wiele.

Aksjomaty pierwszej grupy nazywają się aksjomatami ekstensjonalności. Informują one, mówiąc ogólnie, jakie zbiory i relacje są ze sobą identyczne, stwierdzają one, że jeżeli jakieś dwa zbiory czy dwie relacje są równozakresowe (poprzednik aksjomatu ekstensjonalności), to są identyczne (następnik aksjomatu ekstensjonalności) w sensie definicji Leibniza, która określa, że dwa przedmioty są identyczne, gdy wszystko, co można orzec o jednym z nich, można również orzec o drugim, i odwrotnie. Aksjomaty tej grupy służą do identyfikowania równozakresowych zbiorów i relacji.

Aksjomaty drugiej grupy nazywają się aksjomatami (pewnikami) definicyjnymi. Zdania te stwierdzają, że jeżeli między przedmiotami jakiegoś rodzaju zachodzą warunki wyrażone przez funkcję zdaniową ich dotyczącą (stanowiącą drugą stronę równoważności), to istnieje relacja zachodząca między tymi przedmiotami lub istnieje zbiór tych przedmiotów (stwierdza to druga strona równowa-

żności). Aksjomaty te służą więc do stwierdzania istnienia zbiorów i relacji.

Nierzadko system prostej teorii typów wyposaża się w jeszcze jeden aksjomat, zwany aksjomatem nieskończoności. W przeciwieństwie do poprzednich aksjomatów jest on jednym zdaniem, a nie schematem zdań. Aksjomat ten ma następującą postać:

$$\vee X_1^{((\cdot))}[X_1^{(\cdot)}[X_1^{((\cdot))}(X_1^{(\cdot)})] \wedge \wedge X_1^{(\cdot)}X_1^{((\cdot))}(X_1^{(\cdot)}) \rightarrow$$
$$\rightarrow \vee X_2^{(\cdot)}\{(X_1^{((\cdot))}(X_2^{(\cdot)}) \wedge \wedge X_1[X_1^{(\cdot)}(X_1) \rightarrow X_2^{(\cdot)}(X_1)] \wedge \vee$$
$$\vee X_1[X_2^{(\cdot)}(X_1) \wedge \sim X_1^{(\cdot)}(X_1)]\})]$$

Aksjomat ten stwierdza istnienie nieskończenie wielu indywiduów. Wyraża on, że istnieje niepusta klasa klas indywiduów A, taka że dla każdej klasy indywiduów X należącej do A istnieje klasa indywiduów Y należąca do A i obejmująca X, i różna od niej, a więc licząca więcej elementów. Dla udowodnienia istnienia nieskończonych klas wyższego typu nie potrzeba przyjmować osobnych aksjomatów nieskończoności, gdyż istnienie tych klas wynika z przytoczonego tu aksjomatu. Aksjomat nieskończoności wzmacnia bardzo 'siłę' dedukcyjną tego systemu i rozszerza ogromnie jego problematykę.

Niekiedy system prostej teorii typów zaopatruje się jeszcze w aksjomat zwany *pewnikiem wyboru.

W wielu zastosowaniach wykorzystuje się tylko fragmenty pełnego systemu teorii typów. I tak, gdy z pełnego systemu prostej teorii typów zatrzymać tylko wszystkie wyrażenia odnoszące się do relacji jednoczłonowych (zbiorów), otrzymamy system ogólnej teorii klas. Gdy zaś usuniemy wszystkie wyrażenia zmienne rzędu wyższego niż n-1, otrzymamy system teorii rzędu n-go. Jeżeli zaś usuniemy wszystkie zmienne rzędu wyższego niż 1, otrzymamy system tzw. rozszerzonego rachunku funkcyjnego lub rozszerzonego rachunku predykatów (*Rachunek kwantyfikatorów). Gdy zaś jeszcze usuniemy wszystkie wyrażenia, w których występują zmienne pierwszego rzędu jako związane, otrzymamy węższy rachunek funkcyjny. Jeżeli wreszcie jeszcze bardziej ograniczymy wyrażenia zostawiając spośród zmiennych wolnych pierwszego rzędu jedynie zmienne typu $(\cdot)$, dostaniemy jednoargumentowy węższy rachunek funkcyjny. Rzecz oczywista, dla wszystkich tych systemów trzeba odpowiednio zmodyfikować opisaną wyżej aksjomatykę.

4. Problematyka prostej teorii typów. System ten jest systemem logicznym (z pewnym zastrzeżeniem), w którym zgodnie z intencjami jego inicjatora B. Russella daje się ująć bogata problematyka dotycząca klas i relacji różnego typu. W systemie tym (wzbogaconym o pewnik nieskończoności) można ugruntować różne działy matematyki: arytmetykę liczb naturalnych, a poprzez nią inne działy arytmetyki i analizę matematyczną. W systemie tym, wreszcie, dadzą się ugruntować pewne partie rozważań właściwych *teorii mnogości, włączając w to ogólne twierdzenia dotyczące działań na zbiorach (*Rachunek zbiorów), *teorię mocy, pewne partie *arytmetyki liczb kardynalnych i porządkowych.

W ten sposób system prostej teorii typów stanowi jedno z możliwych rozwiązań zagadnienia stworzenia niesprzecznego systemu obejmującego całą matematykę. System ten był pierwszym rozwiązaniem tego zagadnienia, podanym w *Principia mathematica* przez B. Russella i A. N. Whiteheada.

5. Krytyka systemu prostej teorii typów. Jednym z ważniejszych punktów krytyki, z jakim spotyka się ten system, jest niemożność rozważania w niej tzw. zbiorów mieszanych, tj. takich zbiorów, których elementy są przedmiotami różnych typów, np: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; $\{\emptyset,\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, ...,\}$ itp. Zbiory mieszane występują w licznych rozważaniach matematycznych. Brak ich również poważnie ogranicza problematykę teoriomnogościową teorii typów, uniemożliwiając rozważania o liczbach kardynalnych wyższych mocy. Fakty te, jak się wydaje, są jednym z powodów niechęci matematyków do tego systemu i zarzucenia go na korzyść systemu teorii mnogości.

Innym niepożądanym i nieintuicyjnym zjawiskiem, choć w porównaniu z poprzednim mniej szkodliwym, jest występowanie na terenie systemu prostej teorii typów zjawiska systematycznej wieloznaczności. Polega ono na tym, że intuicyjnie te same pojęcia trzeba wprowadzać dla różnych typów logicznych właściwie nawet nieskończenie wiele razy. Np. pojęcie zbioru pustego trzeba wprowadzać wielokrotnie: $\emptyset^{(\cdot)}$, $\emptyset^{((\cdot))}$, ..., odpowiednio, jako pustą klasę indywiduów, pustą klasę klas indywiduów itd. Podobnie relację zawierania się zbiorów $\subset^{((\cdot),(\cdot))}$, $\subset^{(((\cdot)),((\cdot)))}$, ..., jako (odpowiednio) relację zawierania się między klasami indywiduów, relację zawierania między klasami klas indywiduów itd. Również liczby kardynalne wypadałoby w tym systemie powtarzać dla różnych typów, choć w tym przypadku można to obejść w pewien sposób.

Teoria typów była przez swego inicjatora, jak i wielu innych filozofów i matematyków, traktowana jako system, w którym zrealizowana została idea sprowadzenia matematyki do logiki. Od wielu lat pogląd ten był dyskutowany i niekiedy wręcz kwestionowany. Obecnie na terenie logiki uważa się, że tezy logiki charakteryzuje m. in. to, że są one prawdziwe w każdym modelu. W odniesieniu do systemu teorii typów znaczyłoby to, że jej twierdzenia są prawdziwe w każdej dziedzinie indywiduów i generowanych przez nie zbiorach i relacjach. Właściwość ta przysługuje tylko systemowi teorii typów opartemu na aksjomatach definiowalności i ekstensjonalności. System taki jednak jest niezwykle słaby i nie można w nim nawet udowodnić istnienia zbioru liczb naturalnych. Natomiast aksjomat nieskończoności, w który zaopatruje się teorię typów, aby w niej otrzymać matematykę, nie ma wspomnianego charakteru zdania logiki – nie jest zdaniem

prawdziwym w każdej dziedzinie indywiduów. Stąd nie ma tego charakteru także system twierdzeń wywodzonych z jego pomocą. Wynika stąd, że program sprowadzenia matematyki do logiki nie został, wbrew pozorom, zrealizowany w systemie teorii typów. W każdym razie nie został zrealizowany przy powyższym rozumieniu tezy logiki.

Podział wyrażeń na typy zastosowany w systemie teorii typów uważany jest przez wielu logików i filozofów nie tylko za remedium zabezpieczające przed antynomiami, ale za naturalną właściwość charakteryzującą ścisłe języki naukowe. Zwolennicy tego poglądu są zdania, że typikalna konstrukcja języka powstałaby nawet wówczas, gdyby w ogóle nie było antynomii. Pogląd ten jest kwestionowany przez wielu badaczy. Powołują się oni na to, że istnieją precyzyjne języki naukowe nie oparte na hierarchii podziału wyrażeń na typy, np. języki wielu elementarnych teorii matematycznych i nie tylko matematycznych. Dalej podkreślają oni, że w językach naturalnych też trudno nie tylko dopatrzeć się struktury typikalnej, ale nawet nagiąć je do tej struktury.

6. Geneza, rozwój i stan obecny prostej teorii typów. System teorii typów, z którego po różnych przeróbkach wyłonił się system, potem nazwany prostą teorią typów, powstał w r. 1903. Następnie B. Russell rozpracował go wspólnie z A. N. Whiteheadem w dziele *Principia mathematica*.

W utworzeniu tego systemu przyświecała Russellowi myśl z jednej strony zapobieżenia *antynomiom, a z drugiej zbudowania obszernego systemu obejmującego całą matematykę. Antynomiami, przed którymi Russell chciał ustrzec matematykę, były wówczas: antynomia Burali-Fortiego i pochodząca od samego Russella antynomia klasy wszystkich klas nie będących własnymi elementami. Antynomie te istotnie nie występowały w systemie teorii typów, gdyż zdania antynomialne nie były zdaniami sensownymi w jego systemie, na skutek niezgodności typikalnych. W przypadku antynomii Russella zdanie $\vee X_1^t\{X_1^t(X_1^t) \equiv \sim[X_1^t(X_1^t)]\}$ nie jest zdaniem sensownym, gdyż nie jest nim jego zdanie składowe $X_1^t(X_1^t)$.

Rychło zaistniała potrzeba zapobiegania nowym antynomiom, zwanym obecnie semantycznymi, i to doprowadziło Russella do utworzenia systemu tzw. rozgałęzionej teorii typów. System ten wzięty został za podstawę w dziele *Principia mathematica* i przez długi okres cieszył się wielkim powodzeniem u filozofów i matematyków, stanowiąc podstawę różnych rozważań i wielu inspiracji.

Rozgałęziona teoria typów poddana została gruntownej rewizji i poważnym modyfikacjom przez L. Chwistka (1924–1925) i F. P. Ramsey'a (1925), które doprowadziły do powstania systemu prostej teorii typów. Ramsey zwrócił uwagę na potrzebę rozróżnienia między antynomiami dwu grup: antynomii zwanych dziś logicznymi i antynomii semantycznych. Dla zlikwidowania pierwszych, uważał on, nie potrzeba posługiwać się rozgałęzioną teorią typów. Drugie likwiduje się na drodze reformy języka niezależnej od idei podziału na typy. Opracowanie Ramsey'a uważane było za lepsze od rozwiązań Chwistka i obecne systemy prostej teorii typów stanowią kontynuację jego linii rozwojowej. System ten był dalej przedmiotem licznych badań i ulepszeń prowadzonych przez Carnapa, Tarskiego i Gödla, które doprowadziły do ostatecznego wyklarowania jego podstaw i formalizmu.

Po reformie Chwistka i Ramseya nastąpił niesłychany rozwój i ekspansja prostej teorii typów. Uważana ona była za najlepszy wówczas system podstaw matematyki i zdecydowanie górowała nad swą naturalną konkurentką, aksjomatyczną teorią mnogości, która przeżywała wówczas różnego rodzaju kłopoty teoretyczne. Prosta teoria typów stanowiła teoretyczną podstawę, do której nawiązywały liczne badania naukowe; i tak Tarski pisze swą słynną pracę o pojęciu prawdy na podstawie systemu teorii typów; podobnie Gödel bierze ten system za podstawę swych rozważań o nierozstrzygalności. W okresie tym teoria typów ceniona była również przez filozofów jako ważny składnik poglądu na świat. Wszystkie ważniejsze podręczniki logiki brały ją za podstawę swych rozważań. Tak było do lat 50-tych, kiedy nastąpił szybki zmierzch prostej teorii typów. Została ona niemal zupełnie wyparta przez aksjomatyczną teorię mnogości. Obecnie teoria mnogości stosowana jest jako podstawa badań matematycznych, logicznych i filozoficznych. Współczesne podręczniki logiki opierają się z reguły na teorii mnogości. A przez filozofów teoria mnogości uważana jest za swego rodzaju *ontologię.

R. Carnap: *Syntax*; A. Church: *A formulation of the simple theory of types*. „JSL" V 1940; L. Chwistek: *Antynomie logiki formalnej*. „Przegl. Filoz." XX 1921; – – *The theory of constructive types*. „Ann. de la Soc. Polonaise de Math." II 1924, III 1925; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Mostowski: *Log. mat.*; *Principia*; F. P. Ramsey: *The foundations of mathematics*. „Proceed. of the London Math. Soc." XXV 1926 (przedr. w zbiorze pod tymże tytułem, wyd. R. B. Braithwaite, 1931); Tarski: *Pojęcie prawdy*.

H. S.

teoria typów, rozgałęziona.

1. Podstawowe intuicje. System ten został opisany przez swego twórcę B. Russella w sposób daleki od ścisłości i niezwykle niejasny. Do ważniejszych mankamentów jego opisu należy m. in. niedostateczne rozróżnienie wyrażeń i przedmiotów, do których te wyrażenia się odnoszą. Opis tego systemu przedstawia dużo większy stopień skomplikowania w porównaniu z opisem systemu prostej teorii typów. Z uwagi na to ograniczymy się jedynie do podania głównych jego intuicji.

W systemie tym wprowadza się podział przedmiotów i odnoszących się do nich wyrażeń na typy i rzędy, podobnie jak to ma miejsce w systemie prostej teorii typów.

Główna różnica między tymi dwoma systemami polega na tym, że w rozgałęzionej teorii typów różnicuje się dodatkowo, na stopnie, przedmioty należące do tego samego typu. Za podstawę tego zróżnicowania bierze się przy tym sposób definiowania lub definiowalności danego przedmiotu.

Zróżnicowanie przedmiotów tego samego typu na stopnie omówimy na przykładzie relacji jednoczłonowych, inaczej zbiorów, i w odniesieniu do jednego typu, aby nie komplikować zbytnio sprawy. Będziemy się starali, referując ten temat, mówić raczej o przedmiotach, a dopiero pośrednio o wyrażeniach, oraz za podstawę brać definiowalność, a nie definiowanie.

Weźmy pod uwagę formułę zdaniową

[a] $\wedge x_i[F(x_1^{(\cdot)}, x_i)]$,

w której x jest zmienną typu $\cdot$ i rzędu 0, przebiegającą indywidua, $x_1^{(\cdot)}$ jest zmienną typu $\cdot$) i rzędu 1 przebiegającą klasy indywiduów. $F(x_1^{(\cdot)}, x_i)$ jest jakąś formułą języka tego systemu, zawierającą jako jedyne zmienne $x_1^{(\cdot)}$ i x_i. Ponieważ zmienna x_i jest związana kwantyfikatorem, przeto formuła [a] zawiera tylko jedną zmienną wolną $x_1^{(\cdot)}$. Możemy przeto powiedzieć, że za pomocą formuły [a] definiowalny jest zbiór (relacja jednoargumentowa) Z^a typu $(\cdot)$ i rzędu pierwszego. Z^a jest jakimś zbiorem indywiduów.

Weźmy pod uwagę teraz inną formułę zdaniową

[b] $G(x_i)$

gdzie x_i jest zmienną typu $\cdot$ i rzędu pierwszego, przebiegającą indywidua. W formule [b] x_i jest jedyną zmienną wolną i ponadto nie zawiera ona w ogóle innych zmiennych związanych. Jak widać, za pomocą formuły [b] definiowalny jest jakiś zbiór indywiduów Z^b.

Mimo że zbiory Z^a i Z^b są przedmiotami tego samego typu $(\cdot)$ i rzędu pierwszego, Russell odczuwał potrzebę zróżnicowania ich za pomocą jeszcze jednego parametru, nazwanego stopniem. W systemie rozgałęzionej teorii typów rozważanym przedmiotom przypisuje się więc aż trzy parametry: typ, rząd i stopień.

Zasady przypisywania stopni przedmiotom. Aby uniknąć zbędnych komplikacji, wprowadzimy określenie stopnia przedmiotu jedynie dla zbiorów, czyli relacji jednoczłonowych.

Niech F będzie formułą zdaniową zawierającą jedną zmienną wolną x_i^t, typu t i rzędu k; t jest przy tym typem relacji jednoczłonowej, zbioru. Niech dalej, przez tę formułę F będzie definiowalny zbiór (relacja jednoczłonowa) Z typu t i rzędu k. Przy tych oznaczeniach powiemy, że:

(1) jeżeli formuła F nie zawiera kwantyfikatora wiążącego zmienną rzędu wyższego niż k, to zbiór Z jest stopnia pierwszego.

Pośrednio stopień pierwszy przypisuje się również stałej denotującej zbiór Z, oraz samej formule F, którą również nazywa się formułą predykatywną. Natomiast (2) jeżeli formuła F zawiera kwantyfikator wiążący zmienną rzędu $k+l$, gdzie $l \geqslant 1$, i nadto F nie zawiera żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną rzędu wyższego niż k, to zbiór Z jest stopnia $l+1$-go.

Pośrednio stopnia $1+1$-go jest również ewentualna stała denotująca ten zbiór oraz sama formuła F. Formuła F nazywa się wówczas niepredykatywną.

Z rozważanych tu formuł formuła [a] zawiera kwantyfikator wiążący zmienną rzędu 1, podczas gdy występująca w niej zmienna ma typ t rzędu $k = 0$. Stąd definiowany przez nią zbiór jest stopnia drugiego, a ona sama jest formułą niepredykatywną. Natomiast formuła [b] nie zawiera kwantyfikatora wiążącego zmienną rzędu wyższego niż $k = 0$, czyli rząd jedynej występującej w niej zmiennej. Stąd definiowany przez formułę [b] zbiór jest stopnia pierwszego, a ona sama jest formułą predykatywną.

2. Geneza i rozwój rozgałęzionej teorii typów. Podobnie jak to miało miejsce w odniesieniu do systemu prostej teorii typów, *antynomie były źródłem inspiracji Russela przy tworzeniu rozgałęzionej teorii typów. System ten jest właściwie przeróbką poprzedniego systemu. Konstruując w 1907 r. rozgałęzioną teorię typów Russell chciał zapobiec wystąpieniu antynomii kłamcy i Richarda, i jednocześnie dać wyraz pewnym „konstruktywistycznym" (*Konstruktywizm) ideom Poincarégo, z którymi się solidaryzował.

U podstaw systemu rozgałęzionej teorii typów leży zasada sformułowania przez Poincarégo w 1906 r., zresztą w sposób dość niejasny, zabraniająca definiowania przedmiotów za pomocą zbiorów, których te przedmioty są elementami. Z zasadą tą zresztą Poincaré sam się specjalnie nie liczył, natomiast Russell wcielił ją do swego systemu, dając jej wyraz przez wykluczenie zeń zbiorów definiowalnych przez formuły niepredykatywne.

W realizującym te założenia systemie nie można było zrekonstruować antynomii kłamcy i Richarda, gdyż wyrażenia doprowadzające do antynomii nie mogły figurować w systemie jako niepredykatywne i mające różne stopnie w sensie wyżej omówionym.

Tak skonstruowany system miał kilka bardzo niepożądanych konsekwencji, z których najważniejsza to niemożność sformułowania i udowodnienia szeregu ważnych twierdzeń analizy matematycznej. Np. twierdzenie głoszące, że każdy niepusty zbiór liczb rzeczywistych ograniczony z dołu (góry) ma kres dolny (górny). Aby zapobiec tym trudnościom i uratować dla systemu ważne działy matematyki Russell zaopatrzył go w aksjomat sprowadzalności. Aksjomat ten głosił, że dla każdego zbioru definiowalnego przez formułę niepredykatywną istnieje jego odpowiednik: zbiór definiowalny przez formułę predykatywną. Aksjomat ten był w swoim czasie przedmiotem licznych dyskusji.

Rozgałęziona teoria typów została gruntownie zreformo-

wana przez L. Chwistka (1924–1925) i F. P. Ramseya. Ta ostatnia uchodzi za bardziej udaną. Ramsey zauważył, że antynomie można podzielić na dwie grupy: pierwszą – obejmującą antynomię Russella, antynomie zbioru wszystkich zbiorów i antynomie Burali-Fortiego oraz drugą – obejmującą antynomie kłamcy, Richarda, Bary'ego. Jako remedium na pierwsze Ramsey uznał prostą teorię typów. Za źródło antynomii drugiego rodzaju uznał wadliwą konstrukcję języka – zostały one zlikwidowane przez rozróżnienie języka przedmiotowego i *metajęzyka.

Rozgałęziona teoria typów została na długi czas zaniechana. Niedawno nawiązali do niej znowu P. Lorenzen i Hao Wang, budując formalnie poprawne systemy realizujące idee rozgałęzionej teorii typów.

F. B. Fitch: *The consistency of the ramified „Principia"*. „JSL" III 1938; *Principia*; B. Russell: *Mathematical logic as based on the theory of types*. „Amer. Journ. of Math." XXX 1908.

H. S.

teoria zbiorów uporządkowanych. Jedna z części *teorii mnogości, wprowadzona przez twórcę teorii mnogości G. Cantora. Zajmuje się badaniem zbiorów częściowo uporządkowanych, liniowo uporządkowanych i dobrze uporządkowanych (terminologia nie jest tu całowicie ustalona, częstokroć zbiory częściowo uporządkowane nazywane są w literaturze uporządkowanymi).

Relacja R jest częściowym porządkiem, jeśli jest w swym polu: [1] zwrotna, [2] antysymetryczna, [3] przechodnia. Symbolem $D(R)$ oznaczamy *dziedzinę relacji R:

[1] $\wedge\, x \in D(R)\,(xRx)$.

[2] $\wedge\, x \in D(R) \wedge y \in D(R)\,[(xRy \wedge yRx) \rightarrow y = x]$.

[3] $\wedge\, x \in D(R) \wedge y \in D(R) \wedge z \in D(R)\,[(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$.

Relacja R jest liniowym porządkiem, jeśli jest częściowym porządkiem i przy tym spełnia warunek [4] spójności:

[4] $\wedge\, x \in D(R) \wedge y \in D(R)\,[xRy \vee yRx]$.

Relacja R jest dobrym porządkiem, jeśli jest liniowym porządkiem i spełnia warunek [5] minimalności:

[5] $\wedge\, X \subseteq D(R)\,[X \neq \emptyset \rightarrow \vee\, y \in X \wedge z \in X(yRx)]$,

gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.

Jeśli zbiór A jest (częściowo, liniowo, dobrze) uporządkowany przez relację R, to parę $\langle A, R\rangle$ nazywamy zbiorem (częściowo, liniowo, dobrze) uporządkowanym.

Dwa zbiory (częściowo, liniowo, dobrze) uporządkowane $\langle A, R\rangle$ i $\langle B, S\rangle$ nazywamy podobnymi, jeśli istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne f odwzorowujące A na B i takie, że

$$\wedge\, a \in A \wedge b \in A\,[aRb \equiv f(a)Sf(b)].$$

Stosunek podobieństwa jest relacją równoważnościową, możemy więc przyporządkować zbiorowi uporządkowanemu przedmiot, który w przypadku zbioru liniowo uporządkowanego nazywamy typem porządkowym, a w przypadku zbioru dobrze uporządkowanego liczbą porządkową. Na typach porządkowych wprowadzić można działania dodawania, mnożenia i typu odwrotnego.

Jeśli $\langle A, R\rangle$ jest zbiorem częściowo lub liniowo uporządkowanym to $\langle A, R^{-1}\rangle$ jest zbiorem częściowo lub liniowo uporządkowanym (symbol R^{-1} oznacza *konwers relacji R).

Typ porządkowy. Jeśli typ $\langle A, R\rangle$ ($\overline{\langle A, R\rangle}$ – oznaczenie pochodzące od Cantora) jest równy μ, to typ $\langle A, R^{-1}\rangle$ oznaczamy: μ^*; łatwo dostrzec, że $\mu^{**} = \mu$.

Jeśli μ oraz ν są tymi porządkowymi, to dodawanie $\mu + \nu$ definiuje się następująco: wybieramy reprezentanty typów μ oraz ν odpowiednio $\langle A, R\rangle$ i $\langle B, S\rangle$ tak, że $A \cap B = \emptyset$. Definiujemy teraz na $A \cup B$ następującą relację: $R \cup (A \times B) \cup S$. Relacja ta jest oczywiście porządkiem liniowym. Innymi słowy: stawiamy na początku elementy zbioru A uporządkowane przez R, dalej elementy B uporządkowane przez S. Przy tym każdy element zbioru A jest teraz wcześniejszy od każdego elementu zbioru B. Tak zdefiniowane dodawanie nie jest przemienne; łatwo wskazać μ oraz ν takie, że $\mu + \nu \neq \nu + \mu$.

Mnożenie $\mu \cdot \nu$ definiujemy następująco: niech $\mu = \langle A, R\rangle$ i $\nu = \langle B, S\rangle$; wtedy $\mu \cdot \nu = \langle A \times B, T\rangle$, gdzie T jest antyleksykograficznym porządkiem iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Podobnie, mnożenie nie jest tu przemienne.

Porządek liniowy R zbioru A nazywa się gęstym, jeśli spełnia on następujący warunek:

$$\wedge\, a \in A \wedge b \in A\,[a \neq b \wedge aRb \rightarrow \vee\, c \in A(c \neq a \wedge c \neq b \wedge aRc \wedge cRb)].$$

Własność gęstości jest niezmiennicza względem relacji podobieństwa. Stąd też możemy mówić o typach gęstych.

Okazuje się (jak udowodnił G. Cantor), że jest tylko jeden typ gęsty przeliczalny bez pierwszego i ostatniego elementu. Jest to typ η zbioru liczb wymiernych.

Liczby porządkowe. Są to w myśl definicji typy porządkowe zbiorów dobrze uporządkowanych. Jak łatwo można się przekonać, na to, by zbiór liniowo uporządkowany był uporządkowany dobrze, potrzeba i wystarczy, by nie posiadał nieskończonego podciągu malejącego.

Dla ustalonej liczby porządkowej μ można zdefiniować pojęcie jej następnika μ' w następujący sposób: $\mu' = \mu + 1$, gdzie 1 jest porządkiem zbioru 1-elementowego.

Liczba ν jest poprzednikiem μ, jeśli $\mu = \nu'$. Liczby graniczne są to liczby nie posiadające poprzednika.

Pojęcie liczby porządkowej można wyeliminować metodą v. Neumanna w następujący sposób:

$$N_0 = \emptyset \text{ (zbiór pusty)}\quad N_{\alpha+1} = N_\alpha \cup \{N_\alpha\}$$

$$N_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} N_\alpha \text{ dla } \lambda \text{ granicznych.}$$

Przy takiej definicji relacja mniejszości dla liczb porządkowych (tj. relacja bycia odcinkiem właściwym) zastąpiona zostaje relacją należenia.

Liczbę porządkową nazywamy liczbą początkową, jeśli nie jest równoliczna z żadnym swoim odcinkiem właściwym. Liczby początkowe są często utożsamiane z alefami (*Teoria mocy zbiorów).

Każdy przeliczalny typ porządkowy może być reprezentowany jako podsystem systemu relacyjnego (*Dziedziny) $\langle \eta, \leqslant \rangle$, gdzie η jest zbiorem liczb wymiernych. Konstrukcję zbiorów uporządkowanych uniwersalnych (takich jak η) można przeprowadzać dla wyższych mocy, otrzymując tzw. zbiory η_α Hausdorffa. Zagadnienie mocy tych zbiorów związane jest z tzw. uogólnioną *hipotezą continuum.

W zbiorze częściowo uporządkowanym można wyróżnić elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze. Element α nazywamy maksymalnym (w sensie relacji R), jeśli $\wedge x[\alpha R x \rightarrow x = \alpha]$, zaś największym, jeśli $\wedge x(xR\alpha)$; odpowiednio definiujemy elementy: minimalny i najmniejszy. Łatwo udowodnić, że o ile istnieje element największy w sensie relacji R, to jest on jedyny, jest on także jedynym elementem maksymalnym; podobnie dla najmniejszego.

W teorii zbiorów uporządkowanych wielką rolę odgrywa *pewnik wyboru. W szczególności konsekwencją pewnika wyboru jest równoważne mu twierdzenie Zermelo: Dla każdego zbioru istnieje relacja dobrze go porządkująca.

Równoważny aksjomatowi wyboru jest także bardzo ważny w zastosowaniach lemat Kuratowskiego-Zorna: Jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym A każdy podzbiór liniowo uporządkowany posiada górne ograniczenie, to w zbiorze A istnieje co najmniej jeden element maksymalny.

Przykłady relacji porządkujących:

a) w zbiorze $\mathscr{P}^X$ (dla X co najmniej 2-elementowego) relacja $\leqslant$ jest porządkiem częściowym, ale nie liniowym;

b) w zbiorze $\mathscr{C}$ (liczb całkowitych) relacja $\leqslant$ jest porządkiem liniowym, ale nie dobrym;

c) w zbiorze $\mathscr{N}$ (liczb naturalnych) relacja $\leqslant$ jest dobrym porządkiem.

Teoria zbiorów uporządkowanych (w szczególności częściowo uporządkowanych) związana jest z teorią krat (ang. *lattice theory*), a także *algebra Boole'a.

P. Bernays: *Axiomatic set theory*. 1958; A. Fraenkel: *Abstract set theory*. 1953; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966.

W. Mk

term.

(1) *Nazwa indywidualna, czyli stała nazwowa (zob. Grzegorczyk).

(2) Wyrażenie, które jest bądź stałą nazwową, bądź zmienną nazwową (zob. Beth).

Beth: *Foundations*; Grzegorczyk: *Log. mat.*

W. M.

termin dyspozycyjny. Orzecznik opisujący własność, która nie jest obserwowalna, lecz przyjęta jest hipotetycznie dla wyjaśnienia jakichś obserwowalnych. Np. odporność na zarazki jest dyspozycją, która ma tłumaczyć pewne fakty obserwacji, jak fakt pozostawania zdrowym pomimo kontaktów z otoczeniem chorującym zakaźnie. Orzeczniki dyspozycyjne definiuje się za pomocą *terminów spostrzeżeniowych, posługując się *definicją redukcyjną. Należą więc one do *terminów teoretycznych.

Pap: *Elements*.

W. M.

termin empiryczny. Wyrażenie należące do specyficznych, a nie przejętych skądinąd (np. z logiki) wyrażeń teorii empirycznej. Jest to więc bądź *termin spostrzeżeniowy, bądź *termin teoretyczny.

W. M.

termin pierwotny. Wyrażenie występujące w aksjomatach *systemu dedukcyjnego i nie mające w tym systemie innej definicji, jak *definicja aksjomatyczna. Tak np. terminami pierwotnymi implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań Łukasiewicza są symbole implikacji i negacji. Terminy zdefiniowane za pomocą pierwotnych nazywają się pochodnymi.

Zob. też **rachunek zdań** – 4.

W. M.

termin spostrzeżeniowy (t. obserwacyjny, t. elementarny). Termin, którego konotację stanowi cecha obserwowalna zmysłowo: jakiś kolor, kształt, zapach itp. Termin należy do spostrzeżeniowych, jeśli jego znaczenie da się zakomunikować za pomocą *definicji ostensywnej. Terminy spostrzeżeniowe występują jako orzeczniki *zdań obserwacyjnych (spostrzeżeniowych).

R. Carnap: *Testability and meaning*. 1936; M. Przełęcki: *O definiowaniu terminów spostrzeżeniowych*. [W:] *Rozp. log.*

termin teoretyczny. Termin należący do teorii empirycznej, w której nie jest *terminem spostrzeżeniowym, czyli elementarnym, lecz pozostaje w pewnym stosunku definicyjnym do terminów elementarnych. Stosunek ten określają w różny sposób następujące warunki (kolejność wyliczenia odpowiada w przybliżeniu kolejnym etapom w historii problemu kryteriów empiryczności).

(1) T jest terminem teoretycznym wtedy i tylko, gdy da się zdefiniować równoważnościowo za pomocą terminów elementarnych.

(2) T jest terminem teoretycznym, gdy da się zdefiniować cząstkowo, czyli redukcyjnie, za pomocą terminów elementarnych (*Definicja redukcyjna).

(3) T jest terminem teoretycznym, gdy za jego pomocą

dadzą się zdefiniować (bezpośrednio lub pośrednio) pewne terminy elementarne.
(4) Niech $Z(T)$ będzie zdaniem zawierającym T jako jedyny termin pozalogiczny, Z – zdaniem zawierającym, jako terminy pozalogiczne, jedynie terminy elementarne, P – układem postulatów pewnej teorii N. T jest terminem teoretycznym teorii N, jeśli w N istnieją takie zdania $Z(T)$ i Z, że Z wynika ze zdania $Z(T)$ oraz z postulatów P, nie wynika natomiast z samych postulatów P. Warunek ten ulega złagodzeniu przez dopuszczenie, by do koniunkcji $Z(T)$ i postulatów P (z której wynika Z) dołączać można było zdania $Z(D)$ zawierające terminy uprzednio zdefiniowane w danej teorii. Jeśli Z wynika z koniunkcji $Z(T) \wedge P \wedge Z(D)$, nie wynika natomiast z $P \wedge Z(D)$, to T jest terminem teoretycznym teorii N (zob. Carnap 1958).
Wyliczenie znaczeń (1)–(4) nie pretenduje do zupełności. Podejmuje się wciąż nowe próby charakteryzowania terminów teoretycznych, ponieważ każda z dotychczasowych prób narażona jest na zarzut, że eliminuje terminy niewątpliwie empiryczne bądź też dopuszcza terminy niewątpliwie nieempiryczne.
Zob. też **zdanie empiryczne**; **sensowność empiryczna.**

R. Carnap: *Beobachtungsprache und theoretische Sprache.* „Dialectica" XII 1958 nr 3/4; J. Kotarbińska: *Ewolucja Koła Wiedeńskiego.* „Myśl Współcz." II 1947 i [W:] *LTN*; M. Przełęcki: *Pojęcia teoretyczne a doświadczenie.* „St. Log." XI 1961 i [W:] *LTN*.

W. M.

treść nazwy (dokładniej: treść charakterystyczna nazwy).
(1) Treścią nazwy N jest zespół cech charakterystyczny dla zakresu nazwy N, tj. taki, że przysługuje wszystkim desygnatom tej nazwy i tylko im.
(2) Treścią nazwy N lub odpowiadającego jej pojęcia jest zespół cech charakterystyczny dla zakresu nazwy N, za pomocą którego myślimy o jej desygnatach.
Określenia (1) i (2) różnią się pojęciem cechy. W (1) pojmuje się cechę obiektywistycznie, jako coś, co przysługuje rzeczom (zob. Kotarbiński), zaś w (2) subiektywistycznie, jako coś co znajduje się w umyśle, jako myślowy odpowiednik cechy pojętej obiektywnie (zob. Ajdukiewicz 1956). Nadto (2) jest węższe niż (1), odnosi się bowiem tylko do wyróżnionych (przez dany język) cech charakterystycznych. Zob. też **konotacja.**
Termin „treść", w szerszym jednak znaczeniu niż (1) lub (2) (ang. content, niem. Inhalt), odgrywał doniosłą rolę w analizie pojęć, spostrzeżeń itp. uprawianej przez filozofów z kręgu Brentana, Meinonga, Husserla, Twardowskiego (odróżnienie treści i przedmiotu przedstawień).

Ajdukiewicz: *Zarys*; – – *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*; K. Twardowski: *Zur Lehre vom Inhalt und Gegenstand der Vorstellungen.* 1894.

W. M.

trylemat (z gr.: τρεῖς – trzy, λῆμμα – przesłanka). Termin z tradycyjnej logiki oznaczający schemat wnioskowania, w którym obok trzech zdań warunkowych występuje jako czwarta przesłanka zdanie alternatywne trójczłonowe:

jeżeli a, to d,
jeżeli b, to d,
jeżeli c, to d,
lub a lub b lub c,

zatem: d.

Trylemat jest odpowiednikiem jednego z praw współczesnego *rachunku zdań.

M. Kowalewski: *Logika.* 1959; J. Śleszyński: *Teoria dowodu.* T. 2. 1929.

M.P.

twierdzenie Gödla. Kurt Gödel udowodnił wiele twierdzeń metamatematycznych. Gdy jednak używa się zwrotu „twierdzenie Gödla" bez dalszych określeń, ma się najczęściej na uwadze twierdzenie o niezupełności (*Zupełność systemu – (3)) bogatszych systemów dedukcyjnych, mianowicie takich, w których da się zbudować *arytmetykę liczb naturalnych. Należy do nich system zawarty w *Principia mathematica* A. N. Whiteheada i B. Russella (*Teoria typów). Dla skrótu oznaczmy takie systemy literą S. Twierdzenie Gödla (udowodnione w 1931 r.) da się wysłowić zwięźle w następujący sposób: Istnieją prawdziwe zdania systemu S, które nie są twierdzeniami tego systemu (tj. nie dadzą się wywieść z aksjomatów systemu S). Gödel wykazał, że niezupełność ta jest zasadnicza w tym sensie, iż nie da się jej usunąć przez wprowadzenie dodatkowych aksjomatów. Dodatkowe aksjomaty mogą pozwolić na rozstrzygnięcie pewnych problemów, których dotąd nie można było rozstrzygnąć, zawsze jednak pozostaną inne nierozstrzygalne problemy.
Twierdzenie o niezupełności bywa nazywane pierwszym twierdzeniem Gödla. Mianem drugiego twierdzenia Gödla określa się udowodnione w tej samej pracy twierdzenie o niemożliwości podania takiego dowodu *niesprzeczności systemów zawierających arytmetykę który korzystałby wyłącznie ze środków tych systemów; udowodnienie niesprzeczności takich systemów wymaga posłużenia się konstrukcjami, które nie mają reprezentacji w ramach rachunku arytmetycznego.
Pierwsze i drugie twierdzenie Gödla obaliły tzw. program Hilberta i jego szkoły (*Formalizm), wskazując na pewną ograniczoność poznawczą metody aksjomatycznej i przekreślając główne wiązane z nią nadzieje. Jednocześnie wyniki Gödla oddziałały wybitnie stymulująco na dalszy rozwój badań metamatematycznych. Filozoficzne implikacje tych twierdzeń są ciągle jeszcze przedmiotem dociekań i kontrowersji: interpretacji pesymistycznej, zgodnie z którą twierdzenia Gödla świadczą o istnieniu „nieprzekraczalnych granic rozumu ludzkiego", przeciwstawia się pogląd, iż skłaniają one raczej do ufności w potęgę twórczego umysłu, wskazują bowiem, że na drodze nowych

konstrukcji pojęciowych może się on uporać z problemami, których nie da się rozwiązać za pomocą żadnych wcześniej opracowanych metod i technik poznawczych.
W sprawie dowodów twierdzeń Gödla zob. wymienione niżej publikacje.

K. Gödel: *Ueber formal unentscheidbare Sätze der „Principia mathematica" und verwandter Systeme*. I. „MMP" XXXVIII 1931; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Mostowski: *Log. mat.*; E. Nagel, R. J. Newmann: *Twierdzenie Gödla*. 1961 (seria Omega).

B. S.

twierdzenie Herbranda-Gentzena. Niech formuła Φ znajduje się w *postaci normalnej; wtedy jeśli Φ posiada (jako sekwencja $\rightarrow\Phi$) dowód D w *rachunku Gentzena, to posiada też dowód D, następującej postaci. Jest on superpozycją dowodów D_1 i D_2 takich, że w dowodzie D_1 używane są wyłącznie reguły odnoszące się do spójników rachunku zdań, zaś w D_2 wyłącznie reguły dotyczące kwantyfikatorów.
Nieformalnie: Dowód formuły w postaci normalnej może być uzyskany tak, że najpierw używamy reguł odnoszących się do spójników $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$, a następnie reguł odnoszących się do $\vee$ oraz $\wedge$.
Z twierdzenia Herbranda-Gentzena korzysta się przy dowodzie *lematu Craiga.

R. C. Lyndon: *O logice matematycznej*. 1968.

W. M.

twierdzenie Lindenbauma (t. o nadsystemach zupełnych). Dowolny niesprzeczny zbiór daje się rozszerzyć tak, iż otrzymany zbiór będzie systemem niesprzecznym i zupełnym, czyli dla każdego zbioru zdań X istnieje taki zawierający go zbiór zdań Y, że Y jest systemem dedukcyjnym niesprzecznym i zupełnym. Twierdzenie Lindenbauma ujmuje taką ideę, iż mając dany niesprzeczny zbiór zdań — jeśli pogrupować wszystkie pozostałe zdania danego języka w pary tak, że w każdej parze jedno zdanie będzie negacją drugiego, to można kolejno do tego zbioru dołączać po jednym zdaniu z każdej pary, zachowując niesprzeczność tak poszerzanego zbioru i w końcu w tym zbiorze znajdzie się po jednym zdaniu z każdej pary, a zbiór zostanie niesprzeczny.

A. Tarski: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*. „Spraw. Tow. Nauk. Warsz." II 1930 23.

K. Cz.

twierdzenie o dedukcji. Twierdzenie, które głosi, że dla udowodnienia implikacji wystarczy z jej poprzednika wyprowadzić następnik, stosując logiczne reguły wnioskowania. Dostarcza ono reguły konstruowania dowodów w systemach *dedukcji naturalnej (np. Słupecki i Borkowski). W dokładniejszym sformułowaniu twierdzenie to brzmi jak następuje. Niech X będzie zbiorem jakichś formuł teorii T, zaś A formułą zamkniętą (tj. bez zmiennych wolnych) tejże teorii; jeśli z X i A, przy zastosowaniu reguł właściwych teorii T, da się wydedukować formuła B, to z X da się wydedukować, czyli wynika inferencyjnie, implikacja $A\rightarrow B$. Symbolicznie:

$$\text{Jeśli } X, A \vdash B, \text{ to } X \vdash A\rightarrow B.$$

Zastrzeżenie, że A powinna być formułą zamkniętą, wyjaśnia się następująco. Przypuśćmy, że warunek ten nie jest spełniony; przyjmijmy za A formułę otwartą Px. Reguła generalizacji pozwala wydedukować z niej $(x)Px$, ale implikacja $Px\rightarrow(x)Px$ nie jest tezą logiki, ponieważ staje się zdaniem fałszywym przy pewnych podstawieniach za x, np.: (dla liczb naturalnych): jeśli 4 jest liczbą parzystą, to każda liczba jest parzysta. Powyższe zastrzeżenie odnosi się do rachunku kwantyfikatorów, w którym występuje odróżnienie zmiennych wolnych i związanych; nie odnosi się ono do klasycznego rachunku zdań.
Gdy zbiór X jest pusty, twierdzenie o dedukcji przyjmuje następującą uproszczoną postać:

$$\text{Jeśli } A \vdash B, \text{ to } \vdash A\rightarrow B,$$

tzn., jeśli w T z formuły A wyprowadzalna jest formuła B, to implikacja $A\rightarrow B$ jest twierdzeniem teorii T.
Zachodzi także odwrotne twierdzenie o dedukcji:

$$\text{Jeśli } X \vdash A\rightarrow B, \text{ to } X, A \vdash B.$$

Twierdzenie to pozwala wprowadzać nowe reguły dedukcyjne na podstawie udowodnionych już formuł logicznych, np. mając udowodnione (lub przyjęte aksjomatycznie) prawo $A\rightarrow\sim(\sim A)$, możemy przyjąć regułę $A\vdash\sim(\sim A)$, tzn.: z A wolno wydedukować $\sim\sim A$.
Twierdzenie o dedukcji ma bogatą literaturę dotyczącą warunków jego zachodzenia dla różnych teorii logicznych oraz jego różnych wariantów (zob. np. Surma 1972). Za prekursora twierdzenia o dedukcji uchodzi Bernard Bolzano (1837). Jego współczesne sformułowanie pochodzi od J. Herbranda oraz, niezależnie, od A. Tarskiego, sam zaś termin od Hilberta i Bernaysa.

B. Bolzano: *Wissenschaftslehre*. 1837; I. M. Copi: *Symbolic logic*. 1954; Grzegorczyk: *Log. mat.*; J. Herbrand: *Recherches sur la théorie de la démonstration*. 1930; Hilbert, Bernays: *Grundlagen*; W. A. Pogorzelski: *On the scope of the classical deduction theorem*. „JSL" XXXIII 1968; — — *Przegląd twierdzeń o dedukcji*. „St. Log." XV 1964; S. J. Surma: *Twierdzenie o dedukcji dla implikacji zastępujących*. „St. Log." XXII 1968; — — *The deductions theorems valid in certain fragments of the Lewis system S2 and the system T of Feys-von-Wright*. „St. Log." XXXI 1972; A. Tarski: *Über einige fundamentale Begriffe der Mathematik*. „Spraw. Tow. Nauk. Warsz." III 1923 (23) (przekł. ang. [W:] Tarski *LSM*).

W. M.

twierdzenie Tarskiego (twierdzenie o niedefiniowalności prawdy). Niech teoria T będzie sformalizowana w języku L pierwszego rzędu. Załóżmy przy tym, że teoria T zawiera *arytmetykę liczb naturalnych. Niech wreszcie S będzie zbiorem *numerów Gödla formuł prawdziwych teorii T;

wtedy nie istnieje formuła języka L spełniona dokładnie przez elementy zbioru S; inaczej mówiąc, pojęcie prawdy dla formuł teorii T nie może być wyrażone wewnątrz T. Założenie twierdzenia może być osłabione; nie jest konieczne, by teoria T zawierała całą arytmetykę, wystarczy, aby zawierała wystarczająco dużą jej część, pozwalającą na skonstruowanie formuły wyrażającej podstawienie. Dowód twierdzenia Tarskiego opiera się na schemacie tzw. paradoksu kłamcy (*Antynomie w logice).

A. Tarski: *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften* I. „MMP" XXVII 1930 (przekł. ang. w *LSM*).

W. M.

twierdzenie Zermeli. Każdy zbiór da się dobrze uporządkować; dokładniej: d!a każdego zbioru X istnieje relacja R ustalająca jego dobre uporządkowanie. Twierdzenie to jest równoważne *pewnikowi wyboru.

Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

K. Cz.

typologia. Zabieg metodologiczny (lub rezultat takiego zabiegu) polegający na grupowaniu przedmiotów na zasadzie ich podobieństwa do pewnego przedmiotu wzorcowego zwanego typem. Typologię należy odróżniać od *podziału logicznego, polegającego na wyróżnieniu co najmniej dwóch klas przedmiotów, z których jedne posiadają pewną cechę, drugie zaś tej cechy nie posiadają. Zob. też **klasyfikacja nauk.**

C. Hempel, P. Oppenheim: *Der Typusbegriff im Lichte der neuen Logik.* 1936; T. Pawłowski: *Metodologiczne zagadnienia humanistyki.* 1969; — — *Def. w humanist.*

W. M.

uniwersalia (powszechniki; l. mn. od łac. universale – to, co ogólne, powszechne). Przedmioty ogólne, czyli abstrakcyjne (ang. abstract entities), stanowiące kategorię ontologiczną odmienną od kategorii *indywiduów. Pojęcie to, sięgające Platona i Arystotelesa, znajdowało się w centrum uwagi scholastyków. Współczesną *eksplikacją tego pojęcia, jedną z możliwych, jest pojęcie *zbioru w sensie dystrybutywnym; przy tej eksplikacji stosunek indywiduum do powszechnika, stanowiący jedno z naczelnych zagadnień filozofii od czasów Platona, jest interpretowany jako relacja należenia elementu do zbioru. W ten sposób średniowieczny spór o uniwersalia, w którym ukształtowały się stanowiska określane jako realizm (*platonizm), *konceptualizm i *nominalizm, przeniósł się na teren filozofii matematyki, gdzie również pogląd o obiektywnym istnieniu zbiorów ściera się z poglądami przypisującymi im status czegoś będącego jedynie w umyśle lub jedynie w języku.

Inną współczesną wersją sporu o uniwersalia jest debata na temat *znaczenia, w której akceptuje się lub odrzuca pogląd traktujący znaczenie jako obiektywny przedmiot abstrakcyjny (akceptacja tego poglądu odpowiada stanowisku realizmu, czyli platonizmu). Jeszcze inna odmiana stanowiska realistycznego jest rozwijana na gruncie fenomenologii (por. Ingarden).

K. Ajdukiewicz: *W sprawie „uniwersaliów"*. [W:] *JiP*. T. 1; R. Ingarden: *Spór o istnienie świata*. T. 1. 1948 (m. in. rozdz. XI); Kotarbiński: *Elementy*; Küng: *Ontology*; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*

W. M.

uogólnienie indukcyjne. Zdanie Z jest uogólnieniem indukcyjnym zdań $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_n$ wtedy, gdy zdanie Z jest zdaniem ogólnym wywnioskowanym indukcyjnie ze zdań jednostkowych $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_n$. Np. zdanie: „Każda róża ma kolce" jest indukcyjnym uogólnieniem zdań: „Ta oto róża ma kolce", „Tamta róża ma kolce" itd.

Zob. też **indukcja enumeracyjna.**

M. P.

uzasadnianie. Uzasadnić jakieś zdanie, ewentualnie uzasadnić uznanie jakiegoś zdania za zdanie prawdziwe, to tyle, co wykazać, że zostały spełnione warunki wystarczające do uznania tego zdania za prawdziwe.

Rodzaje uzasadnień. Warunkiem wystarczającym do uznania jakiegoś zdania za prawdziwe jest:

1° dokonanie odpowiednich spostrzeżeń, bądź

2° odwołanie się do odpowiednich konwencji terminologicznych, bądź

3° odwołanie się do intuicji, bądź

4° odwołanie się do pewnych zdań już uznanych za prawdziwe.

Pierwszy z wymienionych sposób uzasadniania ma zastosowanie w odniesieniu do *zdań obserwacyjnych. Aby uzasadnić np. zdanie: „Ten kwiat (który teraz widzę) jest pachnący", trzeba powąchać ten kwiat.

Drugi sposób, przez odwołanie się do konwencji terminologicznych, dotyczy uzasadniania *zdań analitycznych. Dla uzasadnienia np. zdania: „Metr ma sto centymetrów" wystarczy uprzytomnić sobie, że w drodze powszechnie przyjętej umowy ustalono, że metr = 100 centymetrów.

Trzeci sposób uzasadniania, przez odwołanie się do intuicji, jest bardzo dyskusyjny. Zwolennicy tego rodzaju uzasadniania widzą jego zastosowanie przy uzasadnianiu tzw. *zdań syntetycznych *a priori.

Cechą charakterystyczną omówionych wyżej sposobów uzasadniania jest to, że nie ma w nich powoływania się na inne zdania, wcześniej uznane. W tego rodzaju uzasadnianiu nie ma więc postępowania zwanego rozumowaniem (w sensie, w jakim używa się tego terminu w *klasyfikacji rozumowań). Takie uzasadnianie nazywa się uzasadnianiem bezpośrednim, w przeciwstawieniu do uzasadniania pośredniego, wymienionego wyżej w punkcie 4.

Stwierdzenie, że jakieś zdanie jest uzasadnione pośrednio, znaczy, że przeprowadzone zostało takie rozumowanie, w wyniku którego zdanie to zostało wywnioskowane z innych zdań już uznanych za prawdziwe. Uzasadnianie pośrednie ma zawsze postać jakiegoś rozumowania: *wnioskowania lub *dowodzenia, lub *sprawdzania etc. Każde uzasadnianie pośrednie jest więc rozumowaniem, ale nie odwrotnie. Wyjaśnianie np. nie jest uzasadnianiem. Podobnie rozumowania pełniące rolę heurystyczną nie służą do uzasadniania, ale do naprowadzania na pewną myśl.

Uzasadnianie pośrednie można określać jako operację na zdaniach: uzasadnia się jakieś zdanie przez odwołanie się do innych zdań, Można też jednak mówić o uzasadnianiu decyzji polegającej na uznaniu jakiegoś zdania za prawdziwe; lub, ogólniej, o uzasadnianiu postawy wobec zdania. W takim przypadku teoria uzasadniania może być ujmowana w terminach teorii decyzji.

K. Ajdukiewicz: *Zagadnienie uzasadniania* [W:] *JiP*. T. 2; – – *Subiektywność i niepowtarzalność metody bezpośredniego doświadczenia*. [W:] *JiP*. T. 2; – – (red.) *The foundation of statements and decisions*. 1955; A. Grzegorczyk: *Uzasadnienie aksjomatów teorii matematycznych*. „St. Log." XIII 1962; R. Ingarden: *Bemerkungen zum Problem der Begründung*. „St. Log." XIII 1962; M. Kokoszyńska: *O dwojakim rozumieniu uzasadniania*

dedukcyjnego. „St. Log." XIII 1962; M. Przełęcki: *W sprawie uzasadniania zdań spostrzeżeniowych*. „St. Log." XIII 1962; K. Szaniawski: *Pragmatyczne uzasadnienie zawodnych sposobów wnioskowania*. „St. Log." XIII 1962.

M. P.

uznawanie. Jedna z relacji pragmatycznych polegających na zajęciu postawy wobec jakiegoś zdania lub sądu. Pojęcie uznawania jest stosunkowo dobrze określone w przypadku postawy, jaką zajmuje się wobec zdań w języku systemu dedukcyjnego: uznaje się te zdania, które pisze się jako tezy systemu, tj. zaopatrując je znakiem *asercji lub innym symbolem o podobnej roli. O tym, jakie zdanie powinno być uznane, decydują w takim języku reguły uznawania, na które składają się reguły aksjomatyczne (określające, jakie zdania są *aksjomatami danego języka, czyli twierdzeniami uznawanymi bezwarunkowo) i *reguły dedukcyjne (określające, jakim przekształceniom wolno poddać uznane wyrażenia, by znowu z nich otrzymać wyrażenia, które powinny zostać uznane).

W językach teorii empirycznych warunki uznawania określone są przez dwa jeszcze inne rodzaje reguł (nie zawsze wyraźnie formułowanych): reguły uznawania zdań spostrzeżeniowych (należą tu m. in. wskazówki dotyczące różnych technik obserwacji) oraz reguły uznawania nie-spostrzeżeniowych *zdań empirycznych, należące do *metodologii nauk empirycznych.

Eksplikacja pojęcia uznawania poprzez sformułowanie reguł uznawania stanowi *definicję cząstkową tego pojęcia, wg schematu: Ten uznaje zdanie *Z*, kto postępuje wedle reguły nakazującej – pod takimi to a takimi warunkami – wpisać zdanie *Z* na listę tez danego języka.

Tego rodzaju eksplikacja nie nadaje się jednak dla tych języków, w których brak jest zdefiniowanego pojęcia tezy i brak wyraźnie sformułowanych reguł uznawania. Analiza pojęcia uznawania dokonuje się wówczas na innej drodze: bada się własności logiczne takich wyrażeń, jak „x uznaje p" lub bliskich znaczeniowo, np. „x wierzy, że p". Do rozważań tego typu należy problematyka kontekstów intensjonalnych (*Intensjonalność). Istnieją próby systematycznej charakterystyki tego rodzaju pojęć na gruncie formalnej pragmatyki (Martin) lub *logiki epistemicznej (Hintikka).

K. Ajdukiewicz: *Język i znaczenie*. [W:] *JiP*. T. I; J. Hintikka: *Knowledge and belief*. 1962; W. Marciszewski: *Podstawy logicznej teorii przekonań*. 1972; R. Martin: *Toward a systematic pragmatics*. 1959; N. Rescher: *Topics in philosophical logic*. 1968.

W. M.

W

wartościowanie. Ciąg przedmiotów z pewnej *dziedziny przyporządkowany zmiennym rozważanego języka. Inaczej: ciąg *wartości (symboli) zmiennych. Jeśli dziedziną jest np. zbiór liczb naturalnych, to zmiennym indywiduowym języka arytmetyki (liczb naturalnych) przyporządkowany jest, jako wartościowanie, ciąg liczb naturalnych.

Beth: *Foundations*; Grzegorczyk: *Log. mat.*

W. M.

wartość logiczna. *Wartość zmiennej, będącej *zmienną zdaniową. W *klasycznym rachunku zdań wartościami logicznymi są prawdziwość i fałszywość zdania, oznaczane, odpowiednio, symbolami „1" i „0" lub „V" i „F". W *logikach wielowartościowych przyjmuje się inne jeszcze wartości logiczne.

W. M.

wartość zmiennej. Wartościami *zmiennych zdaniowych są prawdziwość i fałszywość, ewentualnie inne jeszcze tzw. wartości logiczne. Wartościami *zmiennych indywiduowych są *indywidua należące do dziedziny języka, w którym występują owe zmienne. Wartościami zmiennych predykatowych są klasy indywiduów, klasy klas indywiduów, itd. (w zależności od typu danej zmiennej). Pojęcie zmiennej jest więc zawsze wystarczająco określone na gruncie odpowiedniego *języka sformalizowanego. Trudno natomiast podać ogólne pojęcie zmiennej, uwzględniające całe bogactwo możliwych języków; pozostaje wówczas poprzestać na sformułowaniach w rodzaju tego, że zmienna odnosi się w sposób nieokreślony (ang. ambigously denotes) do dowolnego przedmiotu z pewnej klasy.

Carnap: *Symb. log.*; Quine: *ML.*

W. M.

weryfikacja. Postępowanie prowadzące do rozstrzygnięcia czy jakieś zdanie jest prawdziwe. Weryfikacja empiryczna – postępowanie rozstrzygające czy jakieś zdanie jest prawdziwym *zdaniem empirycznym.

W. M.

Whitehead Alfred North (1861–1947; Anglia). Studiował w Trinity College w Cambridge. Wykładowca matematyki w Trinity College w Cambridge i w Uniw. College w Londynie (1914–1924); profesor matematyki Imperial College of Science of Technology w Londynie i profesor filozofii w Harvard Univ. (1924–1938). Współautor (z B. Russellem) podstawowego dla rozwoju logiki dzieła pt. *Principia mathematica*. Whitehead był także wybitnym filozofem, który podjął próbę zbudowania systemu metafizyki obejmującego naukową kosmologię.

W. M.

wieloznaczność. *Wyrażenie, w sensie typu wyrażeniowego, jest wieloznaczne w języku *J*, gdy stanowi klasę równokształtnych wyrażeń egzemplarzy zawierającą co najmniej dwa podzbiory *X*, *Y* takie, że elementy zbioru *X* różnią się znaczeniem (w *J*) od elementów zbioru *Y*. Gdy zaś przypisuje się wieloznaczność jakiemuś konkretnemu egzemplarzowi wyrażenia, ma się na myśli to, że nie wiadomo, do którego z takich podzbiorów zaliczyć dany egzemplarz.

Mówiąc bardziej swobodnie: wyrażenie-typ jest wieloznaczne, gdy w różnych kontekstach jest używane w rozmaitych znaczeniach, np. „prawo" jako prawidłowość przyrodnicza lub jako twierdzenie o takiej prawidłowości sformułowane w języku nauki; jako zbiór ustaw lub pojedyncza ustawa. Wystarczającym warunkiem wieloznaczności jest różność *denotacji (zakresów) przyporządkowanych różnym egzemplarzom jakiegoś wyrażenia-typu (tzw. wieloznaczność zakresowa). Nie jest to jednak warunek konieczny; bywa, że dwa różnokształtne egzemplarze nie różnią się pod względem denotacji, a różnią się tylko pod względem znaczenia (tzw. wieloznaczność treściowa). Przykładem może być termin *nazwa abstrakcyjna" w sensie (1) i w sensie (2).

Jako odmiany wieloznaczności wylicza się: *wyrażenia okazjonalne; *amfibolie, wyrażenia nie mające wyraźnie określonej *supozycji, tj. dające się rozumieć bądź w supozycji zwykłej, bądź materialnej, bądź jeszcze innej; quaternio terminorum (łac.), tj. dwuznaczność terminu średniego w sylogizmie.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; S. Kamiński: *Próba klasyfikacji błędów wysłowienia myśli*. „St. Log." IX 1960; S. Łuszczewska-Rohmanowa: *Wieloznaczność a język nauki*. [W:] *Sem. pol.*; A. Malewski: *ABC poprawnego myślenia*. 1958; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

Wittgenstein Ludwig (1889–1951). Ur. w Wiedniu. Studiował zrazu w szkołach technicznych w Niemczech i w Anglii, porzucił jednak studia techniczne na rzecz czystej matematyki i filozofii matematyki, oddając się tym przedmiotom pod kierunkiem B. Russella w Cambridge w l. 1912–1913. Od 1929 był wykładowcą, a od 1939 profesorem filozofii w Cambridge. W 1922 ukazało się dzieło o wielkiej doniosłości dla filozofii logiki (napisane w latach służby na frontach I wojny światowej) – *Tractatus logico-*

-*philosophicus*; wywarło ono wpływ w szczególności na rozwój neopozytywizmu. Jako przykłady pojęć inspirowanych przez *Traktat* można wymienić pojęcie *zdania atomowego i *zdania molekularnego (oba związane u Wittgesteina z ontologiczną koncepcją tzw. logicznego atomizmu), a przede wszystkim pojęcie *tautologii. W późniejszych latach Wittgenstein odszedł radykalnie od idei *Traktatu*. Swym nowym pomysłom dawał wyraz w dziennikach filozoficznych, które wydano dopiero pośmiertnie pt. *Philosophical investigations* 1953.

W. M.

wnioskowanie. W literaturze logicznej występują dwa pojęcia wnioskowania: węższe, pochodzące od Łukasiewicza i szersze, pochodzące od Ajdukiewicza.

(1) Wnioskowanie w węższym rozumieniu jest to dobieranie następstw dla zdań pewnych, tj. już uznanych za prawdziwe. Przykład: Jeżeli dostanę bilety, to pójdziemy do teatru (a). Dostanę bilety (b). A więc: pójdziemy do teatru (c).

Zdania (a) i (b) stanowiące punkt wyjścia we wnioskowaniu nazywają się przesłankami, a zdanie (c), będące punktem dojścia, nazywa się wnioskiem (konkluzją) tego wnioskowania. Wniosek wynika logicznie (*Wynikanie logiczne) z przesłanek, tzn. przesłanki stanowią rację logiczną dla wniosku, a wniosek jest następstwem logicznym przesłanek. Znaczy to, że wnioskowanie przebiega według jakiegoś prawa logicznego. W podanym wyżej przykładzie wnioskowanie przebiega według prawa logiki zdań: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$.

Prawo logiczne, według którego przebiega jakieś wnioskowanie, bywa nazywane również zasadą tego wnioskowania. O wnioskowaniu mówi się również, że przebiega ono według jakiegoś niezawodnego *schematu wnioskowania. Takim schematem dla rozważanego przykładu jest formuła:

$$\frac{p \rightarrow q \qquad p}{\text{Zatem } q.}$$

Dzięki temu, że wniosek wynika logicznie z przesłanek, prawdziwość wniosku jest zagwarantowana przez prawdziwość przesłanek.

(2) Wnioskowanie w szerszym rozumieniu jest to proces myślowy, w którym na podstawie zdań już uznanych (za prawdziwe) dochodzi się bądź do nowego zdania dotąd nie uznanego, bądź do wzmocnienia pewności innego zdania w jakimś stopniu już uznanego.

Zdania już uznane, będące punktem wyjścia przy wnioskowaniu, nazywają się przesłankami, a zdanie będące punktem dojścia – wnioskiem (konkluzją) tego wnioskowania.

Ze względu na to, czy między przesłankami a wnioskiem zachodzi stosunek wynikania logicznego, czy nie zachodzi, wnioskowanie jest dedukcyjne lub niededukcyjne.

Wnioskowanie jest dedukcyjne, gdy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Ta odmiana wnioskowania utożsamia się z wnioskowaniem w węższym rozumieniu.

Wnioskowanie jest niededukcyjne (uprawdopodobniające), gdy wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. W takim wnioskowaniu prawdziwość przesłanek nie gwarantuje prawdziwości wniosku. Wnioskowanie niededukcyjne ma szereg odmian. Najważniejsze z nich to: *indukcja enumeracyjna niezupełna, wnioskowanie redukcyjne, *wnioskowanie przez analogię, *wnioskowanie statystyczne.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1959; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*; J. Łukasiewicz: *O nauce.* [W:] *Poradnik dla samouków.* T. 1. 1915; – – *Elementy logiki matematycznej.* 1958.

M. P.

wnioskowanie bezpośrednie (vs wnioskowanie pośrednie). Rozumowanie, w którym na podstawie tylko jednego uznanego już zdania (przesłanka) uznaje się inne zdanie (wniosek). Jest to operacja na zdaniach kategorycznych, przebiegająca według któregoś z praw logiki tradycyjnej. Przykłady:

a. nieprawda, że wszystkie łabędzie są białe. Zatem: niektóre łabędzie nie są białe [$\sim (SaP) \rightarrow SoP$];

b. każdy kwadrat jest równoległobokiem. Zatem: niektóre równoległoboki są kwadratami ($SaP \rightarrow PiS$);

c. niektóre grzyby nie są jadalne. Zatem: niektóre grzyby są niejadalne ($SoP \rightarrow SiP'$);

d. każdy szlachetny człowiek jest prawdomównym człowiekiem. Zatem: każdy nieprawdomówny człowiek jest nieszlachetnym człowiekiem ($SaP \rightarrow P'aS'$);

e. każdy wróbel jest ptakiem. Zatem: pewne nie-wróble nie są ptakami ($SaP \rightarrow S'oP$).

Wymienione przykłady reprezentują poszczególne odmiany wnioskowania bezpośredniego, mianowicie: a. – wnioskowanie według jednego z praw *kwadratu logicznego, b – *konwersję, c – *obwersję, d – *kontrapozycję, e – *inwersję.

Prawa wnioskowania bezpośredniego nie dopuszczają podstawiania za zmienne *nazw pustych i powszechnych (*orzeczników uniwersalnych). Jedne z nich tracą ważność przy tzw. słabym rozumieniu *zdań ogólnych, inne zaś przy tzw. mocnym rozumieniu zdań ogólnych, tj. takim, przy którym zakłada się niepustość podmiotu.

Zob. też **kwadrat logiczny.**

K. Ajdukiewicz: *Założenia logiki tradycyjnej.* [W:] – – *JiP.* T. 1; S. Kamiński: *Tradycyjna teoria wnioskowania bezpośredniego jako pewien fragment dwuwartościowego rachunku zdań.* „St. log." XI 1961; Kotarbiński: *Elementy*; – – *Kurs logiki*; Z. Kraszewski: *Logika stosunków zakresowych.* „St. log." 1956; J. Śleszyński: *Teoria dowodu.* T. 1. 1925; Ziembiński: *Log. prakt.*

M. P.

wnioskowanie pośrednie. W logice tradycyjnej wnioskowaniem pośrednim nazywano wnioskowanie z dwóch przesłanek, czyli wnioskowanie sylogistyczne.
Zob. też **sylogistyka zdań asertorycznych.**

M. P.

wnioskowanie przez analogię.
(1) Przesłanki stwierdzają, że każdy z kolejno napotkanych przedmiotów pewnego rodzaju ma pewną własność. Wniosek stwierdza, że i następny napotkany przedmiot tego rodzaju też będzie posiadał tę własność. Np. ocenialiśmy jako interesujące poszczególne filmy Bergmana, które oglądaliśmy. Na tej podstawie przypuszczamy, że i następny film Bergmana, który zobaczymy, też będzie interesujący. Wnioskowanie to nie jest niezawodne, gdyż wniosek nie wynika logicznie z przesłanek (również i przesłanki nie wynikają logicznie z wniosku). Stopień prawdopodobieństwa wniosku zależy od tego, czy własność, o której się mówi, jest podstawową, „ważną" dla rozważanych przedmiotów, czy raczej drugorzędną, oraz od tego, czy wiele przedmiotów danego rodzaju zbadano.
(2) Na podstawie przesłanek stwierdzających, że przedmiot X jest pod względem szeregu cech podobny do przedmiotu Y, dochodzi się do wniosku stwierdzającego, że przedmiot X jest podobny do przedmiotu Y pod względem innej jeszcze cechy. Wiemy, np., że znany nam dziennikarz (X) jest człowiekiem inteligentnym, o wszechstronnych zainteresowaniach, znającym języki: angielski, niemiecki i francuski. Poznaliśmy drugiego dziennikarza (Y), również człowieka inteligentnego, o wszechstronnych zainteresowaniach. Stwierdziliśmy, że zna on języki: angielski i niemiecki. Przypuszczamy, że zna on również język francuski. Wnioskowanie to jest, jak poprzednie, tylko uprawdopodobniające. Nie zachodzi tu wynikanie w żadnym kierunku. Prawdopodobieństwo wniosku zależy od tego, czy pomiędzy rozważanymi cechami porównywanych przedmiotów zachodzi wewnętrzny związek, czy tylko zupełnie przypadkowy.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Zarys*; J. Dąbska: *Dwa studia z teorii naukowego poznania. O metodzie analogii.* 1962; – – *Kilka uwag o rozumowaniach na podstawie analogii* [W:] *Rozpr. log.*

M. P.

wnioskowanie statystyczne. Wnioskowania indukcyjne dają się najogólniej scharakteryzować jako wyprowadzanie wniosków ogólnych z twierdzeń szczegółowych (*Logika indukcji). Istnieje jednak wiele możliwości wzajemnych relacji między wyjściowymi zdaniami szczegółowymi i informacjami w nich zawartymi, a ogólnym wnioskiem, do którego dążymy; stąd też istnieją różne rodzaje wnioskowań indukcyjnych.
Wnioskowanie statystyczne, zwane też indukcją statystyczną, dotyczy sytuacji, gdy posiadamy informacje dotyczące pewnej cechy (np. wartości pewnego parametru) w odniesieniu do pewnego zespołu obiektów, które stanowią próbę badaną, chcemy zaś wyciągnąć wniosek dotyczący tej cechy w zespole znacznie większym, zwanym populacją, z której tę próbę pobrano. Dlatego też wnioskowanie statystyczne można uważać za odmianę *indukcji enumeracyjnej niezupełnej. Od tej ostatniej wnioskowanie statystyczne różni się przede wszystkim tym, że ma charakter probabilistyczny, a nie deterministyczny, stwierdza więc, że „jest tak i tak z danym *prawdopodobieństwem".
Wnioskowanie statystyczne dotyczy najczęściej rozkładu pewnej cechy w populacji lub wartości pewnego parametru w tej populacji. Parametrem statystycznym nazywamy pewną liczbę charakteryzującą określoną cechę zespołu obiektów. Parametrem jest więc np. wartość przeciętna (średnia arytmetyczna) charakteryzująca punkt, wokół którego grupują się wartości liczbowe pewnej cechy, lub też wariancja charakteryzująca rozrzut wartości liczbowych tej cechy wokół wartości przeciętnej. Po przebadaniu pobranej próby możemy obliczyć wartość danego parametru w próbie. W procesie indukcji wartość ta stanowi ową informację szczegółową, od której chcemy przejść do wniosku ogólnego. Tym ostatnim ma być zdanie określające wartość analogicznego parametru w populacji.
W zależności od postaci wniosku ogólnego rozróżniamy następujące odmiany wnioskowania statystycznego:
1. Estymację (szacowanie) wartości parametrów:
1.1. estymację punktową,
1.2. estymację przedziałową.
2. Weryfikację hipotez statystycznych.
1. Estymacja wartości parametrów statystycznych.
1.1. Estymacja punktowa. Wniosek ogólny ma tu postać: „Przybliżeniem (o określonej jakości) wartości parametru w populacji jest liczba Q". Twórcami teorii estymacji punktowej są przede wszystkim C. S. Gauss, R. A. Fisher i J. Neyman. Dokonanie estymacji punktowej jest możliwe, gdy dysponujemy sposobem obliczenia liczby Q opierając się na liczbie q, będącej wartością analogicznego parametru w próbie, oraz gdy dysponujemy sposobem określenia jakości tego przybliżenia. Liczbę Q nazywamy estymatorem danego parametru w populacji.
Istnieją dwa sposoby obliczenia liczby Q opierając się na liczbie q.
Pierwszy sposób, to tzw. metoda momentów, według której należy uznać, że $Q = q$, czyli estymator parametru w populacji równy jest wartości analogicznego parametru w próbie. Jak się jednak okazało, estymatory uzyskane na tej zasadzie dość często nie spełniają warunków nakładanych na jakość przybliżenia.
Drugi sposób, to zasada największej wiarygodności wpro-

wadzona przez R. A. Fishera. Nakazuje ona przyjąć jako estymator parametru w populacji taką liczbę, przy której maksymalizuje się prawdopodobieństwo uzyskania w próbie takiej właśnie wartości parametru, jaką otrzymaliśmy w rzeczywistości, czyli q. Na podstawie tej ogólnej zasady można wyprowadzić wzory pozwalające obliczyć estymator wartości cechy w populacji, opierając się na wartości tej cechy w próbie. Czasami, jak np. w przypadku wartości przeciętnej lub proporcji, obie te metody prowadzą do identycznych wyników. Zasada największej wiarygodności też nie zawsze, chociaż częściej niż metoda momentów, prowadzi do rezultatów spełniających wszystkie warunki nakładane na estymator.

Istnieją różne aspekty jakości estymatora. Każda z podanych niżej własności charakteryzuje jeden z nich.

Zgodność. Estymator jest zgodny, jeśli ze wzrostem liczebności próby wartość jego jest stochastycznie zbieżna do wartości parametru w populacji, czyli prawdopodobieństwo istnienia między estymatorem a wartością w populacji dowolnie małej różnicy zmierza do zera.

Nieobciążoność. Estymator jest nieobciążony, gdy jego wartość przeciętna równa się wartości parametru w populacji. Wartość parametru z próby jest tzw. zmienną losową, co oznacza, że może ona przyjmować z na ogół różnymi prawdopodobieństwami na ogół różne wartości zależnie od tego, które elementy wejdą do próby. Istnieje więc cały przedział liczb, które można otrzymać jako wartość parametru z próby. Przy jakiejkolwiek metodzie przekształcania wartości parametru z próby w estymator wartości parametru w populacji, ten ostatni będzie więc również zmienną losową, posiadającą swoją wartość przeciętną. Gdy estymator jest nieobciążony, to jego wartość przeciętna równa jest wartości parametru w populacji, chociaż w określonym pojedynczym przypadku może oczywiście od tej wartości odbiegać. Istnieją estymatory (mało w praktyce używane) nie posiadające w ogóle wartości przeciętnej. W tym wypadku nie można ocenić nieobciążoności.

Nieobciążoność asymptotyczna polega na tym, że ze wzrostem liczebności próby wartość przeciętna estymatora jest stochastycznie zbieżna do wartości parametru w populacji.

Dostateczność estymatora polega na tym, że żaden inny estymator nie może już, na podstawie danych uzyskanych z próby, dostarczyć więcej informacji o wartości parametru w populacji.

Efektywność estymatora mierzymy jego wariancją. Estymator jest najefektywniejszy, jeśli jest nieobciążony i posiada najmniejszą możliwą wariancję. Istnieją sposoby (tzw. nierówność Rao-Cramera) pozwalające obliczyć minimalną wariancję estymatora danego parametru. Jeśli wariancja danego estymatora jest większa od tej wariancji minimalnej, efektywność tego estymatora mierzymy stosunkiem wariancji minimalnej do jego własnej wariancji. Efektywność asymptotyczna estymatora to liczba, do której jest zbieżna efektywność danego estymatora przy wzroście liczebności próby.

1.2. Estymacja przedziałowa. Twórcą tej metody jest J. Neyman. Wniosek ogólny ma tu postać: „z prawdopodobieństwem α wartość parametru w populacji leży w danym przedziale". Z reguły staramy się przy tym, by był to przedział możliwie najkrótszy, chociaż istnieją też metody konstruowania przedziału o długości z góry danej. Sposoby obliczania przedziału, w którym z danym prawdopodobieństwem znajduje się wartość parametru w populacji, czyli tzw. przedziału ufności, są różne dla różnych parametrów; zawsze też przedział jest tym krótszy, im większa jest liczebność próby.

2. Weryfikacja hipotez statystycznych. W tym wypadku wniosek ogólny ma następującą zasadniczą postać: „Szacowany parametr nie ma wartości Q, przy czym prawdopodobieństwo błędności tego stwierdzenia wynosi α". Wszystkie inne postaci wniosku końcowego są pochodne w stosunku do tej.

Przypuśćmy, że obliczenie wartości pewnego parametru w populacji według pewnej teorii daje nam wartość Q, natomiast w wyniku zbadania wylosowanej próby otrzymujemy jako wartość analogicznego parametru w próbie liczbę q. Skłonni jesteśmy przypisać te rozbieżność wahaniom próby, czyli faktowi, że wartość parametru z próby jest zmienną losową. Stawiamy więc hipotezę (jest to tzw. hipoteza zerowa), że wartość parametru w populacji wynosi Q. Im większa jest różnica między liczbami Q i q, tym mniej prawdopodobne jest, że hipoteza zerowa jest słuszna, a wartość parametru z próby wynosi q na skutek wahań próby. W teorii Neymana-Pearsona przyjmuje się, że jeśli prawdopodobieństwo otrzymania wartości q parametru z próby lub wartości jeszcze bardziej odległej od Q jest — przy założeniu słuszności hipotezy zerowej — mniejsze od pewnej z góry ustalonej liczby α, zwanej poziomem istotności, to hipotezę zerową odrzucamy. Wartość poziomu istotności ustala się arbitralnie (zwykle 0,01 i 0,05). Zamiast hipotezy zerowej można po jej odrzuceniu przyjąć tzw. hipotezę alternatywną, zgodnie z którą wartość parametru w populacji wynosi Q_1, przy czym różnica $|Q_1 - q|$ jest mniejsza od różnicy $|Q - q|$.

W ten sposób można weryfikować hipotezy dotyczące różnego rodzaju parametrów, np. wartości przeciętnej, wariancji, proporcji, różnicy między średnimi (odrzucenie hipotezy, że różnica ta równa jest zeru, oznacza, że między dwiema populacjami, z których pobrano próby, zachodzi istotna różnica). Można też weryfikować hipotezę, że cecha w populacji ma określony rozkład (np. rozkład normalny) lub też, że rozkłady danej cechy w obu populacjach są takie same (przy czym nie precyzuje się ich kształ-

tu). Możliwa jest weryfikacja hipotezy o niezależności dwóch zmiennych losowych.

Z procedury weryfikacyjnej wynika więc, że każdorazowo liczymy się z tym, że istnieje prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa. Jest to tzw. błąd pierwszego rodzaju. Błąd drugiego rodzaju polega na nieodrzuceniu hipotezy zerowej, gdy jest ona fałszywa. Pojęcie błędu ma jednak w obu tych wypadkach nieco inne znaczenie. Błąd pierwszego rodzaju jest podjęciem fałszywej decyzji. Natomiast błąd drugiego rodzaju – nieodrzucenie hipotezy fałszywej – jest tylko stwierdzeniem: „Opierając się na dostarczonych danych nie można definitywnie orzec, że wartość parametru w populacji jest różna od Q (tj. nie można odrzucić hipotezy zerowej), chociaż nie znaczy to wcale, że jest ona na pewno równa Q".

Konsekwencje obu tych błędów mogą być różne w zależności od problemu i treści decyzji. Zależnie od sytuacji może nam bardziej zależeć na zmniejszeniu prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju (przy czym automatycznie rośnie prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju), lub na zmniejszeniu prawdopodobieństwa błędu drugiego rodzaju (przy czym automatycznie rośnie prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju). Przykładem tej pierwszej sytuacji jest np. orzekanie o gruźlicy na podstawie zdjęcia rentgenowskiego, kiedy to przede wszystkim chodzi nam o to, by o żadnym chorym pacjencie nie powiedzieć, że jest zdrowy, natomiast możemy sobie pozwolić na wysokie prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, gdyż błąd ten wiąże się tylko z niepotrzebnym kilkakrotnym robieniem zdjęć ludziom zdrowym. Z drugą z tych sytuacji mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie istnieje kilka alternatywnych hipotez, których weryfikowanie nie łączy się ze zbyt wielkimi kosztami, zależy nam natomiast przede wszystkim na tym, by ostateczny wniosek był możliwie najbliższy stanu rzeczywistego.

Problematykę konsekwencji błędnych decyzji podejmuje decyzyjne ujęcie wnioskowania statystycznego (J. V. Neumann i O. Morgenstern, B. de Finetti, F. P. Ramsey, I. R. Savage). Wprowadza ono pojęcie użyteczności danej reguły decyzyjnej.

Przypuśćmy, że możliwe są dwa stany rzeczywiste – np. s_1: pacjent jest chory na gruźlicę, s_2: pacjent jest zdrowy – oraz dwie decyzje – A_1: uznanie pacjenta za chorego, A_2: uznanie pacjenta za zdrowego. Decyzję opieramy na wyniku pewnego eksperymentu (np. prześwietlenia) według określonej reguły postępowania D_i, czyli tzw. reguły decyzyjnej. W tej sytuacji można przyporządkować użyteczności poszczególnym regułom decyzyjnym; zakładamy przy tym, że zarówno straty, jak i zyski płynące z poszczególnych błędów lub prawidłowych decyzji dają się wyrazić liczbowo. Niech użyteczność decyzji A_1, gdy słuszne jest s_1, wynosi u_{11}, zaś użyteczność decyzji A_2, gdy słuszne jest s_1, wynosi u_{21}. Użyteczność reguły decyzyjnej określa się jako wartość oczekiwaną obu tych użyteczności (przy czym prawdopodobieństwa uzyskania każdej z nich są prawdopodobieństwami podjęcia odpowiednich decyzji i określone są przez daną regułę decyzyjną D_i). Gdy słuszne jest s_2, użyteczności tych samych decyzji będą więc inne, natomiast ich prawdopodobieństwa pozostają te same, gdyż ta sama jest reguła decyzyjna. Tym samym inna będzie użyteczność reguły decyzyjnej D_i. W ten sposób sprowadzamy problem do wyboru jednej z wielu reguł decyzyjnych, przy czym każdej z nich odpowiadają dwie różne użyteczności, zależnie od tego czy słuszne jest s_1, czy s_2. Jest to tzw. podejmowanie decyzji w warunkach niepewności, którego charakterystyczną cechą jest brak informacji co do prawdopodobieństwa słuszności alternatywnych stanów rzeczywistych (tzw. stany świata) s_1 i s_2. Oczywiście rozumowanie to można uogólnić na n możliwych stanów rzeczywistych i każdej regule decyzyjnej D_i odpowiadać będzie wówczas zbiór n użyteczności. Istnieje cały szereg kryteriów podejmowania decyzji w warunkach niepewności (kryterium maksyminowe, kryterium minimaksowego ryzyka, kryterium Hurwicza, kryterium braku dostatecznej racji).

Początki teorii decyzji stworzyli Steinhaus, v. Neumann, Morgenstern, de Finetti i Ramsey. Zastosowanie jej do wnioskowania statystycznego jest głównie dziełem Neymana i Walda. Badacze ci uważają też, że opisana powyżej procedura prowadzi raczej do konkretnych działań niż do uzyskiwania wniosków, a prócz tego dowolność wyboru wielkości błędu pierwszego rodzaju α wprowadza do niej element zależności od „aktów woli". Z tych też powodów uważają oni za właściwszą nazwę „zachowanie indukcyjne" (ang. inductive behavior) niż „wnioskowanie indukcyjne" (ang. inductive inference). Natomiast Fisher odrzuca tę teorię twierdząc, że przyporządkowanie użyteczności decyzjom zakłada znajomość celów, do jakich wniosek miałby być zastosowany i możliwość liczbowego przedstawienia wartości tych celów, co nie zgadza się z samą istotą nauki poszukującej wniosków przede wszystkim prawdziwych, a dopiero potem użytecznych.

Kierunek Bayesowski. Wzór Bayesa, wyprowadzony przez T. Bayesa w 1763 r., stosowany był do celów wnioskowania statystycznego aż do chwili opracowania przedstawionych wyżej „klasycznych" metod statystycznych: estymacji punktowej, estymacji przedziałowej i metod weryfikacji hipotez statystycznych. Jest to tzw. wzór na prawdopodobieństwo a posteriori. Niech danych będzie n urn, a w każdej z nich pewne ilości kul białych i czarnych. Losujemy najpierw urnę, z której odbywa się ciągnienie, a następnie wyciągamy jedną kulę z wylosowanej urny. Wzór na prawdopodobieństwo a posteriori podaje prawdopodobieństwo, że kula została wylosowana z urny k-tej, jeśli jest ona danego koloru (np. biała). Jest to więc

*prawdopodobieństwo warunkowe. Do obliczenia go konieczna jest znajomość tzw. rozkładu a priori, czyli prawdopodobieństwa (dla każdej urny), że losowanie kuli odbywać się będzie z tej właśnie urny. Schemat ten daje się przełożyć na język wnioskowania statystycznego. Prawdopodobieństwo warunkowe, że losowanie odbywało się z urny k-tej, jeśli kula jest biała, odpowiada prawdopodobieństwu, że słuszna jest hipoteza H_i, jeśli w wyniku badania próby otrzymano dane D_i. Znalezienie tego prawdopodobieństwa wymaga zatem znajomości rozkładu a priori dla wszystkich możliwych hipotez H_i. Przy wnioskowaniu statystycznym rozkład ten jest jednak z reguły nieznany. Problem ten rozwiązywano, przyjmując tzw. postulat Bayesa, zgodnie z którym rozkład a priori należy założyć w ten sposób, by streszczał on całą dotychczasową wiedzę o weryfikowanej hipotezie, a jednocześnie by nie uprzywilejowywał bezzasadnie żadnej z możliwych wartości parametru w populacji kosztem innych możliwych wartości. Tak np., gdy wnioskowanie dotyczy wartości proporcji, rozkład a priori będzie rozkładem jednostajnym większym od zera w przedziale (0, 1) i równym zeru poza tym przedziałem.

Taki sposób zakładania rozkładu a priori budził jednak wiele zastrzeżeń; kontrowersyjne wydawało się też traktowanie wartości parametru w populacji jako zmiennej losowej, gdyż jest ona przecież wartością ściśle określoną, chociaż nieznaną. Dlatego klasyczne metody wnioskowania statystycznego wyparły na pewien czas podejście bayesowskie. Ostatnio jednak zainteresowanie tym kierunkiem przeżywa swój renesans. W nowszych podejściach wykorzystuje się teorię prawdopodobieństwa subiektywnego (Ramsey, Savage, de Finetti). Prawdopodobieństwo słuszności danej hipotezy traktuje się jako prawdopodobieństwo subiektywne. Zwolennicy tego kierunku podkreślają, że metody klasyczne weryfikacji hipotez pozwalają tylko na ich odrzucanie, podczas gdy wzór Bayesa pozwala również na przyjmowanie hipotez. Często też stosowanie obu tych podejść prowadzi do odmiennych rezultatów końcowych. Badania nad zastosowaniem wzoru Bayesa wydają się obecnie dalekie od zakończenia.

T. Bayes: *Essays towards solving a problem in the doctrine of chances*. „Biometrica" XLV 1958; W. Edwards, H. Lindon, L. J. Savage: *Bayesian statistical inference for psychological research*. [W:] *Readings in mathematical psychology*. T. 2; 1965; B. de Finetti: *La prévision ses lois logiques, ses sources subjectives*. „Ann. de l'Inst. Henri Poincaré". VII 1937; R. A. Fisher: *Statistical methods and scientific inference*. 1956; J. Neyman: *„Inductive behavior" as a basic concept of philosophy of science*. „Rev. of Math. Statistics Inst." XXV 1957; F. P. Ramsey: *Truth and probability* i *Further considerations*. [W:] – – *The foundations of mathematics and other essays*. 1931. A. Wald: *Statistical decision function*. 1950.

J. R. Barra: *Maitrise de mathématiques et applications fondamentals*. 1971 (przekł. ros., w przygot. przekł. pol.); J. R. Benjamin; C. A. Cornell: *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. 1977; H. Cramér: *Metody matematyczne w statystyce*. 1958; R. Deutsch: *Teoria estymacji*. 1969; T. S. Ferguson: *Mathematical statistics. A. Decision theoretic approach*. 1967; E. L. Lehman: *Testowanie hipotez statystycznych*. 1968; J. Neyman: *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. 1969; S. D. Silvey: *Wnioskowanie statystyczne*. 1978; S. Zubrzycki: *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej* 1966. Pozycje do A. Wald: *Statistical...* stanowią literaturę wykorzystaną w opracowaniu, pozycje następne – literaturę zalecaną.

M. T.

wynikanie. Termin „wynikanie" używany często bez określającej go bliżej przydawki ma jedno z następujących znaczeń.

(1) Wynikanie inferencyjne. Z formuł $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika inferencyjnie formuła φ_n (symbolicznie $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1} \vdash \varphi_n$), gdy formułę φ_n można uzyskać z formuł $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ przez jedno lub wielokrotne zastosowanie jednej lub wielu reguł wnioskowania (przy czym wolno skorzystać tylko ze skończonej ilości reguł i z każdej tylko skończoną ilość razy). W szczególnym przypadku, gdy formuły nie zawierają zmiennych wolnych, mówi się, że ze zdań $Z_1, ..., Z_{n-1}$ wynika inferencyjnie zdanie Z_n, gdy uzyskuje się je z tych zdań przez zastosowanie skończoną ilość razy reguł wnioskowania. Zob. też **dowód.**

(2) Wynikanie implikacyjne. Ze zdania Z_1 wynika implikacyjnie zdanie Z_2, gdy nieprawda, że: zdanie Z_1 jest prawdziwe, a zdanie Z_2 jest fałszywe. Ogólniej: ze zdań $Z_1, ..., Z_{n-1}$ wynika implikacyjnie zdanie Z_n, gdy nieprawda, że: zdania $Z_1, ..., Z_{n-1}$ są prawdziwe, a zdanie Z_n jest fałszywe. Zob. też **implikacja.**

(3) Wynikanie logiczne. Ze zdania Z_1 wynika logicznie zdanie Z_2, gdy implikacja, której poprzednikiem jest Z_1, a następnikiem Z_2, jest podstawieniem prawa logicznego, czyli formuły, która przy wszystkich podstawianiach przechodzi w zdanie prawdziwe. Np.: zdanie „Nieprawda, że pewien kwadrat nie jest prostokątem", wynika logicznie ze zdania „każdy kwadrat jest prostokątem", ponieważ implikacja, w której drugie z tych zdań jest poprzednikiem, a pierwsze następnikiem, jest podstawieniem prawa: $SaP \rightarrow \sim SoP$ (*Kwadrat logiczny). Ogólnie: ze zdań $Z_1, ..., Z_{n-1}$ wynika logicznie zdanie Z_n, gdy implikacja postaci $Z_1 \rightarrow \{... \rightarrow (Z_{n-1} \rightarrow Z_n)...\}$ jest podstawieniem prawa logicznego.

(4) Wynikanie semantyczne. Z formuł $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika semantycznie formuła φ_n, gdy dla żadnego modelu nie istnieje taka interpretacja, żeby formuły $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ były spełnione, a formuła φ_n nie była spełniona przy tej interpretacji w tym modelu (*Spełnianie).

Porównanie tych pojęć na gruncie węższego *rachunku kwantyfikatorów. Wynikanie inferencyjne dla formuł jest równoważne z wynikaniem semantycznym, tzn. jeśli z formuł $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika inferencyjnie formuła φ_n, to wynika ona z tych formuł semantycznie, i na odwrót. Tak jest, ponieważ z tego, iż z $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika inferencyjnie φ_n, wnosimy na mocy *twierdzenia o dedukcji, że formuła $\varphi_1 \rightarrow \{... \rightarrow (\varphi_{n-1} \rightarrow \varphi_n)\}$ jest twierdzeniem węższego rachunku kwantyfikatorów, jest więc prawdziwa w każdym

modelu przy każdej interpretacji, co znaczy, że w żadnym modelu nie ma interpretacji, która dawałaby dla formuł $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ prawdę, a dla formuły φ_n fałsz; innymi słowy z $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika semantycznie φ_n. Na odwrót, gdy $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika semantycznie φ_n, czyli gdy $\varphi_1 \to \{...\to(\varphi_{n-1}\to\varphi_n)...\}$ jest tautologią, z twierdzenia Gödla o pełności tego rachunku wnosimy, że $\varphi_1 \to \{...\to \to(\varphi_{n-1}\to\varphi_n)...\}$ jest twierdzeniem; stosując wielokrotnie regułę odrywania otrzymujemy, że z $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ wynika inferencyjnie φ_n. Pojęcie wynikania implikacyjnego dla zdań jest najszersze, zaś pojęcia wynikania inferencyjnego oraz logicznego są równoważne. Jeśli z formuły φ_1 wynika semantycznie formuła φ_2, a $Z_1 \to Z_2$ otrzymuje się jako przedstawienie z $\varphi_1 \to \varphi_2$, to z Z_1 wynika logicznie Z_2.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949. S. C. Kleene: *Introduction to metamathematics*. 1952; Słupecki, Borkowski: *Log. mat.*; Zinowjew: *Osnowy*.

K. Cz.

wyraz. Wyrażenie proste, tj. takie, że żadna jego część nie jest wyrażeniem.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949.

W. M.

wyrażanie. Jeden ze stosunków pragmatycznych, tj. zachodzących między znakiem językowym a jego nadawcą. Odróżnia się wyrażanie bezpośrednie i pośrednie. Zwrot językowy *W* wyraża bezpośrednio pewne przeżycie (myśl, chęć, uczucie itp.) osoby *X* wtedy, gdy został przez *X* ze zrozumieniem wypowiedziany. Ten sam zwrot *W* wyraża pośrednio takie samo przeżycie każdej innej osoby, która – gdyby zechciała je zakomunikować – mogłaby posłużyć się wypowiedzią *W*; dokładniej: pewnym egzemplarzem wyrażeniowym równokształtnym z *W* (zob. Kotarbiński).

Jeśli wyrażenie rozumie się tak szeroko, że przypisuje się tę funkcję nie tylko znakom językowym, lecz również gestom, mimice itp., trzeba wówczas odróżnić takie mimowolne wyrażanie od wyrażania za pomocą konwencjonalnych znaków językowych, skierowanego świadomie do jakiegoś adresata.

Niektórzy autorzy (Frege, Husserl i in.) pojmują wyrażanie nie jako stosunek znaku językowego do czyjegoś indywidualnego przeżycia, ale jako stosunek do określonego typu przeżyć. Nazwa wyraża wówczas *pojęcie w sensie logicznym, zaś zdanie wyraża *sąd w sensie logicznym.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Frege: *SuB*; Kotarbiński: *Elementy*.

W. M.

wyrażenie. Słowa „wyrażenie" używa się bądź w sensie wyrażenia-egzemplarza (ang. sign-token, sign-event), bądź w sensie wyrażenia-typu (ang. sign-design). Wyrażeniem-egzemplarzem jest wytworzony w określonym czasie i miejscu dźwięk, napis lub inne zjawisko fizyczne. Wyrażenie-typ to klasa wyrażeń-egzemplarzy o tym samym kształcie. Gdy ktoś mówi «Napisałeś brzydko 'Ala'», ma na myśli napis figurujący np. w określonym zeszycie i nigdzie poza tym, czyli wyrażenie-egzemplarz. Mówiąc zaś «„Ala" ma trzy litery», ma się na myśli wszystkie egzemplarze o takim kształcie, jak reprezentujący je napis umieszczony w cudzysłowie; jest to więc wyrażenie-typ.

W posługiwaniu się słowem „wyrażenie" da się dostrzec jeszcze inna dwoistość, odnosząca się zarówno do wyrażeń-typów, jak i wyrażeń-egzemplarzy. Czasem nazywa się wyrażeniami także elementy języka formalnego, pozbawione interpretacji semantycznej, innym razem wymaga się od wyrażeń, aby pełniły nadto funkcje semantyczne. W pierwszym przypadku na to, aby jakiś przedmiot był wyrażeniem, wystarczy, że znajduje się on w wykazie wyrażeń prostych (słowniku) danego języka lub że jest skonstruowany z prostszych wyrażeń zgodnie z odpowiednimi regułami składni. Wtedy jednak, gdy koncentruje się uwagę na językach naturalnych, przypisuje się miano wyrażeń tylko takim napisom (dźwiękom etc.), które oprócz tego, że spełniają warunki syntaktyczne, ponadto coś znaczą lub oznaczają, lub nazywają itp. Ta dwuznaczność słowa „wyrażenie" odpowiada wskazywanej przez Morrisa wieloznaczności słowa „język": 1° język jako zbiór znaków określony przez reguły syntaktyczne oraz 2° język jako zbiór znaków określony przez reguły syntaktyczne, a ponadto semantyczne. Jeszcze inne pojęcie języka powstaje wówczas, gdy do wymienionych wyżej dołączy się jeszcze warunki pragmatyczne. Zdaniem niektórych autorów dopiero te ostatnie czynią coś wyrażeniem, dopóki bowiem nie zostało ono użyte przez kogoś w określonej sytuacji, nie wiadomo nawet, jakie przypisywać mu funkcje syntaktyczne lub pragmatyczne. Ów ostatni pogląd reprezentowany jest m. in. w związku z dyskusją nad okazjonalnością (*Wyrażenie okazjonalne – (4)).

Powyższe rozróżnienia odnoszą się również do wszystkich pojęć powiązanych z pojęciem wyrażenia na zasadzie stosunku zawierania. W klasie wyrażeń zawiera się np. klasa nazw, wyróżnić więc trzeba nazwy-typy i nazwy-egzemplarze. Stosownie do drugiego podziału, będzie się wyróżniać nazwy w sensie syntaktycznym, semantycznym i, ewentualnie, pragmatycznym. To samo odnosi się do zdań i innych kategorii wyrażeń.

Morris: *Foundations*; Reichenbach: *Elements*.

W. M.

wyrażenie okazjonalne. Wyrażenie, które nie ma w danym języku stałego przyporządkowania do określonego przedmiotu, a zyskuje to przyporządkowanie tylko wtedy, gdy jest użyte w konkretnej sytuacji (okazji). Np. słowo „ja" odnosi się do tej osoby, która je wymawia, „teraz" odnosi

się za każdym użyciem do innego momentu czasowego. Słowami okazjonalnymi są zaimki i przysłówki, jak „ten", „tu", „wczoraj"; przymiotniki, jak „bliski", „dawny"; również czasowniki (z wyjątkiem formy bezokolicznika) z racji zawierania partykuł odnoszących się okazjonalnie do osób i czasu.

Słowa okazjonalne stanowią większość wyrażeń w językach naturalnych. Zdefiniowanie okazjonalności w semantyce mającej zastosowanie głównie do badania języków sztucznych, nasuwa różne trudności. Próby ich przezwyciężenia przyniosły w rezultacie kilka teorii wyrażeń okazjonalnych.

(1) Systematyczna zmienność znaczeniowa (Husserl). *W* jest wyrażeniem okazjonalnym (niem. okkasionelle Ausdruck) wtedy i tylko, gdy: 1° Występując poza kontekstem, *W* pozbawione jest znaczenia (niem. Bedeutung), a posiada tylko funkcję znaczeniową (niem. Bedeutungsfunktion), polegającą na tym, że istnieje reguła *R* określająca sposób użycia *W* stosownie do sytuacji; 2° Występując w kontekście, *W* posiada znaczenie, ale za każdym razem inne, zmieniające się w systematyczny (określony regułą *R*) sposób.

Nie określając bliżej, co rozumie przez funkcję znaczeniową, Husserl pozostawia pole do następującej interpretacji. Funkcja znaczeniowa słowa „dziś" określona jest regułą: Gdy mówisz „dziś", odnoś ten termin do dnia, w którym go wymawiasz; itp. Według Husserla, słowa okazjonalne nie dadzą wyeliminować się z języka. Nawet jeśli nie występują w takich językach, jak teorie naukowe, to musiały zostać poprzednio użyte w procesie wypracowywania słownika tych teorii.

(2) Zmienne indywiduowe języka naturalnego (Quine, Freudenthal). *W* jest wyrażeniem okazjonalnym języka naturalnego *J*, jeśli pełni w *J* taką rolę, jaką w sztucznych językach formalnych pełnią *zmienne indywiduowe.

Określenie to odnosi się do zaimków, takich jak „to", „tamto", „on" itp. Aby podciągnąć pod nie inne wyrażenia okazjonalne, trzeba je potraktować jako zwroty złożone z zaimka i jakiegoś innego wyrażenia, a więc zwroty funkcyjne (np. dzisiaj = ten dzień = dzień *y*). Określenie wyrażeń okazjonalnych przybrałoby wtedy postać: *W* jest okazjonalne, jeśli jest wyrażeniem języka naturalnego pełniącym rolę zmiennej lub wyrażeniem zawierającym tak pojętą zmienną.

Na rzecz traktowania zaimków jako zmiennych przemawiają następujące podobieństwa. I zmienna, i zaimek nie mają przyporządkowanych sobie *denotacji. Za zmienną podstawia się jej wartości, za zaimek podstawić można imię odpowiedniego przedmiotu. Wzory logiczne można wysłowić pisząc zamiast zmiennych zaimki, np. $\wedge x(x = x)$ można wysłowić: Cokolwiek by nie wziąć, zawsze: to = to. Jak zmienne wiązane są przez *operatory, tak zaimki wiązane są przez pewne elementy kontekstu sytuacyjnego (wyrażenie traci wówczas swą nieokreśloność i, podobnie jak w wyniku związania zmiennej, uzyskuje *wartość logiczną lub inny rodzaj denotacji). «Słowo „ja" jest zmienną wiązaną przez osobę (ang. bound to the person), która wymawia to słowo... Słowo „ty" jest zmienną wiązaną przez osobę, do której mówiący się zwraca. Słowo „teraz" jest zmienną wiązaną przez czas wygłoszenia» (Freudenthal).

Koncepcję zmiennej jako zaimka przypisuje Quine logikowi włoskiemu Peano (*Formulaire de mathématiques* 1897), od którego ją zapożyczył. Koncepcja zaimka jako zmiennej znajduje się u Freudenthala.

(3) Eliminowalność za pomocą nazw cudzysłowowych (Reichenbach, Czeżowski). *W* jest wyrażeniem okazjonalnym (ang. token-reflexive word) wtedy i tylko, gdy da się wyeliminować z języka na rzecz deskrypcji zawierającej jednostkową nazwę cudzysłowową wyrażenia o kształcie *W*.

Rozważmy wytworzony przez kogoś egzemplarz słowa „dzisiaj", np. egzemplarz wytworzony (za pomocą pióra) przez króla Jana Sobieskiego po raz pierwszy w pierwszym liście spod Wiednia. Jeśli ten egzemplarz skopiujemy w formie równokształtnego napisu, powstanie jednostkowa nazwa cudzysłowowa owego egzemplarza (*Cudzysłów). Zaopatrzmy tę kopię w charakterystykę lokalizującą skopiowany egzemplarz w czasie i przestrzeni (Wiedeń etc.); niech będą to (skrótowo) litery *t*, *m*. Wówczas użyte przez Sobieskiego słowo okazjonalne da się zastąpić *deskrypcją: (ιx) (x jest dniem oraz w x wytworzono 'dzisiaj'$_{m,t}$). W deskrypcji tej, denotującej to samo, co użyte przez Sobieskiego słowo okazjonalne, nie występują już wyrażenia okazjonalne; ostatni jej wyraz nie jest wyrazem okazjonalnym, lecz nazwą cudzysłowową określonego egzemplarza słowa „dzisiaj", a więc nazwą o raz na zawsze określonym denotacie.

(4) Istotność kontekstu pragmatycznego (Bar-Hillel, Strawson, Pelc i in.). *W* jest wyrażeniem okazjonalnym (ang. indexical expression), gdy *W* pełni funkcje semantyczne w taki sposób, że warunkiem koniecznym ich pełnienia jest wystąpienie *W* w jakimś kontekście pragmatycznym. Inaczej: Gdy w pełnieniu przez *W* funkcji semantycznych (denotowania, znaczenia itp.) istotną rolę odgrywa kontekst pragmatyczny.

Na kontekst pragmatyczny składają się: czas i miejsce użycia wyrażenia, osoby mówiącego i adresata itp. Mówi się, że kontekst pragmatyczny odgrywa nieistotną rolę w pełnieniu przez wyrażenie funkcji semantycznych wtedy i tylko, gdy spełniony jest warunek: $RS(a,b) \equiv \equiv \wedge c \wedge d[RP(a,b,c) \equiv RP(a,b,d)]$, gdzie *RS* to relacja semantyczna, *RP* – relacja pragmatyczna. *RS* traktuje się więc jako szczególny przypadek *RP* – taki, w którym elementy pragmatyczne są wymienialne, a więc obojętne

(ang. irrelevant). Gdy powyższy warunek nie jest spełniony, czyli gdy kontekst pragmatyczny nie jest obojętny, dane wyrażenie jest okazjonalne (zob. Bar-Hillel).
Skoro wyrażenia okazjonalne pełnią – pod warunkiem znalezienia się w kontekście pragmatycznym – określone funkcje semantyczne, to funkcje te można charakteryzować przez wymienianie właściwych dla danego wyrażenia kontekstów. Stąd – możliwość definiowania warunkowego (cząstkowego) wyrażeń okazjonalnych, np.: Jeśli x w czasie t wygłasza z przekonaniem „Ja jestem głodny" to x jest głodny w czasie t.
Teoria (4) stawia sprawę wyrażeń okazjonalnych w nowy sposób dzięki temu, że wprowadza do pojęcia wyrażenia (wszelkiego) element pragmatyczny, nieobecny w obiegowych definicjach wyrażenia, które konstruuje się z reguły w terminach syntaktycznych lub semantycznych (*Wyrażenie). (4) przeciwstawia się (1) w tym, że niezbędność kontekstu pragmatycznego uważana jest nie za wadę lub wyjątek, lecz za ogólną prawidłowość, której szczególnym przypadkiem jest niezbędność w stopniu zerowym. Przeciwstawia się (2) w tym, że przypisuje wyrażeniom okazjonalnym (gdy są w kontekście pragmatycznym) funkcje semantyczne właściwe wyrażeniom stałym, a nie symbolom zmiennym. Przeciwstawia się (3) w tym, że nie postuluje eliminacji wyrażeń okazjonalnych (osobno dowodzi się niemożliwość takiej eliminacji), lecz przepisuje metodę definiowania cząstkowego (zob. Kotarbińska).

Y. Bar-Hillel: *Indexical expressions*. „Mind" LXIII 1954; T. Czeżowski: *Nazwy okazjonalne oraz imiona własne*. [W:] – – *Odczyty filozoficzne*. 1958; H. Freudenthal: *Lincos – Design of a language for cosmic intercourse*. 1960; E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. T. 2 cz. 1. 1900/1; J. Kotarbińska: *Spór o granice stosowalności metod logicznych*. „St. Filoz." 1964 nr 3; J. Pelc: *Funkcjonalne podejście do semiotyki logicznej języka naturalnego*. „St. Filoz." 1967 nr 2; Quine: *ML*; Reichenbach: *Elements*; P. F. Strawson: *On referring*. „Mind" LIX 1950.

W. M.

wyrażenie synkategorematyczne (z gr. łac. synkategorema; synkategoremat).
(1) Wyrażenie, które nie jest niezbędne do utworzenia zdania, przy czym za niezbędne do tego celu uważa się rzeczowniki i czasowniki (Wilhelm z Shyreswood, w. XIII).
(2) Wyrażenie nie będące kategorematycznym, tj. nie mające znaczenia określonego przez odniesienie do jakiejś rzeczy, lecz uzyskujące znaczenie dopiero dzięki kontekstowi, w którym pełni jakąś rolę syntaktyczną (Ockham, Buridan, w. XIV).
Rozpowszechnieniu, m. in. poprzez Milla, uległo (2). Obecnie wyróżnia się *kategorie semantyczne podstawowe i kategorie wyrażeń niesamodzielnych (*funktory, *operatory). Pierwsze odpowiadają wyrażeniom kategorematycznym, drugie synkategorematycznym. Zachodzi też analogia pomiędzy pojęciem synkategorematu a pojęciem symbolu niezupełnego (ang. incomplete symbol) w *Principia mathematica*.

I. M. Bocheński: *Formale Logik*. 1956; Mill: *Syst. log.*; *Principia*.

W. M.

zakres. Zakresem nazwy *N* (o znaczeniu *S* w języku *J*) jest klasa tych przedmiotów, o których orzeka się prawdziwie w *J*, używając nazwy *N* w znaczeniu *S*. Relatywizacja do znaczenia nazwy podyktowana jest tym, że istnieją nazwy wieloznaczne, przy każdym ze swych znaczeń mające inny zakres. Pojęcie zakresu jest identyczne z pojęciem *denotacji (1). Przykłady: Zakresem nazwy „słoń" jest klasa słoni. Zakresem nazwy „najwyższy szczyt świata" jest klasa jednostkowa, której jedynym elementem jest Mount Everest. Zakresem nazwy „bóg olimpijski" jest klasa pusta. Co się tyczy nazw indywidualnych (jak np. imiona własne), istnieje pogląd, że nie mają one zakresu, lecz służą do nazywania indywiduów.

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Kotarbiński: *Elementy*; Ziembiński: *Log. prakt.*

W. M.

zasada wnioskowania. Twierdzenie logiczne, według którego przebiega dane wnioskowanie dedukcyjne, jest zasadą tego wnioskowania. Np. twierdzenie logiczne: Jeżeli (Każde *M* jest *P* i każde *S* jest *M*), to (Każde *S* jest *P*), jest zasadą następującego wnioskowania: Każdy ssak jest kręgowcem i każdy pies jest ssakiem. A więc: Każdy pies jest kręgowcem.

Twierdzenie logiczne jest zasadą danego wnioskowania, gdy okres warunkowy, którego poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek, następnikiem zaś wniosek, stanowi podstawienie tego twierdzenia logicznego.

K. Ajdukiewicz: *Logika a doświadczenie.* [W:] *LTN* oraz *JiP.* T. 2; T. Czeżowski: *Główne zasady nauk filozoficznych.* 1949; – – *Logika* 1949.

M. P.

zbiór. Pojęcie zbioru – w użyciu potocznym – oznacza bądź połączoną w jedność wielość przedmiotów, czyli kolekcję uprzednio danych obiektów wyznaczoną w pełni poprzez te obiekty, bądź całość utworzoną z wielu przedmiotów traktowanych jako części tej całości. Z uwagi na swój ogólny charakter pojęcie zbioru, stosowane na terenie różnych nauk (np. przyrodniczych, czy społecznych) jest fundamentalnym pojęciem nauk matematycznych.

Zbiory w znaczeniu dystrybutywnym i kolektywnym. Termin „zbiór" tak w użyciu potocznym, jak i w użyciu naukowym obciążony jest elementarną dwuznacznością. Wskazują na nią najczęściej spotykane terminy bliskoznaczne terminowi „zbiór" rozpadające się na poniższe dwie grupy: **A.** „klasa", „kolekcja", „wielość", „mnogość", „zbiorowość", „zespół", „gatunek", „rodzaj" i **B.** „całość", „agregat", „kompleks", „konglomerat". Terminy z grupy **A.** odnoszą się do zbiorów w znaczeniu dystrybutywnym, zaś z grupy **B.** do zbiorów rozumianych kolektywnie.

Zbiór w znaczeniu dystrybutywnym to zespół wielu przedmiotów połączonych w jedność, czy to z uwagi na pewną cechę, którą posiadają te i tylko te przedmioty, które należą do rozważanego zbioru (np. zbiór wszystkich znaczków pocztowych), czy poprzez innego rodzaju zasadę wydzielenia rozważanego zbioru (np. zbiór przedmiotów widocznych w danym momencie z okna gabinetu piszącego te słowa, czy też zbiór obiektów, które otrzymać można poprzez stosowanie do danego obiektu pewnej reguły konstrukcji). Dystrybutywne rozumienie zbioru związane jest ze stosunkiem należenia elementów do zbioru. Zbiory dystrybutywne są przedmiotami abstrakcyjnymi.

Zbiór w sensie kolektywnym jest całością złożoną z pewnych przedmiotów traktowanych jako części tej całości (np. las traktowany jako całość złożona z drzew, krzewów, polan itp.). Stosunkiem badanym przy kolektywnym rozumieniu zbioru jest stosunek „być częścią danej całości", wzgl. stosunek komponenty do całości; czyli stosunek, o którym mówimy słowami „całość ... składa się z tych to, a tych części". Przy tym znaczeniu zbiór konkretnych, spostrzegalnych zmysłowo przedmiotów jest też przedmiotem postrzegalnym zmysłowo. Zbiory kolektywne są zbiorami tranzytywnymi, ponieważ relacja „być częścią" jest – w znaczeniu rozważanym w teorii zbiorów kolektywnych – relacją przechodnią. Wszelkiego rodzaju organizmy mogą być traktowane jako zbiory w sensie kolektywnym; tak samo jako zbiory w sensie kolektywnym rozważane być mogą grupy społeczne, itp. Toteż pojęcie zbioru w sensie kolektywnym znajduje zastosowanie w naukach przyrodniczych i społeczno-prawnych.

Zarówno zbiór w sensie dystrybutywnym, jak i zbiór w sensie kolektywnym poddano analizie naukowej. Ogólną teorią zbiorów rozumianych dystrybutywnie jest matematyczna teoria mnogości, S. Leśniewski zbudował tzw. mereologię, czyli jedną z możliwych teorii zbiorów rozumianych kolektywnie.

Uwagi dalsze dotyczą wyłącznie zbiorów rozumianych dystrybutywnie.

Klasyczne określenia zbioru. W tradycyjnej logice zbiory rozumiano jako zakresy nazw (pojęć) ogólnych. Do idei tej w wieku XIX nawiązali twórca współczesnej logiki G. Frege oraz twórcy teorii mnogości B. Bolzano, G. Cantor i R. Dedekind. Pochodzą od nich dwie, blisko z sobą zwią-

zane koncepcje zbiorów: logiczna – Fregego i matematyczna – Bolzano, Cantora, Dedekinda.

Określenie Fregego. Punktem wyjścia Fregego jest jego teoria semantyczna. Zbiory są wyznaczone przez predykaty w sposób pośredni. Denotatami predykatów w kontekstach są pojęcia, zaś zbiory są ekstensjami pojęć. Dla uniknięcia nieporozumień przypomnijmy, że termin „pojęcie" w terminologii Fregego ma znaczenie odbiegające znacznie od zwykłego sensu tego słowa w języku polskim, mianowicie oznacza on denotat predykatu będący w myśl koncepcji Fregego tzw. przedmiotem niezupełnym. Ekstensje związane są z pojęciami zgodnie z zasadą ekstensjonalności: jeżeli dwa pojęcia stosują się do tych samych obiektów, to mają one tę samą ekstensję. Formalnie:

$$(*) \qquad \hat{x}F(x) = \hat{x}G(x) \underset{\text{df.}}{=} \wedge x(F(x) \equiv G(x))$$

„$\hat{x}F(x)$" oznacza tutaj ogół przedmiotów spełniających predykat $F(\ )$, czyli ekstensję pojęcia „być F-em".

Stanowisko Fregego nawiązuje do koncepcji tradycyjnej, w myśl której predykatom odpowiadały własności, a tym ich zakresy. Np. predykat „być człowiekiem" denotuje własność (pojęcie – w terminologii Fregego) „człowieczeństwo", a ta wyznacza klasę ludzi.

Określenia Cantora. Od Cantora pochodzą dwa często przytaczane określenia zbioru. Z r. 1883: „Unter einer 'Mannigfaltigkeit' oder 'Menge' verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann..." (Przez „mnogość" albo „zbiór" rozumiem każdą wielość, która da się pomyśleć jako jedno (jedność), tzn. każde całościowe ujęcie pewnych elementów, które przez prawo dadzą się połączyć z pewną całość.). Z r. 1895: „Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschieden Objekten m unserer Anschaunng oder unseres Denkes – welhe die 'Elemente' von M gennanten werden – zu einem Ganzen" (Przez „zbiór" rozumiem ujęcie w całość (jedność) M określonych, dobrze wyróżnionych przedmiotów m – zwanych „elementami" M – naszego przedstawienia (intuicji) lub naszej myśli).

Widoczne jest, że powyższe określenia są niejasne – pojęcie zbioru nie zostało w nich dostatecznie sprecyzowane. Pojęcie to precyzowano później w wiele sposobów, rozwijając różne systemy teorii mnogości. W badaniach tych ujawniono zasadniczą niejasność pojęcia zbioru oraz pokazano, że istnieją różne – niekiedy niezgodne – sposoby uściślenia go.

Antynomie. Aksjomatyczne ujęcie pojęcia zbioru. W l. 1896–1902 odkryto w Cantorowskiej teorii mnogości szereg antynomii pokazujących, wg Cantora, iż nie każda wielość obiektów da się połączyć w całość. Do wielości takich należą m. in. klasa wszystkich zbiorów (antynomia Cantora), klasa wszystkich liczb porządkowych (antynomia Burali-Fortiego, znana wcześniej Cantorowi), czy klasa wszystkich zbiorów nie będących swymi elementami (antynomia Russella). Równocześnie zwrócono uwagę na znane od dawna antynomie semantyczne stanowiące istotną przeszkodę logiczną dla oparcia matematyki klasycznej na solidnych, wolnych od zasadnych wątpliwości logicznych podstawach.

Kryzys spowodowany odkryciem antynomii dotyczył nie tylko teorii mnogości, lecz także arytmetyki, analizy i innych klasycznych teorii matematycznych, które (w latach, gdy odkryto antynomie) wysiłkiem głównie matematyków niemieckich (R. Dedekinda, D. Hilberta, G. Cantora, G. Fregego) oraz francuskich (H. Lebesque'a i in.) oparte zostały na teorii mnogości.

Odkrycie antynomii teoriomnogościowych spowodowało intensywne badania nad podstawami Cantorowskiej („naiwnej", „intuicyjnej") teorii mnogości. Skłoniło ono Cantora do odróżnienia tzw. niekonsystentnych wielości (w późniejszej terminologii „klas") oraz wielości konsystentnych (zbiorów); sugerował on także możliwość aksjomatycznej charakteryzacji zbiorów.

Antynomie pojawiły się też na terenie systemu Fregego, będącego logiczną, opartą o Fregowską koncepcję zbioru, wersją Cantorowskiej teorii mnogości.

Główny powód pojawienia się antynomii upatrywano w nieostrożnym posługiwaniu się tzw. zasadą komprehensji stwierdzającą istnienie mnogości złożonych z obiektów spełniających daną formułę (resp. posiadających daną własność), zaś w systemie Fregego kłopoty spowodowane były przez nieostrożne operowanie zasadą ekstensjonalności (*).

Dla usunięcia groźby antynomii Cantorowską teorię mnogości poddano zasadniczej rewizji, podając cały szereg aksjomatycznych teorii mnogości, z których najpopularniejszą jest tzw. teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema, oznaczana **ZF**, będąca aksjomatyczną teorią relacji należenia do. Nawiązuje ona do drugiej z cytowanych definicji Cantora oraz do różnorakich stwierdzeń Cantorowskiej teorii zbiorów, które zostaną przedstawione dalej. Na uwagę zasługuje też inna, pokrewna **ZF**, teoria relacji należy do oraz predykatu być zbiorem podana przez W. Ackermanna.

Do odróżnienia Cantora wielości niekonsystentnych oraz konsystentnych nawiązują pochodzące od J. von Neumanna (*Teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla) systemy teorii mnogości odróżniające starannie zbiory od klas. W systemach tych zbiory są właściwymi obiektami matematycznymi, na których dopuszczone są wszystkie rozważane operacje teoriomnogościowe; zbiory mogą być elementami innych obiektów. Klasa zaś jest zespołem przedmiotów spełniających pewną formułę (w

terminologii Fregego – ekstensję formuły); klasy nie mogą być elementami jakiegokolwiek obiektu.
Inną wersją zmodyfikowanej Cantorowskiej teorii mnogości jest stworzona przez B. Russella i A. N. Whiteheada, a następnie modyfikowana przez wielu badaczy *teoria typów.
W aksjomatycznej teorii mnogości analizowane pojęcia traktowane są jako pojęcia pierwotne określone wyłącznie przez aksjomaty. Prowadzi to do ich relatywizacji (tzw. relatywizm teoriomnogościowy oraz paradoks Skolema) oraz do rozważania niepożądanych z intuicyjnego punktu widzenia interpretacji, czyli tzw. modeli niestandardowych.
Wielki wpływ na rozwój teorii mnogości wywarły idee zawarte w pracach Cantora, które zestawione zostaną niżej.
Główne zasady Cantorowskiej koncepcji zbioru. Stosując się do wzmiankowanych wyżej wskazówek Cantora rozróżniamy klasy (ekstensje formuł) od zbiorów (czyli klas niesprzecznych).
Klasy są w pełni określone przez ich elementy (*Aksjomat ekstensjonalności); są one dobrze zdefiniowane, gdy z ich określenia – stosując się do zasady wyłączonego środka – możemy dla każdego obiektu rozstrzygnąć, czy należy on do rozważanej klasy, czy nie. Zauważmy, że klasy określać można w różne sposoby: albo za pomocą tzw. określeń ekstensjonalnych (zakresowych) wyliczając kolejno wszystkie elementy określanej klasy, albo w tzw. sposób intensjonalny (treściowy), podając cechę (własność) charakterystyczną, którą posiadać muszą wszystkie i tylko te elementy, które należą do określanego zbioru. Z tych dwu rodzajów określeń określenia intensjonalne są bardziej podstawowe, jako iż każde określenie ekstensjonalne można przeformułować na równoważne mu określenie intensjonalne, zaś dla wielu zbiorów nie sposób podać określeń ekstensjonalnych. Klasy możemy określać też poprzez podanie reguły konstrukcji jej elementów.
Niekiedy przy definiowaniu pewnych klas odwołujemy się do warunku spełnianego też przez definiowane klasy, czyli do mnogości zawierającej określaną klasę jako element. Definicje takie nazywamy definicjami niepredykatywnymi. W opinii wielu badaczy (np. H. Poincarégo) definicje niepredykatywne winny być wyeliminowane na rzecz definicji predykatywnych jako (niezgodne z sugerowaną przez aksjomat ekstensjonalności zasadą, że elementy zbioru X winny być określone przed zdefiniowaniem X) określenia prowadzące do antynomii. Odróżnienie powyższe zrodziło intensywne badania nad tzw. predykatywną teorią mnogości, czyli systemami dopuszczającymi wyłącznie określenia predykatywne spełniające różne, nieraz bardzo rygorystyczne ograniczenia. W badaniach tych wielkie zasługi położył K. Gödel precyzując pojęcie zbioru definiowalnego predykatywnie, czyli tzw. zbioru konstruowalnego.
Cantor akceptował zasadę postulującą istnienie zbiorów, których elementy mogą, wraz z ewentualnymi opuszczeniami, być wyliczone. Opierając się na tej zasadzie przyjmował, iż każda podklasa zbioru jest zbiorem (aksjomat podzbiorów, wzgl. komprehensji) oraz że rodzina wszystkich podzbiorów jest zbiorem (aksjomat zbioru potęgowego). Przyjmował też, że dwie równoliczne (tj. wzajem jednoznacznie odwzorowywalne) klasy są zarazem zbiorami bądź zarazem są klasami właściwymi (*Aksjomat zastępowania), oraz że suma rodziny zbiorów jest zbiorem (*Aksjomat sumy).
Należy podkreślić, że teoria Cantora w równej mierze jest teorią zbiorów, jak opartą na idei nieskończoności aktualnej teorią nieskończoności. Tak więc Cantor akceptował bez zastrzeżeń istnienie zbioru liczb naturalnych (*Aksjomat nieskończoności) oraz pochodzącą od R. Dedekinda zasadę przechodzenia od nieskończoności potencjalnej do nieskończoności aktualnej, czyli tzw. zasadę domknięcia: dla dowolnej rodziny zbiorów oraz zespołu operacji teoriomnogościowych istnieje zbiór otrzymany z tej rodziny poprzez domknięcie jej na zadane operacje.
Wspomnijmy przy okazji, że opierając się na diametralnie różnej idei nieskończoności jako fenomenu związanego z obserwowaniem wielkich, nieprzedstawialnych, lecz skończonych zbiorów (A. S. Jesienin-Volpin, P. Vopěnka) oraz biorąc pod uwagę, że w modelach używanych do dowodów niezależności istnieją często zbiory należące do modelu mające podzbiory nie należące do niego, zaproponowano alternatywne – w stosunku do cantoryzmu – teorie mnogości. W niektórych z tych teorii dopuszcza się m. in. istnienie tzw. semi-zbiorów, tzn. podklas danego zbioru nie będących zbiorami, wbrew przytoczonej wyżej zasadzie Cantorowskiej teorii mnogości.
Zauważmy w końcu, że Cantor wywodząc intuicję zbioru nieskończonego z intuicji zbioru skończonego systematycznie badał, które własności zbiorów skończonych przenoszą się na zbiory nieskończone, oraz przyjmował, że każda klasa wyznacza swą moc (liczbę elementów) niezależnie od jakiejkolwiek swej struktury wewnętrznej.
Niektóre uwagi Cantora sugerują, że bliska mu była omówiona niżej iteracyjna koncepcja zbioru.
W badaniach teoriomnogościowych używa się współcześnie dwu blisko z sobą związanych koncepcji heurystycznych.
Iteracyjna koncepcja zbioru. Zbiory otrzymywalne są z pewnych danych obiektów wyjściowych poprzez odbywające się etapami iterowanie zadanych operacji teoriomnogościowych oraz zbieranie razem rezultatów tej procedury. Dozwolone jest pozaskończone iterowanie operacji. Koncepcja ta jest blisko związana z wymienioną wyżej zasadą domknięcia, stanowiąc jakby rozbicie tej zasady na etapy. Na etapowość konstrukcji nacisk kładzie druga ze standardowych koncepcji zbiorów.
Etapowa koncepcja zbiorów. Oparta jest ona na zasadzie,

że zbiór X może mieć jako elementy tylko te zbiory, które zostały utworzone przed X. Zbiory tworzone są w etapach, przy czym w danym etapie w zbiór zabrać możemy jakąkolwiek kolekcję obiektów utworzonych w etapach wcześniejszych. Teorię **ZF** odtworzyć można przyjmując, że istnieje etap po wszystkich etapach z zespołu etapów E, o ile tylko E zawiera pojedynczy etap, lub E jest ciągiem etapów, lub E jest rodziną etapów indeksowaną przez dowolnie dany, ustalony zbiór utworzony na jednym z wcześniejszych etapów.

Rozwój aksjomatycznej teorii mnogości doprowadził do powstania rozległej i złożonej dziedziny – podstaw teorii mnogości (resp. metamatematyki teorii mnogości). Poza porównywaniem poszczególnych zdań oraz teorii teoriomnogościowych ważnym zagadnieniem rozważanym w podstawach teorii mnogości jest znalezienie nowych aksjomatów, które pozwoliłyby rozstrzygnąć szereg klasycznych problemów matematycznych (np. hipotezę continuum) nierozstrzygalnych w systemach standardowych.

Poglądy na temat natury zbiorów różnicują istotnie spotykane najczęściej stanowiska w filozofii matematyki, a kwestia różnych sposobów ugruntowania teorii mnogości jest otwarta do dzisiaj i stanowi jeden z głównych problemów dyskutowanych w badaniach nad podstawami matematyki.

A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy: *Foundations of set theory*. 1973; K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966; A. Levy: *Basic set theory*. 1979; A. Mostowski: *O niektórych nowych wynikach metamatematycznych dotyczących teorii mnogości*. [W:] „St. Log." XX 1967; B. Russell: *Wstęp do filozofii matematyki*. 1958; J. Shoenfield: *Axioms of set theory*. [W:] *Handbook of mathematical logic*. 1977; J. Słupecki, L. Borkowski: *Filozoficzne uwagi o pojęciu zbioru* (dodatek). [W:] *Log. mat.*; Hao Wang: *From mathematics to philosophy*. 1974; P. Vopěnka: *Mathematics in the alternative set theory*. 1979.

J. P.

zbiór dobrze uporządkowany. Parę $\langle X, R\rangle$ złożoną ze zbioru X i *relacji asymetrycznej R nazywamy zbiorem dobrze uporządkowanym, gdy w każdym podzbiorze $Y(Y \subset X)$ istnieje taki element x, że pozostaje on w relacji R do każdego innego elementu y z podzbioru Y. Oznaczając xRy przez $x < y$ zapisujemy ten warunek:

$$\wedge\, Y[Y \subset X \rightarrow \vee\, x\{x \in Y \wedge\, \wedge\, y(y \in Y \rightarrow x < y)\}]$$

przy założeniu niepustości Y.

Np. zbiór dodatnich liczb parzystych z relacją mniejszości $(<)$ jest dobrze uporządkowany, zaś zbiór ułamków postaci $\frac{1}{n}$ (gdzie n przebiega zbiór liczb naturalnych 1, 2, 3, ...) z relacją mniejszości nie jest dobrze uporządkowany, bo np. jego podzbiór złożony z elementów mniejszych od $\frac{1}{7}$ nie zawiera elementu najmniejszego.

Zob. też **teoria zbiorów uporządkowanych.**

Słupecki, Borkowski; *Log. mat.*

K. Cz.

zbiór nieskończony (vs zbiór skończony).

(1) Zbiór X nazywamy nieskończonym, gdy nie istnieje taka liczba naturalna n, aby zbiór X miał n elementów.

(2) Jeśli określa się liczby naturalne za pomocą tzw. zbiorów v. Neumanna, można powiedzieć inaczej, że zbiór jest nieskończony, gdy nie jest równoliczny z żadnym zbiorem v. Neumanna I-szej klasy (zob. Suszko).

(3) Zbiór X jest nieskończony w sensie Webera, gdy nie da się dla niego określić takiej relacji R, aby relacja ta dobrze porządkowała zbiór X oraz aby jej *konwers (R^{-1}) także dobrze podporządkował zbiór X (*Zbiór dobrze uporządkowany).

(4) Zbiór X jest nieskończony w sensie Dedekinda, gdy istnieje taki jego podzbiór właściwy $Y(Y \subsetneq X)$, że Y jest równoliczny z X $(Y \sim X)$.

Powyższe definicje są równoważne przy założeniu *pewnika wyboru.

Zob. też **teoria mocy zbiorów.**

Suszko: *Wykłady*.

K. Cz.

zbiór potęgowy. Zbiór podzbiorów danego zbioru X nazywamy zbiorem potęgowym tego zbioru. Jeśli zbiór X posiada k elementów, to zbiór potęgowy: 2^X posiada 2^k elementów (stąd nazwa – zbiór potęgowy i zapis – 2^X). Niezależnie od tego, jakiej mocy jest zbiór X, zbiór 2^X ma moc wyższą od mocy zbioru X.

Zob. też **teoria mocy zbiorów.**

K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości*. 1966.

K. Cz.

zbiór przeliczalny. Przeliczalnym nazywa się zbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Przeliczalnymi są np. zbiory: liczb całkowitych, liczb naturalnych parzystych, liczb wymiernych, liczb algebraicznych (pierwiastków wielomianów o współczynnikach wymiernych). Elementy zbioru przeliczalnego dają się ustawić w ciąg nieskończony o niepowtarzających się wyrazach.

Zob. też **teoria mocy zbiorów.**

K. Cz.

zbiór skończony (vs zbiór nieskończony).

(1) Zbiór X jest skończony, gdy istnieje liczba naturalna n taka, że zbiór X ma n elementów.

(2) Zbiór X jest skończony, gdy jest równoliczny z pewnym zbiorem v. Neumanna I-szej klasy (zob. Suszko).

(3) Zbiór X jest skończony w sensie Webera, gdy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór X, taka, że jej konwers także dobrze porządkuje zbiór X (*Zbiór dobrze uporządkowany).

(4) Zbiór X jest skończony w sensie Dedekinda, gdy nie jest równoliczny z żadnym swym podzbiorem właściwym.

Wszystkie te określenia są sobie równoważne przy założe-

niu pewnika wyboru, mimo iż podają różne kryteria; def. (1) ujmuje potoczny sens tego pojęcia.
Zob. też. **teoria mocy zbiorów.**
Suszko: *Wykłady.*

K. Cz.

zbiór w sensie dystrybutywnym (vs zbiór w sensie kolektywnym). Powiedzenie „x jest elementem zbioru M-ów" znaczy, że x jest M-em, czyli x jest jednym z M-ów, np. „Liczba 3 jest elementem zbioru liczb naturalnych" znaczy, że liczba 3 jest liczbą naturalną, że jest jedną z liczb naturalnych. W tym sensie użyte słowo „zbiór" można zastąpić słowem „rodzaj" lub „gatunek". Tak określony zbiór nie jest oczywiście przedmiotem fizycznym. Z tego, że x jest elementem zbioru Y, który z kolei jest elementem zbioru Z, nie wynika, że x jest elementem zbioru Z, (innymi słowy: relacja bycia elementem nie jest przechodnia).
Zob. też **zbiór; teoria mnogości.**
Kotarbiński: *Elementy*; Suszko: *Wykłady.*

K. Cz.

zbiór w sensie kolektywnym (vs zbiór w sensie dystrybutywnym). Zbiór M-ów stanowi pewną całość, na którą składają się poszczególne M-my, np. terytorium Polski składa się z województw, ogniwa tworzą łańcuch, a ziarnka piasku razem zgromadzone stanowią kupę piasku. Jakikolwiek wyróżnić fragment danego zbioru M-ów, to bądź będzie on M-em, bądź będzie składał się z M-ów lub ich fragmentów. Stosunek bycia elementem jest tutaj przechodni, np. terytorium Polski składa się z województw, województwa z gmin, zatem terytorium Polski składa się z powiatów.
Zob. też **zbiór; systemy Leśniewskiego – 3.**
Kotarbiński: *Elementy*; Suszko: *Wykłady.*

K. Cz.

zdanie. Przez termin „zdanie" rozumie się w logice wyłącznie zdania oznajmujące, czyli tzw. zdania w sensie logicznym (ewentualne inne rozumienie sygnalizuje się odpowiednim przymiotnikiem). Tak pojęte zdania określa się (1) syntaktycznie, czyli strukturalnie, lub (2) semantycznie, lub (3) pragmatycznie.
(1) Z jest zdaniem języka J wtedy i tylko, gdy Z jest wyrażeniem o określonej strukturze, przepisanej przez reguły składni języka J.
Struktura ta różnie bywa określana dla różnych języków, stąd schematyczność ogólnego określenia w rodzaju podanego wyżej. Zdaniem np. języka polskiego jest m. in. każde wyrażenie złożone z rzeczownika i następującego po nim czasownika w trzeciej osobie. Zdaniem rachunku kwantyfikatorów jest funkcja o określonej (przez reguły tego rachunku) budowie, poprzedzona kwantyfikatorami wiążącymi wszystkie zmienne.
(2) Z jest zdaniem języka J wtedy i tylko, gdy jest w J prawdziwe lub fałszywe, tj. posiada wartość logiczną.
(3) Z jest zdaniem języka J wtedy i tylko, gdy Z wyraża w J jakąś myśl, czyli sąd w sensie logicznym.
Problem funkcji semantycznych zdania. W pewnych teoriach (Frege, Church) przyjmuje się, że zdania stanowią rodzaj nazw: zdania niezależne (łac. oratio recta) są nazwami wartości logicznych, zdania zależne (łac. oratio obliqua) są nazwami odpowiednich sądów (*Intensjonalność). Zdanie niezależne denotuje przeto wartość logiczną, a zdanie zależne denotuje sąd. Założenie takie umożliwia m. in. jednolitą definicję równoważności (materialnej) dla wszelkich wyrażeń – są one równoważne wtedy i tylko, gdy mają tę samą denotację: nazwy (nie-zdaniowe) – tę samą klasę, zdania – tę samą wartość logiczną lub (gdy zależne) – ten sam sąd. Podobną jednolitość osiąga się w teorii ekstensji i intensji (Carnap), przyjmując jako intensję zdania pewien sąd, jako ekstensję wartość logiczną (pojmuje się je przy tym jako własności zdania, nie zaś jako przedmioty pozajęzykowe). Wedle innych ujęć zdania mają swój pozajęzykowy korelat w sferze obiektywnej, a jest nim: a) stan rzeczy (np. świecenie słońca jako korelat zdania „Słońce świeci") bądź b) pewna struktura powstała z denotacji terminów składających się na zdanie (Ajdukiewicz), bądź też c) jakiś przedmiot o charakterze idealnym, np. tzw. (niem.) Objektiv (Meinong).
Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; – – *Proposition as the connotation of sentence.* „St. Log." XX 1967; Carnap: *MaN*; Church: *Math. log.*; Frege: *SuB*; Kotarbiński: *Elementy*; A. Meinong: *Über Annahmen.* 1902.

W. M.

zdanie analityczne. Dychotomia analityczno-syntetyczna występuje w dziejach filozofii pod różnymi postaciami: Wiedza pewna (konieczna) – o ideach i wiedza przygodna – o faktach zmysłowych (Platon). Orzekanie na podstawie znajomości istoty i orzekanie nie mające takiej podstawy (Arystoteles i scholastyka). Prawdy o ideach wytworzonych przez umysł i prawdy o faktach (Hume). Prawdy ważne we wszelkich możliwych światach i prawdy ważne tylko w niektórych (Leibniz). Sądy, których orzecznik zawiera się w podmiocie i sądy nie spełniające tego warunku (Kant). Zdania przyjęte na podstawie konwencji terminologicznej i zdania uzasadnione, na gruncie przyjętej konwencji, doświadczalnie (Poincaré). Inne określenia zdań analitycznych: aprioryczne, czyli wyprzedzające wszelkie doświadczenie; prawdziwe na mocy znaczenia; zdania, których zaprzeczenie jest wewnętrznie sprzeczne; itp.
Współcześnie do zdań analitycznych zalicza się a) wszystkie twierdzenia logiki a także b) podstawienia tych praw. Bardziej dyskusyjne są c) zdania dające się sprowadzać do wyrażeń typu b) przez wymienianie pewnych składników na wyrażenia równoznaczne. Jeszcze więcej zastrzeżeń budzi zaliczanie do zdań analitycznych wyrażeń będących d) postulatami znaczeniowymi określonego języka lub konsekwencjami logicznymi takich postulatów.

Przykładem na a) jest każde prawo rachunku zdań lub kwantyfikatorów, a przykładem na b) dowolne podstawienie któregoś z tych praw, np. prawa symplifikacji: [1] $\wedge x$(x jest ciałem niebieskim $\wedge x$ krąży wokół słońca $\rightarrow x$ krąży wokół słońca).

Przykładem c) może być zdanie [2] $\wedge x$(x jest planetą $\rightarrow x$ krąży wokół słońca); to samo, bardziej potocznie: Wszystkie planety krążą wokół słońca. Zdanie [2] otrzymuje się z [1], zastąpiwszy poprzednik w [1] równoznacznym zwrotem „x jest planetą"; w tym sensie [2] da się sprowadzić do [1]. W określeniu (c) wyjaśnia się pojęcie analityczności za pomocą pojęć: prawo logiki, podstawianie, równoznaczność. To ostatnie jednak pojęcie, zdaniem niektórych autorów (Quine'a, Goodmana, White'a), jest co najmniej tak samo niejasne, jak pojęcie analityczności, nie nadaje się przeto do wyjaśnienia, czym jest analityczność. W szczególności Quine w *Two dogmas...* i innych tekstach poddaje pojęcie równoznaczności szczegółowej krytyce (odpowiedź na tę krytykę podejmuje wiele prac, m. in. Poznańskiego *Spór o analityczność*).

Pojęcie postulatu znaczeniowego, występujące w określeniu zdań grupy (d), formułuje się (zob. Ajdukiewicz) następująco: Zdanie $F(t)$ zawierające termin t, jest postulatem (inaczej: definicją arbitralną) języka J, jeśli w J obowiązuje konwencja terminologiczna, na mocy której t ma denotować przedmiot x, spełniający na miejscu t zdanie $F(t)$ (*Denotacja–(3)). Można też powiedzieć w sposób równoważny, iż zdanie [3] $F(t)$ jest postulatem znaczeniowym dla terminu t, gdy w rozważanym języku obowiązuje reguła denotowania: $\wedge x$[t denotuje $x \rightarrow F(x)$]. Pod schemat [3] podpada np. zdanie „Centymetr jest częścią metra", gdzie fragment wyróżniony spacją odpowiada symbolowi t, a reszta symbolowi F. Zdanie to jest postulatem znaczeniowym języka polskiego, ponieważ w języku tym istnieje reguła nakazująca odnosić słowo „centymetr" do tego rodzaju odcinków, iż o każdym takim odcinku będzie prawdą, że jest on częścią metra. Inny przykład postulatu: „Białe nie jest czarne", gdzie t – „białe", – „nie jest czarne".

Zauważono (Ajdukiewicz, Carnap i in.), że każdy postulat znaczeniowy ma wśród swych konsekwencji logicznych zdanie o istnieniu przedmiotu denotowanego, zgodnie z formułą: [4] $F(t) \rightarrow \vee xF(x)$. Konsekwencja $\vee xF(x)$ jest zdaniem syntetycznym, wymagającym (gdy $F(t)$ nie jest tezą jakiejś nauki formalnej) odwołania się do doświadczenia. Wynik ten nie zgadza się jednak z intuicją, wedle której zdania analityczne, do których zalicza się postulaty, mają być całkowicie niezależne od doświadczenia. Aby uczynić zadość owej intuicji, wyróżnia się w postulacie składnik syntetyczny o schemacie [5] $\vee xF(x)$ oraz składnik analityczny, będący zdaniem warunkowym: [6] $\vee xF(x) \rightarrow F(t)$. Zdanie analityczne [3] jest równoważne koniunkcji składnika syntetycznego [5] i składnika analitycznego [6] (na gruncie logiki, której prawem jest [4]). Jeśli składnik syntetyczny typu [5] okaże się w świetle doświadczenia fałszywy, to zawierający go postulat języka J trzeba uznać bądź za fałszywy, bądź za bezsensowny (zależy to od pewnych właściwości języka J – zob. Przełęcki 1963).

Podobny problem konsekwencji syntetycznych nasuwają postulaty będące układami definicji cząstkowych, o takiej np. strukturze (niech T będzie terminem definiowanym): [7] $\wedge x(Px \rightarrow Tx)$, [8] $\wedge x(Qx \rightarrow \sim Tx)$. Konsekwencją [7] i [8] jest [9] $\wedge x(Px \rightarrow \sim Qx)$, nie zawierające już terminu definiowanego, a więc będące zdaniem syntetycznym. Również i w tym przypadku powstaje problem wyodrębnienia składnika analitycznego (zob. Przełęcki 1961).

Na podstawie tego rodzaju analiz wyróżnia się dwa pojęcia zdania analitycznego, szersze i węższe. Na zakres szerszego – oznaczmy je przez (1) – składają się wszystkie rodzaje zdań wymienione na wstępie, od a) do d). Od tak pojętego zdania analitycznego nie wymaga się, by nie pociągało ono konsekwencji syntetycznych, zaś jego analityczność upatruje się w tym, że jest ono zależne od doświadczenia w inny sposób aniżeli zdanie czysto syntetyczne. Pod węższe pojęcie (2) podpadają prawdy logiczne (prawa logiki), składniki analityczne postulatów znaczeniowych oraz konsekwencje logiczne owych składników.

W wyniku dyskusji nad zdaniami analitycznymi, trwającej od lat dwudziestu, rozpowszechnia się pogląd, że większość, jeśli nie wszystkie, zdań języków naturalnych i teorii empirycznych zawiera zarówno elementy analityczne, jak i syntetyczne, z przewagą tych lub tamtych. Każde twierdzenie języka empirycznego podlega kontroli doświadczenia, nawet jeśli ma rangę naczelnych zasad teorii, definiujących (aksjomatycznie) jej terminy pierwotne. Z drugiej zaś strony, twierdzenia zaliczane do syntetycznych wnoszą coś do charakterystyki znaczenia składających się na nie terminów. Termin „inteligentny" np. może być zdefiniowany w psychologii operacyjnie przez pewien test. (*Definicja operacyjna). Ale jeśli ustali się empirycznie hipotezę „Wszyscy matematycy są inteligentni", pozwala to rozszerzyć zakres terminu „inteligentny" na każdego matematyka, nawet jeśli nie został on poddany testowi; w ten sposób hipoteza empiryczna domyka w pewnym stopniu zakres pojęcia, czyniąc je stosowalnym w pewnych przypadkach nie przewidzianych przez wyjściową definicję cząstkową. Ten rodzaj uogólnień (ang. semi-definitional laws, zob. Mehlberg) jest ilustracją jednego ze sposobów współwystępowania w jednym zdaniu elementów syntetycznych (empirycznych) i analitycznych (definicyjnych). Skoro analityczność jest stopniowalna, to wydzielone z postulatów składniki analityczne stanowią graniczny przypadek, do którego inne zdania zbliżają się w mniejszym lub większym stopniu. Tę sytuację naszej wiedzy ujął Quine (1962) w metaforze szarości: „Wiedza, która zmienia się w naszych rękach przez mniej lub bar-

dziej arbitralne i świadome zmiany i dodatki, mniej lub bardziej zależne od nieustannej aktywności naszych zmysłów, jest wiedzą bladoszarą: biorącą czerń od faktów, a biel od konwencji. Ale nie znajduję poważnych powodów, by mniemać, że są w niej nitki wyłącznie białe lub też wyłącznie czarne".

K. Ajdukiewicz: *Zagadnienie uzasadnienia zdań analitycznych.* [W:] *JiP.* T. 2 i [W:] *LTN*; Carnap: *MaN* par. 2 i dodatek B; – – *Beobachtungssprache und theoretische Sprache.* „Dialectica" XII 1958; J. Hintikka: *Are logical truths analytic?* „Philos. Rev." LXXIV 1965 nr 2; A. Pap: *Semantics and necessary truth.* 1958; E. Poznański: *Spór o analityczność.* [W:] *LTN*; M. Przełęcki: *Pojęcia teoretyczne a doświadczenie.* „St. Log." XI 1961 i [W:] *LTN*; – – *O pojęciu zdania analitycznego.* „St. Log." XIV 1963; W. V. O. Quine: *Two dogmas of empiricism.* [W:] *LPV*; – – *Carnap and logical truth.* [W:] *Logic and language (Studies dedicated to R. Carnap).* 1962; F. Waismann: *Analythic – synthetic.* „Analysis" X 1949; R. Wójcicki: *Analityczne komponenty definicji arbitralnych.* „St. Log." XIV 1963.

W. M.

zdanie atomowe. Zdanie nie zawierające kwantyfikatorów ani funktorów od argumentów zdaniowych (spójników zdaniowych). Każde zdanie atomowe zawiera *n* stałych indywiduowych oraz predykat *n*-argumentowy. I tak zdania z jedną stałą indywiduową zawierają predykat jednoargumentowy (np. zdanie „Jan jest rybakiem"), zdania z dwiema stałymi indywiduowymi mają predykat dwuargumentowy (np. „Jan ceni Piotra") itd. Zdania złożone ze zdań atomowych za pomocą *funktorów prawdziwościowych tworzą zdania molekularne, np. „Jan jest rybakiem i Piotr jest logikiem", „Nieprawda, że Jan jest logikiem".

T. Czeżowski: *Logika.* 1949; *Principia*; L. Wittgenstein: *Tractatus logico-philosophicus.* 1922.

W. M.

zdanie empiryczne.

(1) – w sensie szerszym: zdanie obserwacyjne lub zdanie sprawdzalne empirycznie, tj. uzasadnione w pewien sposób za pomocą zdań obserwacyjnych.

(2) – w sensie węższym: zdanie sprawdzalne empirycznie, czyli uzasadnione za pomocą zdań obserwacyjnych bądź a) na podstawie stosunku wynikania logicznego, bądź b) przy użyciu wnioskowań nie opartych na tym stosunku, np. statystycznych. Stosunek logiczny, jaki w wypadku a) powinien zachodzić pomiędzy zdaniami obserwacyjnymi a zdaniami sprawdzanymi za ich pomocą, bywa w różny sposób określany. Stąd – różne wersje pojęcia sprawdzalności, różniące się m. in. stopniem liberalizmu w formułowaniu rygorów sprawdzalności. Do najbardziej znanych należą następujące:

(2.1) *Z* jest zdaniem empirycznym wtedy i tylko, gdy *Z* jest równoważne jakiejś skończonej klasie zdań obserwacyjnych. Warunku tego, żądającego całkowitej weryfikalności i falsyfikowalności, nie spełniają nawet prawa przyrodnicze, toteż został on poniechany.

(2.2) *Z* jest empiryczne, gdy jest falsyfikowalne, tj. gdy w zbiorze wszystkich możliwych *zdań podstawowych da się wyróżnić dwa niepuste podzbiory: zdań zgodnych z *Z*, czyli takich, z których nie wynika zaprzeczenie *Z*, oraz zdań, z których wynika zaprzeczenie *Z*. Kryterium tego, pochodzącego od Poppera, nie spełniają te zdania egzystencjalne, które nie podają lokalizacji czasowo-przestrzennej przedmiotu, a także pewne zdania zawierające jednocześnie kwantyfikator ogólny i szczegółowy. Wg niektórych krytyków (zob. Kotarbińska) jedne i drugie występują w naukach, byłby to więc warunek zbyt w tym względzie rygorystyczny.

(2.3) *Z* jest empiryczne wtedy i tylko, gdy spełnia jeden z następujących warunków: 1° *Z* wynika ze skończonego i niesprzecznego zbioru zdań obserwacyjnych (potwierdzalność bezpośrednia i całkowita) lub 2° z *Z* wynika nieskończenie wiele niezależnych od siebie zdań obserwacyjnych (potwierdzalność bezpośrednia i częściowa), lub 3° istnieje taki ciąg konsekwencji zdania *Z*, że każda następna konsekwencja jest potwierdzalna całkowicie lub częściowo przez poprzednią, ostatnia zaś jest potwierdzalna, całkowicie lub częściowo, przez zdania obserwacyjne (potwierdzalność pośrednia).

(2.4) *Z* jest empiryczne wtedy, gdy z *Z* oraz z pewnej hipotezy *H* wynika takie zdanie obserwacyjne, które z samej hipotezy *H* nie wynika (Ayer). Wersje w rodzaju (2.3) lub (2.4) okazały się spełnione także przez niektóre zdania nie należące do nauk empirycznych. Jako bardziej skuteczną zaproponowano więc wersję:

(2.5) Określa się warunki empiryczności dla terminów teoretycznych, po czym definiuje się zdanie empiryczne: *Z* jest empiryczne, gdy jako jedyne terminy deskryptywne (tj. nie należące do logiki) zawiera terminy empiryczne. Również i tę wersję kwestionuje się jako nazbyt, pod pewnym względem, liberalną.

Wobec tego, że proponowane kolejno kryteria sprawdzalności zostały poddane krytyce, problem warunków empiryczności zdania pozostaje nadal otwarty.

Zob. też **metodologia nauk empirycznych** – 2; **sensowność empiryczna.**

A. J. Ayer: *Language, truth and logic.* 1946; R. Carnap: *Testability and meaning.* 1936; J. Kotarbińska: *Ewolucja Koła Wiedeńskiego.* „Myśl Współcz." II 1947 i [W:] *LTN*; A. Pap: *Analytische Erkenntnistheorie.* 1955; Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

zdanie kategoryczne. Terminem tym obejmowano w logice tradycyjnej następujące typy zdań:

1. Zdania asertoryczne, tj. zdania mające jedną z następujących form:

Każde *S* jest *P*, np. Każdy kruk jest czarny.
Niektóre *S* są *P*, np. Niektóre książki są ciekawe.
Żadne *S* nie jest *P*, np. Żadna wojna nie jest dobra.
Niektóre *S* nie są *P*, np. Niektóre filmy nie są ładne.

2. Zdania problematyczne, tj. zdania typu: Każde *S* może być *P*, np. Każdy człowiek może być chory. Niektóre *S* może być *P*, np. Niektóre zwierzęta mogą być niebezpieczne. itd. (analogicznie do zdań asertorycznych).

3. Zdania apodyktyczne, tj. zdania typu: Każde *S* musi być *P*, np. Każdy człowiek musi być śmiertelny. Niektóre *S* musi być *P*, np. Niektóre liczby muszą być podzielne przez 4. itd. (analogicznie do zdań asertorycznych).
Zdania problematyczne i apodyktyczne nazywa się (od czasów Kanta) zdaniami modalnymi.
Zob. też **sylogistyka zdań asertorycznych; logika modalna** – 1.

A. Korcik: *Przyczynek do historii klasycznej teorii opozycji zdań asertorycznych.* „Rocz. Filoz. KUL" IV 1955.

M. P.

zdanie konieczne. U pewnych autorów, analizujących pojęcia teoriopoznawcze w terminach semantyki, zdanie konieczne utożsamiane jest ze *zdaniem analitycznym, w którymś ze znaczeń tego terminu (zob. Carnap). Inni traktują pojęcie konieczności jako nadrzędne nad pojęciem analityczności: wszystkie zdania analityczne są konieczne, ale nie odwrotnie (zob. Pap). Jako przykład zdania koniecznego nie będącego analitycznym (w sensie: zdanie analityczne typu a) lub b), lub c)) podaje się wypowiedzi w rodzaju „Czerwone nie jest zielone", gdzie terminy „czerwone" i „zielone", jako nie mające definicji (wprowadzane do języka ostensywnie), nie mogą być sprowadzone definicyjnie do tautologii logicznych.
Pytanie, na czym polega konieczność charakteryzująca zdanie nie-analityczne (nazywane wtedy czasem syntetycznym a priori), wkracza w problematykę filozoficzną. Pewne stanowiska uzależniają konieczność od sposobu poznania: konieczne są te zdania, które uznaje się za prawdę na podstawie oglądu istoty (niem. Wesenanschauung w terminologii Husserla). Inni wiążą konieczność z tym, czego zdanie dotyczy: przysługuje ona zdaniu wówczas, gdy stwierdza się w nim związki o charakterze koniecznym, np. pojęty w pewien sposób związek przyczynowy albo związek między cechą istotną rzeczy a cechami względem niej pochodnymi. Teorie te nie należą jednak do logiki, lecz do dyscyplin filozoficznych takich, jak teoria poznania lub ontologia.

Carnap: *MaN*; A. Pap: *Semantics and necessary truth.* 1958.

W. M.

zdanie molekularne. Zdanie utworzone ze zdań atomowych za pomocą funktorów prawdziwościowych.

Carnap: *Symb. log.*

W. M.

zdanie obserwacyjne. Zdanie zdające sprawę z rezultatu określonej, jednostkowej obserwacji. Zdania obserwacyjne interpretuje się czasem subiektywistycznie (interpretacja ta przeważała w pierwszej fazie neopozytywizmu) bądź w wersji introspekcyjnej („Tu teraz jawi mi się to oto"), bądź w wersji behawiorystycznej (Organizm osobnika *x* znajduje się w stanie fizycznym *S*). Interpretacja przedmiotowa, przeciwstawiająca się psychologizmowi, polega na traktowaniu zdań obserwacyjnych jako zdań o ciałach spostrzeganych (nie zaś o ciałach czy umysłach spostrzegających).
Klasa zdań obserwacyjnych pokrywa się zakresowo z klasą tzw. *zdań podstawowych, jeśli jedne i drugie określa się jako zdania służące do empirycznego sprawdzania prawdziwości innych zdań. Od zdań obserwacyjnych jednak wymaga się ponadto tego, by motywem ich uznania było pewne doświadczenie zmysłowe; warunku tego nie umieszcza się w definicji zdań podstawowych.
Zob. też **metodologia nauk empirycznych** – 1 (tamże piśmiennictwo); **sensowność empiryczna.**

W. M.

zdanie ogólne. Zdania ogólne dzielą się na ogólno twierdzące, postaci „Każde *A* jest *B*", oraz ogólno przeczące, postaci „Żadne *A* nie jest *B*" (poprawniej: „Każde *A* nie jest *B*").
Odróżnia się mocną i słabą interpretację (rozumienie) zdań ogólnych. Mocna polega na takim rozumieniu zwrotu „Każde *A* jest...", że zawiera się w tym sąd o istnieniu przedmiotów będących *A*. Interpretacja słaba nie zakłada takiego sądu. Stąd, jeśli *A* jest *nazwą pustą, zdanie ogólne rozumiane mocno jest fałszywe. Przy rozumieniu słabym natomiast, pustość podmiotu gwarantuje prawdziwość zdania, ponieważ zdanie takie mówi tylko o zawieraniu się zakresu podmiotu w zakresie orzecznika, zbiór pusty zaś zawiera się w każdym innym zbiorze (*Rachunek zbiorów). Z faktu tego zdaje się sprawę również i w ten sposób, że zdanie ogólne przekłada się na pewne zdanie 'o nieistnieniu'; np. „Każdy lew jest drapieżnikiem", to tyle co: „Nie istnieją lwy nie będące drapieżnikami". Analogicznie: „Każdy krasnoludek jest mały", to tyle, co „Nie istnieją duże (tj. nie-małe) krasnoludki". Jest prawdą, że nie istnieją duże krasnoludki, skoro nie istnieją żadne. A więc jest też prawdą równoważne temu zdanie „Każdy krasnoludek jest mały", o ile nadaje się mu interpretację słabą.
W przekładzie na język rachunku kwantyfikatorów zdania ogólne w interpretacji słabej zapisywane są następująco:

zdanie ogólno twierdzące: $\wedge x(Ax \rightarrow Bx)$.
zdanie ogólno przeczące: $\wedge x(Ax \rightarrow \sim Bx)$.

Przy interpretacji mocnej będą to koniunkcje powyższych implikacji oraz zdania $\vee xAx$. Prawdziwość zdania ogólnego w interpretacji słabej, przy pustym *A*, jest teraz widoczna na podstawie twierdzenia o prawdziwości każdej implikacji mającej fałszywy poprzednik.
Zob. też **kwadrat logiczny.**

Kotarbiński: *Elementy.*

W. M.

zdanie podstawowe. Zdanie o postaci: W miejscu *m* i w czasie *t* znajduje się przedmiot mający własność obserwo-

walną *W*. Koniunkcja zdań podstawowych jest również zdaniem podstawowym. Termin ten został wprowadzony przez Poppera dla klasy zdań nadających się do falsyfikowania hipotez. Charakterystyka zdania podstawowego nie zawiera wymagania, aby motywem przyjęcia zdania było przeżycie spostrzeżenia. Do przyjęcia pewnego wyrażenia w charakterze zdania podstawowego wystarcza umowa w gronie kompetentnych badaczy.

Zob. też: **metodologia nauk empirycznych** – 1.

J. Giedymin: *Problemy, założenia, rozstrzygnięcia*. 1964; Popper: *Log. sc. disc.*

W. M.

zdanie syntetyczne.

(1) *Zdanie empiryczne w sensie szerszym.

(2) Zdanie nie będące analitycznym; w zależności od pojęcia *zdania analitycznego powstają różne wersje znaczeniowe terminu „zdanie syntetyczne". Przy pewnych założeniach (przyjmowanych m. in. w neopozytywizmie) (1) i niektóre wersje (2) okazują się równoważne. Nierównoważne są m. in. na gruncie poglądu o istnieniu zdań syntetycznych a priori, które nie są analityczne, nie będąc przy tym empirycznymi.

W. M.

zdanie szczegółowe. Zdaniem szczegółowym nazywa się zdanie zbudowane według któregoś z następujących schematów:

Pewne *S* są *P*, np. Pewne grzyby są trujące.

Pewne *S* nie są *P*, np. Pewne kwiaty nie są pachnące.

Zdanie pierwszego rodzaju to zdanie szczegółowo twierdzące, oznacza się je symbolem: *SiP*. Zdanie drugiego rodzaju – szczegółowo przeczące, oznacza się symbolem: *SoP*. Zdania szczegółowe stwierdzają zawsze istnienie przedmiotów, których dotyczą; dlatego nazywa się je również zdaniami egzystencjalnymi.

Zob. też **kwadrat logiczny.**

M. P.

zmienna (dokładniej: zmienna wolna). Symbol określony co do kategorii semantycznej, lecz nie mający określonej denotacji (w jakimkolwiek ze znaczeń dla tego terminu). Pełni on jakby rolę pustego miejsca, w które wolno wstawiać dowolne wyrażenie, byle z tej samej kategorii semantycznej. Operacja ta nazywa się podstawianiem, o wyrażeniach nadających się do podstawiania mówi się, że są reprezentowane przez daną zmienną; denotaty tych wyrażeń nazywają się wartościami zmiennej, a zbiór tych wartości – zakresem zmiennej. Miano zmiennej rozciąga się także na symbole, które mają kształt zmiennych, ale przestały nimi być z powodu tzw. związania przez jakiś *operator, np. kwantyfikator, operator deskrypcyjny, znak abstrakcji. Związanie jakieś zmiennej, np. zmiennej *x* w wyrażeniu *F* (*x*) polega na tym, że dane wyrażenie poprzedza się operatorem, któremu towarzyszy, na sposób indeksu (wskaźnika), litera równokształtna z daną zmienną, np.: $\vee xF(x)$. Tak związana zmienna nie dopuszcza podstawiania. Zmienna, której nie wiąże żaden operator, nazywa się zmienną wolną lub rzeczywistą; w przeciwnym wypadku (gdy w gruncie rzeczy nie jest już zmienną) nazywa się zmienną związaną lub pozorną.

Grzegorczyk: Log. mat.; Quine: ML.

W. M.

zmienna indywiduowa. Zmienna, za którą wolno podstawiać nazwy indywiduów.

Zob. też **rachunek kwantyfikatorów.**

W. M.

zmienna wolna. Zmienna nie będąca w zasięgu żadnego operatora i dzięki temu dopuszczająca podstawianie za nią innych wyrażeń.

W. M.

zmienna zdaniowa. Zmienna, za którą wolno podstawić zdania lub funkcje zdaniowe.

Zob. też **rachunek zdań.**

W. M.

zmienna związana. Zmienna będąca w zasięgu jakiegoś operatora, np. kwantyfikatora. Za zmienne związane nie wolno podstawiać żadnych wyrażeń.

W. M.

znaczenie. Pojęcie znaczenia należy do centralnych w semantyce i metodologii, wiążąc się z takimi problemami, jak zagadnienie *intensjonalności, *sensowności empirycznej, *zdań analitycznych, konwencjonalizmu i in. Pojęcie to występuje również w innych dyscyplinach: językoznawstwie, filozofii, psychologii. Analiza pojęcia znaczenia polega m. in. na zaliczeniu znaczenia do jednej z dziedzin, takich jak: (1) sfera zjawisk psychicznych lub (2) przedmiotów fizycznych, lub (3) przedmiotów abstrakcyjnych, lub (4) samego języka, lub (5) stosunków między ludźmi, językiem a rzeczywistością zewnętrzną. Ten nasuwający się a priori podział różnych ujęć został istotnie zrealizowany w dziejach pojęcia znaczenia.

(1) Znaczenie jako idea skojarzona ze słowem. Wg teorii zwanej asocjacjonistyczną znaczeniem wyrazu jest pewne przedstawienie (inaczej: idea) powiązane z dźwiękiem lub kształtem słowa na zasadzie praw kojarzenia. „Przez ustawiczne powtarzanie powstaje tak ścisłe powiązanie między określonymi dźwiękami i odpowiadającymi im ideami, że nazwy, skoro tylko się je usłyszy, prawie tak samo szybko wywołują pewne idee, jak gdyby faktycznie pobudzały zmysły te właśnie rzeczy, które zdolne są je wywołać" (Locke, t.2 ks.3 r.2 par.6).

Pogląd ten w ściślejszym sformułowaniu Ajdukiewicza posługuje się zwrotem „typ myśli", ponieważ nie jest intencją asocjacjonizmu mówienie o czyichś indywidual-

nych jednorazowych przedstawieniach, ale o tym, co jest wspólne pewnej klasie indywidualnych przedstawień wywoływanych przez dźwięk lub napis określonego rodzaju; klasę podobnych przedstawień nazywa się typem myśli, zaś klasę podobnych co do kształtu wyrażeń typem wyrażenia. Uściślona definicja brzmi: „Typ myśli *M* stanowi znaczenie językowe wyrażeń typu *W* w języku *J* wtedy i tylko, gdy: 1° wyrażenia o typie *W* należą do zasobu języka *J*, 2° dowolna osoba *X* używa wyrażenia *A* będącego typu *W* jako wyrażenia języka pod tym i tylko pod tym warunkiem, że a) typ myśli, polegających na doznawaniu treści zmysłowej właściwej wyrażeniom typu *W*, jest w umyśle osoby *X* skojarzony (...) z typem myśli *M*, b) myśl będąca doznaniem treści zmysłowej właściwej wyrażeniu *A* jest zarazem myślą typu *M*" (Ajdukiewicz 1930, s. 119). Koncepcja ta spotyka się z zarzutem, że nawet po jej uściśleniu podstawowy dla niej zwrot „typ myśli" pozostaje zbyt ogólnikowy, nie dostarczając kryterium do rozstrzygania, kiedy dwa wyrażenia wiążą się z tym samym typem myśli, tj. kiedy są równoznaczne. Krytykę asocjacjonizmu przeprowadza się też na gruncie teorii (5a).

(2) Znaczenie jako konotacja. Znaczenie pojęte jako konotacja przysługuje jedynie nazwom, nie będącym przy tym imionami własnymi (w sensie: *Imię własne (1)). Przez konotację rozumie się zespół cech charakterystycznych dla zakresu danej nazwy, za pomocą którego myślimy o jej desygnatach. Np. gdy myślimy o desygnatach nazwy „brzoza", to przedstawiamy sobie te cechy, które, razem wzięte, charakteryzują wszystkie brzozy i tylko brzozy, a więc cechę bycia drzewem w połączeniu z charakterystyczną bielą kory, z takim a nie innym kształtem liści, układem gałęzi, itd.

Bywa, że nazwy o tym samym zakresie różnią się konotacją. Np. nazwy „żona Zygmunta Starego" i „matka Zygmunta Augusta" mają ten sam zakres, którego jedynym elementem jest królowa Bona, konotacje jednak są różne, bo używając pierwszej nazwy myślimy o Bonie za pomocą cechy bycia matką.

Określając znaczenie jako konotację, czyli jako zbiór cech właściwych desygnatom nazwy, umieszcza się je w tej samej, co desygnaty, dziedzinie – w sferze przedmiotów realnych, a przy tym pozajęzykowych i pozapsychicznych. Zob. też **konotacja.**

(3) Znaczenie jako przedmiot idealny. Koncepcja ta, podobnie jak poprzednia, umieszcza znaczenie poza językiem i poza umysłem, ale przypisuje mu charakter przedmiotu idealnego (inaczej: abstrakcyjnego), do którego nie stosują się określenia przestrzenno-czasowe (właściwe przedmiotom materialnym); za przedmioty tego rodzaju uważa się *zbiory w sensie dystrybutywnym, liczby, twory geometryczne itp. W rozwoju tej koncepcji rysują się dwa wątki: filozoficzny, w systemach Meinonga, Husserla i in., oraz logiczno-semantyczny, w teoriach Fregego i Churcha. Kolejne ich omówienie: w punktach (3a) i 3b).

(3a) Pojęcie przedmiotu idealnego wyjaśnia się m. in. dzięki rozważaniom próbującym uzasadnić tezę o istnieniu takich przedmiotów. Niech rozważanym obiektem będzie liczba 4. O liczbie tej można wygłaszać twierdzenia prawdziwe (np. $4 = 2^2$), jak i fałszywe. Według klasycznej teorii prawdy prawdziwość polega na zgodności twierdzenia z rzeczywistością. Jeśli zatem o liczbie 4 da się powiedzieć coś prawdziwego, należy ona do jakiejś rzeczywistości, nie jest to jednak rzeczywistość fizykalna ani psychiczna; stanowi ona zatem jakąś trzecią dziedzinę, którą zwykło się nazywać dziedziną przedmiotów idealnych lub abstrakcyjnych. Te same argumenty przemawiają na rzecz umieszczenia znaczeń w świecie idealnym. O znaczeniu dowolnego wyrażenia można powiedzieć coś prawdziwego (np. że nie jest ono identyczne ze znaczeniem jakiegoś innego wyrażenia), a więc zgodnego z rzeczywistością. Nie sposób jednak uważać, że tą rzeczywistością jest sfera zjawisk fizycznych lub psychicznych. Musi to być zatem dziedzina przedmiotów idealnych.

Teoria znaczenia jako przedmiotu idealnego wiązała się u Husserla z teorią tzw. intencji znaczeniowej. Husserl przyjął (za Brentanem), że charakterystyczną cechą aktów psychicznych jest ich *intencjonalność, czyli skierowanie na jakiś przedmiot: spostrzegamy coś, kochamy coś, pragniemy czegoś. Również akt będący rozumieniem znaku kieruje się ku czemuś, co nazywa się znaczeniem i jest przedmiotem o charakterze idealnym. Akt ujmowania znaczenia otrzymał u Husserla nazwę intencji znaczeniowej (niem. Bedeutungsintention; łac. intendo – kieruję ku czemuś).

Znaczenie uważa się za pewnego rodzaju przedmiot także w semantyce Ingardena, ale zalicza się go do innej dziedziny, różnej zarówno od dziedziny przedmiotów realnych (tj. fizycznych lub psychicznych), jak i przedmiotów idealnych; znaczenia, podobnie jak np. dzieła sztuki, należą – wg Ingardena – do przedmiotów zwanych przez niego intencjonalnymi, czyli do wytworów ludzkiej psychiki, które tym m. in. różnią się od przedmiotów idealnych, że mają początek czasowy (kiedyś zostały przez ludzi wytworzone), podczas gdy idealne nie podpadają pod żadne określenia czasowe.

(3b) Koncepcja znaczenia jako pewnego przedmiotu pozwala w semantyce logicznej wprowadzać nazwy znaczeń (jeśli coś jest przedmiotem, to może mieć imię) oraz zmienne reprezentujące owe nazwy. Semantykę taką konstruuje Church rozwijając idee Fregego. Pojęcie sensu (niem. Sinn, ang. sense) charakteryzowane jest w tej teorii przez następujące warunki: 1° Denotacja (ang. denotation) jest funkcją sensu, tzn. gdy dany jest sens, gwarantuje to istnienie oraz jedyność odpowiedniej denotacji. Stąd każde dwa wyrażenia o tym samym sensie mają jedną i tę samą denotację, choć niekoniecznie, gdy mają tę samą denotację, mają ten sam sens; 2° Jeśli w wyrażeniu złożonym *W* zastąpi się jego część *C* wyrażeniem o tym samym sensie

co C, to sens W pozostanie ten sam; 3° Jeśli w wyrażeniu złożonym W zastąpi się jego część C wyrażeniem o tej samej denotacji, co C, to denotacja W pozostanie ta sama. Terminy „sens nazwy" oraz „sens zdania" używane są, odpowiednio, jako synonimy terminów „pojęcie" (ang. concept, niem. Begriff) i „sąd" (ang. proposition, niem. Gedanke).

(4) **Znaczenie jako struktura intensjonalna.** Pochodzące od Carnapa pojęcie znaczenia jako struktury intensjonalnej (dwa wyrażenia mają to samo znaczenie, gdy mają tę samą strukturę intencjonalną) wprowadzone jest (*Meaning and necessity* 1974) w serii kroków odnoszących się kolejno do następujących pojęć: 1. zdanie prawdziwe w systemie językowym, 2. równoważność (materialna), 3. prawda logiczna, 4. równoważność logiczna, 5. struktura intensjonalna.

1. Charakteryzuje się język S, do którego należą, oprócz stałych logicznych i zmiennych, pewne stałe pozalogiczne służące do budowania empirycznych zdań atomowych. Podaje się reguły prawdziwości dla zdań atomowych i zdań molekularnych. 2. Definiuje się równoważność (materialną) zdań jako tożsamość wartości logicznych, a także równoważność predykatów: $P = Q$ wtedy i tylko, gdy $\wedge x(Px \equiv Qx)$. 3. Określa się pojęcie prawdy logicznej (ang. L-truth) jako zdania prawdziwego w każdym tzw. opisie świata (ang. state-description). Określenie to pokrywa się z pojęciem *tautologii jako zdania spełnianego w każdym modelu danego języka. 4. Logiczna równoważność: A, B są logicznie równoważne w S wtedy i tylko, gdy formuła $A = B$ jest w S prawdą logiczną. 5. Definicja struktury intensjonalnej w swej zasadniczej myśli, jest następująca: Jeśli wyrażenia złożone A, B mają tę samą strukturę (*Izomorfizm), zaś odpowiadające sobie elementy tych wyrażeń są logicznie równoważne to A i B mają tę samą strukturę intensjonalną (inaczej: są intensjonalnie izomorficzne). Jeśli A i B są wyrażeniami niezłożonymi, to mówi się, że są intensjonalnie izomorficzne wtedy, gdy są logicznie równoważne.

(5) **Znaczenie jako sposób użycia wyrażenia.** Idea, żeby definiować znaczenie jako sposób użycia wyrażenia, pochodzi od Wittgensteina i jego kontynuatorów oraz (niezależnie) od Ajdukiewicza. Wiąże się ona także z neopozytywistyczną koncepcją znaczenia zdania jako sposobu weryfikacji.

(5a) Wittgenstein przyrównuje wyrażenia do narzędzi, a znaczenia wyrażeń do funkcji pełnionych przez narzędzia. Znać znaczenie zdania, to wiedzieć, jak go używać, czyli wiedzieć, w jakich okolicznościach jego użycie jest poprawne, a w jakich niepoprawne. Zdanie coś znaczy, jeśli istnieje sposób posłużenia się nim (ang. if it has a use). Uczenie się znaczeń odbywa się metodą treningu prowadzącego do powstania pożądanej dyspozycji, nie zaś metodą wyjaśnień: ten nauczył się słowa „cegła", kto reaguje na to słowo w sposób właściwy, np. podając cegłę na żądanie. Nie jest natomiast konieczne (wbrew twierdzeniu asocjacjonizmu), by na słowo „cegła" reagować przedstawieniem sobie cegły. Wszystkie narzędzia służą do wywoływania zmian w przedmiotach; słowa są narzędziami służącymi do wywoływania zachowań, czyli pewnych zmian w organizmach. Taka koncepcja znaczenia jest zarazem anty-asocjacjonistyczna, anty-Millowska i anty-Husserlowska: słowo „znaczenie" nie posiada desygnatu w żadnej dziedzinie (ani psychicznej, ani obiektywno-realnej, ani obiektywno-idealnej), ponieważ wbrew swej gramatycznej formie, nie jest nazwą: jest wyrwanym z kontekstu niesamodzielnym fragmentem takich zwrotów, jak „x ma znaczenie" lub „x oraz y mają to samo znaczenie" (tzn. wywołują takie same zachowania). W teorii tej, podobnie jak w behawiorystycznej filozofii umysłu, oponuje się przeciw tradycyjnie uznawanemu dualizmowi umysłu i ciała, który zaliczał rozumienia słów do zdarzeń zachodzących w umyśle (a więc w wewnętrznym, prywatnym świecie, niedostępnym dla obserwacji z zewnątrz), zaś zewnętrzne reakcje na słowa zaliczał do zdarzeń zachodzących w fizycznym, publicznie obserwowalnym świecie. Utożsamienie rozumienia z pewną reakcją na bodziec przekreśla ów dualizm, także w odniesieniu do procesów językowych. Związki między taką teorią języka a leżącą u jej podstaw filozofią umysłu pokazał Ryle w pracy *The concept of mind*, w której wyraża tendencje tzw. Filozofii Oksfordzkiej, powołującej się na Wittgensteina jako na swego inspiratora.

(5b) Podstawowym pojęciem w Ajdukiewicza teorii znaczenia jest pojęcie językowych dyrektyw uznawania zdań, a więc stosowania zdań w określonych okolicznościach. Dyrektywy te przyporządkowują zdania odpowiednim przeżyciom (a więc wewnętrznym reakcjom na określone sytuacje). Przeżyciu bólu np. dyrektywa języka polskiego przyporządkowuje zdanie „Boli", spostrzeżeniu pożaru zdanie „Pali się". Określony dyrektywą stosunek między przeżyciem (np. spostrzeżeniem pożaru) a odpowiednim zdaniem („Pali się") nosi nazwę wywodzenia, zaś odwrotność tego stosunku nazwę motywacji: zdanie wywodzi się z przeżycia, przeżycie motywuje akceptację zdania. Gdy motywującym przeżyciem jest spostrzeżenie, odnośna reguła uznawania należy do empirycznych dyrektyw znaczeniowych. Gdy zaś akceptacja zdania umotywowana jest przeżyciem polegającym na akceptacji jakiegoś innego zdania, odpowiednia reguła akceptacji (uznawania) zalicza się do dyrektyw dedukcyjnych; tak np. z przeżycia polegającego na akceptacji zdania „Polacy bywają kupcami" wywodzi się, wedle pewnej dyrektywy dedukcyjnej, zdanie „Kupcy bywają Polakami". Oprócz empirycznych i dedukcyjnych dyrektyw znaczeniowych wyróżnia się dyrektywy aksjomatyczne, które nakazują uznać pewne zdanie w sposób bezwzględny, niezależnie od sytuacji, np. zdanie postaci „Każde A jest A" należy uznać zawsze i bez zastrzeżeń, jeśli słowo „jest" rozumie

się zgodnie z jedną spośród dyrektyw aksjomatycznych języka polskiego.

Jeśli zdania Z i Z' mają dokładnie takie samo bezpośrednie umotywowanie oraz motywują bezpośrednio tę samą klasę zdań (czyli ta sama klasa zdań wywodzi się z Z i z Z'), to mówi się, że są równowartościowe inferencyjnie, czyli równoznaczne. I odwrotnie: Jeśli są równoznaczne, to wywodzą się z tego samego i to samo się z nich wywodzi. Równoznaczność składników zdania określa się następująco: A i B są równoznaczne wtedy i tylko, gdy każde dwa zdania $Z(A)$ i $Z(B)$ – różniące się tym jedynie, że w miejscu gdzie w jednym występuje A, w drugim występuje B – są zdaniami równoznacznymi.

Wymaga się przy tym, dla orzekania równoznaczności o składnikach zdania, by zachodziły one w danym zdaniu w sposób istotny, tj. by nie były podstawieniami za zmienne w jakimś prawie logiki. Poniechanie tego warunku prowadziłoby do konsekwencji, że żadne dwa wyrażenia nie są równoznaczne. Możliwy byłby bowiem wtedy zabieg następujący: w jakimś prawie logiki, np. $SaM \wedge MaP \rightarrow SaP$, w poprzedniku podstawiamy za S np. „bat", w następniku zaś dokonujemy kolejno dwóch różnych podstawień za S: raz ten sam termin „bat", drugim razem – równoznaczny z nim termin „bicz". Ponieważ za pierwszym razem następnik wynika logicznie z poprzednika (a więc wywodzi się zeń bezpośrednio), a za drugim razem nie wynika, trzeba by dojść do wniosku, że „bicz" i „bat" jako zawarte w zdaniach nie wywodzących się z tych samych zdań, nie są równoznaczne.

Po zdefiniowaniu równoznaczności samo znaczenie definiuje się następująco (przez abstrakcję): Znaczenie wyrażenia W w języku J jest to własność wspólna wszystkim i tylko tym wyrażeniom, które są w J równoznaczne z W.

Teoria Ajdukiewicza ogranicza się do badania wyrażeń będących zdaniami w sensie logicznym (tylko wobec takich można zajmować postawę uznawania) lub składnikami takich zdań, z pominięciem wypowiedzi ekspresyjnych, rozkazów, przyrzeczeń itp., które w teoriach z kręgu Wittgensteina są również przedmiotem analizy. Innymi słowy: znaczeniem zdefiniowanym przez Ajdukiewicza jest tylko znaczenie poznawcze.

(5c) Jeśli dokonać dalszego ograniczenia przedmiotu badań, biorąc spośród zdań w sensie logicznym tylko te pod uwagę, które rządzą się empirycznymi regułami znaczenia lub pozostają do tych ostatnich w pewnym stosunku logicznym (*Zdanie empiryczne), otrzyma się teorię znaną jako teoria weryfikacji. Jej myśli oddają słowa Carnapa (1936): „Gdybyśmy wiedzieli, czego potrzeba, aby dane zdanie uznać za prawdziwe, wiedzielibyśmy wówczas, jakie jest jego znaczenie. A jeśli dla dwóch zdań warunki, pod którymi mielibyśmy wziąć je za prawdziwe, są te same, wtedy zdania te mają to samo znaczenie... Wyrażenie języka jest znaczące (w tym rozumieniu), jeśli wiemy, jak go użyć, mówiąc o faktach empirycznych" (s. 420).

Podobna koncepcja sensu znajduje się w teorii języka pochodzącej od Ch. S. Peirce'a i nazwanej pragmatyzmem (później pragmatycyzmem), obecnie zaś rozwijanej pod mianem *operacjonizmu. Zob. też **sensowność empiryczna.**

Stosunki zakresowe między niektórymi pojęciami znaczenia. I. Każde wyrażenie konotujące, tj. znaczące w sensie (2), jest wyrażeniem znaczącym w sensie (3b). Ale nie na odwrót: w (2) bowiem nie przypisuje się znaczenia (konotacji) zdaniom, przypisuje się im natomiast znaczenie w (3b). II. Każde wyrażenie znaczące w sensie (3b) jest znaczące w sensie (4), tzn. posiada intensję, ale nie na odwrót: w (3b) bowiem nie mówi się o znaczeniu funktorów, którym teoria (4) też przypisuje intensję. III. Najszersze jest pojęcie (5a), obejmuje bowiem wszelkie pozostałe, tj. znaczenie wszelkich wyrażeń składających się na zdania w sensie logicznym (znaczenie poznawcze), a ponadto uwzględnia nie-poznawcze odmiany znaczenia.

Pozostaje wreszcie wspomnieć o najszerszym pojęciu znaczenia, które nie zostało uwzględnione w powyższym przeglądzie, ponieważ prawie nie występuje w piśmiennictwie polskim. Występuje natomiast w angielskim, gdzie jeden z odpowiedników słowa „znaczenie", mianowicie „meaning", oznacza niekiedy wszelką funkcję semantyczną, jak oznaczanie, denotowanie, konotowanie etc.

K. Ajdukiewicz: *Język i znaczenie*. [W:] *JiP*. T. 1; – – *O znaczeniu wyrażeń, ibid.*; Carnap: *MaN*; – – *Testability and meaning*. 1936; Church: *Math. log.*; Frege: *SuB*; E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. T. 2. 1900/1; R. Ingarden: *O dziele literackim*. 1960 (par. 1); J. Locke: *Rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*. T. 2. 1955 (1 wyd. 1690); Mill: *Syst. log.*; G. Ryle: *The theory of meaning*. [W:] *Br. phil.*; L. Wittgenstein: *Philosophical investigations*. 1953.

W. M.

znak.

(1) x jest znakiem dla członków grupy G, gdy x jest przedmiotem spostrzegalnym zmysłowo, przy czym między członkami grupy G istnieje umowa, wyraźna lub domyślna, ustanawiająca między x i jakimś przedmiotem y stosunek szeroko pojętego oznaczania (*Oznaczanie – (2)). Np. ruch milicjanta oznacza zakaz przejazdu, napis „sklep" oznacza sklep, itp. Oznaczanie jako stosunek między nazwą a jej desygnatami jest szczególnym przypadkiem tak pojętego oznaczania.

Warunek przyporządkowania x do y w drodze umowy jest warunkiem koniecznym bycia znakiem w omawianym sensie. Innego rodzaju relacje, np. stosunek przyczynowy, stosunek bycia objawem, choć podobne do relacji oznaczania w tym, że jakieś zdarzenie lub rzecz kieruje myśl ku innemu zdarzeniu lub rzeczy, nie upoważniają do nazywania jednego z członów stosunku mianem znaku; właściwym terminem może tu być „oznaka", „wskaźnik", itp. (np. gorączka jest oznaką stanu zapalnego).

Znak może być pojmowany jako pojedynczy konkretny przedmiot, zlokalizowny w czasie i przestrzeni (ang. sign-token, sign-event) lub jako klasa konkretnych znaków takich samych (w praktyce: prawie takich samych) co do

kształtu (ang. sign-design). W pierwszym przypadku mówi się o znakach-egzemplarzach, w drugim o znakach-typach.

Sposób funkcjonowania znaku jest przedmiotem dwóch teorii: asocjacyjnej oraz teorii intencji znaczeniowej. Ta ostatnia, powszechnie obecnie przyjmowana, przypisuje znakom tzw. przezroczystość semantyczną, tj. własność polegającą na tym, że znak kieruje uwagę ku temu, co oznacza, sam nie zatrzymując na sobie uwagi.

(2) Oprócz powyższego istnieje szersze pojęcie znaku, obejmujące oprócz znaków (1), czyli konwencjonalnych także to, co zostało wyżej określone jako wskaźniki lub oznaki. Do tego dołącza się jako trzecią odmianę, znaki ikoniczne – pełniące funkcje znaku na zasadzie podobieństwa do rzeczy oznaczanej (fotografia, makieta itp.). Rozpowszechnione w mowie potocznej pojęcie znaku przypomina najbardziej to szerokie pojęcie (2).

Wedle jeszcze innej propozycji terminologicznej (zob. Kotarbińska) zamiast „znak" (2) należałoby mówić „oznaka", przy czym odróżniałoby się oznaki ze względu na więź przyrodzoną (czyli oznaki z punktu (1)) oraz oznaki ze względu na więź konwencjonalną, tj. znaki w sensie (1), czyli konwencjonalne, czyli, jak mówi się również, symboliczne.

T. Czeżowski: *Logika*. 1949; J. Kotarbińska: *Pojęcie znaku*. „St. Log." VI 1957; Morris: *Foundations*.

W. M.

zupełność systemu. O zupełności systemu dedukcyjnego mówi się w kilku różnych znaczeniach, a ponadto rozważa się jej warianty wyróżnione za pomocą pewnych prefiksów (ω – zupełność, o – zupełność). Najczęściej spotyka się któreś z trzech wymienionych niżej pojęć zupełności.

(1) System S jest zupełnym zbiorem zdań zawierającym terminy stałe $P_1 \ldots P_n$ wtedy i tylko, gdy dla każdego zdania A zawierającego jako symbole stałe jedynie wyrażenia spośród $P_1 \ldots P_n$ prawdą jest, że $A \in S$ lub $(\sim A) \in S$. Innymi słowy, system jest zupełny, jeśli w przypadku dowolnego zdania (poprawnego w języku danego systemu) bądź samo to zdanie, bądź jego negacja jest twierdzeniem systemu. Określenie to stosuje się wyłącznie do zdań, a więc do wyrażeń, w których nie występują zmienne wolne. Nie da się ono zastosować do tych systemów, w których twierdzeniami są nie tylko zdania zamknięte (tj. zdania bez zmiennych wolnych). W językach tych systemów bywają takie funkcje (np. pojedyncza zmienna), że ani one, ani ich negacje nie są twierdzeniami systemu. Do takich systemów odnosi się następujące określenie zupełności:

(2) System jest zupełny wtedy i tylko, gdy każda poprawnie zbudowana formuła bądź jest twierdzeniem systemu, bądź po dołączeniu do jego aksjomatów wprowadzi doń sprzeczność.

Tak określoną własność systemu nazywa się niekiedy zupełnością w sensie Posta, który posługiwał się tym pojęciem w badaniach nad rachunkiem zdań. Łatwo pokazać, że każda formuła rachunku zdań spełnia powyższy warunek. Każda jest bowiem bądź *tautologią (więc twierdzeniem), bądź negacją tautologii (wtedy wprowadza sprzeczność), bądź funkcją, która przy pewnych wartościach zmiennych przechodzi w prawdę, a przy innych w fałsz. Formuły trzeciego rodzaju można tak przekształcać, stosując operację podstawiania, że zawsze otrzyma się sprzeczność. Z pojedynczej zmiennej p otrzymuje się sprzeczność, podstawiając za nią raz np. q i raz $\sim q$. W implikacji $p \rightarrow q$ podstawić można za p jakąś tautologię, otrzymując np. $(p \vee \sim p) \rightarrow q$, co pozwala znowu oderwać q, itd.

Definicje (1) i (2) są równoważne na gruncie tych języków, które zakładają rachunek zdań i przy rozumieniu zdania jako wyrażenia bez zmiennych wolnych.

Twierdzeniom rachunku kwantyfikatorów nie przysługuje ani zupełność (1), ani zupełność (2). Przykładem wyrażenia rachunku kwantyfikatorów takiego, że ani ono, ani jego negacja nie należą do systemu, może być każde zdanie określające liczbę indywiduów w dziedzinie, np. „Istnieją przynajmniej dwa indywidua": $\vee x \vee y \sim (x = y)$. Jest ono prawdziwe tylko w niektórych dziedzinach, fałszywe również tylko w niektórych, ani więc ono, ani jego negacja nie należą do zbioru zdań prawdziwych we wszelkich dziedzinach, czyli zbioru twierdzeń logiki.

Trzecie pojęcie zupełności wyraża się w polskim piśmiennictwie raczej słowem „pełność", z myślą o zaradzaniu wieloznaczności tego pierwszego słowa (zob. Ajdukiewicz, Grzegorczyk, Mostowski). W tekstach ang., a także niem. wyraża się to pojęcie takim samym terminem, jak pojęcia poprzednie. Pojęcie pełności wymaga odniesienia do pojęcia modelu, a dokładniej, zdania spełnionego (prawdziwego) w każdym modelu:

(3) System dedukcyjny logiki jest pełny wtedy i tylko, gdy z jego aksjomatów dadzą się wywieść wszystkie zdania będące zdaniami prawdziwymi w każdym modelu.

Tak określona pełność cechuje np. rachunek zdań i rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu.

Z innego jeszcze punktu widzenia wyróżnia się tzw. ω-zupełność i o-zupełność. System jest ω-zupełny, gdy mając jako swe tezy zdania $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$ ... etc., ma również jako tezę zdanie $\wedge x F(x)$, gdzie 0, 1, 2 ... etc. stanowią przeliczalny zbiór wartości zmiennej x. Rozszerzenie tego pojęcia również na zbiory nie będące przeliczalnymi daje tzw. o-zupełność (zob. Grzegorczyk).

Ajdukiewicz: *Log. pragm.*; Fraenkel, Bar-Hillel: *Set theory*; Grzegorczyk: *Log. mat.*; Mostowski: *Log. mat.*; A. Tarski: *Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences*. [W:] *LSM*.

W. M.

Indeks terminów

Indeks zawiera terminy hasłowe, tj. będące tytułami artykułów (haseł), wyróżnione pismem półgrubym, oraz terminy nie mające własnych haseł, lecz omówione w artykułach, do których odsyła „zob.". Także niektóre terminy hasłowe są zaopatrzone w tego rodzaju odsyłacze, kierujące do innych miejsc występowania (pozostałe odesłania znajdują się wewnątrz każdego z artykułów). Podanie terminologii angielskiej (kursywą), choć nie pretenduje do kompletności, nadaje indeksowi dodatkowo funkcję słowniczka polsko-angielskiego w zakresie terminologii logicznej.

a posteriori (zdanie, sąd) zob. **a priori**

a priori (*łac.*)

absurd, *self-contradiction*

Ajdukiewicz Kazimierz zob. **kategoria semantyczna; klasyfikacja rozumowań; logika indukcji; metodologia nauk dedukcyjnych; znaczenie**

aksjomat definicyjny, *comprehension axiom (the axiom of comprehension)*, w prostej teorii typów zob. **teoria typów, prosta; zbiór**

aksjomat ekstensjonalności, *extensionality axiom* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; rachunek zbiorów**

aksjomat ekstensjonalności w NF Quine'a zob. **teoria mnogości Quine'a**

aksjomat ekstensjonalności w prostej teorii typów zob. **teoria typów, prosta**

aksjomat indukcji, *principle of mathematical induction* zob. **arytmetyka**

aksjomat konstruowalności, *constructibility axiom* zob. **konstruktywizm**

aksjomat multyplikatywny, *multiplicative axiom* Russella zob. **pewnik wyboru**

aksjomat Nicoda-Łukasiewicza. *Nicod axiom* zob. też **rachunek zdań**

aksjomat nieskończoności, *infinity axiom* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; zbiór**

aksjomat nieskończoności w prostej teorii typów zob. **teoria typów, prosta**

aksjomat nieskończoności w systemie Gödla zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**

aksjomat pary, *pairing axiom*

aksjomat podzbiorów, *subsets axiom* zob. **aksjomat wyróżniania; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat potęgowy, *power-set axiom* zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**

aksjomat regularności, *regularity axiom* zob. **aksjomat ufundowania**

aksjomat sprowadzalności, *reducibility axiom* zob. **teoria typów, rozgałęziona**

aksjomat sumy, *sum-set axiom* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat sumy w systemie Gödla zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**

aksjomat tworzenia par, *pairing axiom* (aksjomat pary) zob. **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat ufundowania, *foundation axiom (Fundierungsaxiom* – za terminologią niem.) zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat wyboru, *choice axiom* zob. **pewnik wyboru; podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat wyróżniania, *subsets axiom* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat zastępowania, *replacement axiom (substitution axiom)* zob. też **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**

aksjomat zbioru podzbiorów, *power-set axiom* zob. **aksjomat zbioru potęgowego**

aksjomat zbioru potęgowego, *power-set axiom*

aksjomat zbioru pustego, *empty-set axiom*

aksjomaty, *axioms* zob. **system dedukcyjny**

aksjomatyczna dyrektywa znaczeniowa, *axiomatic meaning-rule* zob. **znaczenie**

aksjomatyka Peano, *Peano's postulates* zob. **arytmetyka**

aksjomatyka systemów Lewisa, *axiomatics of Lewis' systems* zob. **logiki wielowartościowe**

aksjomatyzowalność, *axiomatizability*

alef zero, *aleph null*

algebra Boole'a, *Boolean algebra*

algebra klas, *algebra of classes* zob. **algebra Boole'a**

algebra logiki, *algebra of logic*

algebra ogólna, *universal algebra* zob. **teoria modeli**

algebra relacji, *algebra of relations* zob. **algebra Boole'a**

algebra zbiorów, *algebra of classes* zob. **rachunek zbiorów**

algebra zbiorów Boole'a zob. **logika formalna**

algebra zdań, *algebra of propositions* zob. **algebra Boole'a**

algorytm, *algorithm*

allogeniczna teoria pytań, *allogenic theory of questions* zob. **logika pytań**

alternatywa, *disjunction* zob. też **rachunek zdań**

alternatywa intuicjonistyczna, *intuitionistic disjunction* zob. **intuicjonizm**

alternatywna postać normalna, *disjunctive normal form* zob. **postać normalna**

alternatywne teorie mnogości, *alternative set theories* zob. **zbiór**
amfibolia, *amphibology*
amfibologia, *amphibology* zob. **amfibolia**
ampliatio zob. **proprietates terminorum**
analiza logiczna, *logical analysis*
antylogizm, *antilogism*
antynaturalizm, *antinaturalism,* w metodologii nauk humanistycznych zob. **metodologia nauk**
antynomia, *antinomy* zob. **intuicjonizm; teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
antynomia Grellinga, *Grelling's paradox* zob. **antynomie w logice**
antynomia klas, *antinomy of classes* (antynomia Russella, *Russell's antinomy, Russell's paradox*) zob. **antynomie w logice**
antynomia kłamcy, *liar paradox* zob. **antynomie w logice**
antynomia Richarda, *Richard's paradox* zob. **antynomie w logice**
antynomia zbioru podzbiorów (antynomia Cantora), *Cantor's paradox* zob. **antynomie w logice**
antynomie, *antinomies* zob. **antynomie w logice; zbiór**
antynomie w logice, *logical antinomies*
antynomie w teorii mnogości zob. **podstawy matematyki i logiki**
antypsychologizm, *antipsychologism,* w kwestii zdań spostrzeżeniowych zob. **metodologia nauk empirycznych**
aplikowanie, *application* zob. **logika kombinatoryczna**
appellatio zob. **proprietates terminorum**
argument, *argument* zob. **logika kombinatoryczna**
argument funktora, *argument of functor* zob. **funktor**
argumentum ad auditorem zob. **erystyka**
argumentum ad baculum zob. **erystyka**
argumentum ad hominem zob. **erystyka**
argumentum ad ignorantiam zob. **erystyka**
argumentum ad misericordiam zob. **erystyka**
argumentum ad personam zob. **erystyka**
argumentum ad populum zob. **erystyka**
argumentum ad vanitatem zob. **erystyka**
argumentum ad verecundiam zob. **erystyka**
argumentum ex concesso zob. **erystyka**
ars combinatoria (*łac.*)
ars magna (*łac.*)
artes liberales zob. **klasyfikacja nauk**
Arystoteles zob. też **podstawy matematyki i logiki; prawo sprzeczności; sylogistyka zdań asertorycznych**
arytmetyka, *arithmetic*
arytmetyka liczb kardynalnych, *arithmetic of cardinal numbers* zob. **teoria mnogości**
arytmetyka liczb porządkowych, *arithmetic of ordinal numbers* zob. **teoria mnogości**
arytmetyka według intuicjonizmu zob. **intuicjonizm**
arytmetyzacja składni, *arithmetization of syntax*
asercja, *assertion*
automat, *automaton*
automat skończony, *finite automaton* zob. **automat**

Bacon Francis zob. **indukcja klasyczna Milla**
Bamalip zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Barbara zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Barbari zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Baroco zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Bayes Thomas zob. **wnioskowanie statystyczne**
baza empiryczna teorii, *empirical basis of a theory* zob. **metodologia nauk empirycznych**
Bernays P. zob. **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
Bernstein Siergiej N. zob. **teoria mocy zbiorów**
Beth Evert
bezpodstawność, *petitio prinicipii* zob. **petitio principii**
bezpośrednie błędne koło, *direct vitious circle* zob. **błędne koło w definiowaniu**
binegacja, *joint denial* zob. **rachunek zdań**
błąd drugiego rodzaju, *error of the second kind* zob. **wnioskowanie statystyczne**
błąd formalny, *formal fallacy*
błąd materialny, *falsity of a premiss*
błąd pierwszego rodzaju, *error of the first kind* zob. **wnioskowanie statystyczne**
błędne koło w definiowaniu, *vitious circle in a definition*
błędne koło w rozumowaniu, *vitious circle in a proof*
Bocardo zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Bolzano Bernard Placyd Jan Nepomuk zob. też **podstawy matematyki i logiki**
Boole George zob. też **algebra Boole'a; podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria relacji**
Bourbaki Nicolas zob. **podstawy matematyki i logiki**
Brentano Franz zob. **intencjonalność**
Bridgman Percy Williams zob. **podstawy matematyki i logiki**
Brouwer Luitzen Egbert Jan zob. też **intuicjonizm; podstawy matematyki i logiki**
Burali-Forti C. zob. **teoria mnogości**

calculus ratiocinator zob. **characteristica universalis**
calculus universalis zob. **characteristica universalis**
Calemes zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Calemos zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Camestres zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Camestros zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Cantor Georg zob. też **antynomie w logice; podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria mocy zbiorów**
Cantora pojęcie zbioru zob. **zbiór**
Carnap Rudolf zob. też **intensjonalność; podstawy matematyki i logiki; prawdopodobieństwo**
Cauchy Augustin Louis zob. **podstawy matematyki i logiki**

cecha charakterystyczna, *characteristic property*
cecha istotna, *essential property* zob. **cecha charakterystyczna**
Celarent zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Celaront zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Cesare zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Cesaro zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
charakter sądów matematycznych, *status of mathematical statements* zob. **podstawy matematyki i logiki**
characteristica universalis (*lac.*)
Church Alonzo zob. **teoria mnogości; znaczenie**
Chwistek Leon zob. też **teoria mnogości; teoria typów, prosta; teoria typów, rozgałęziona**
ciąg, *sequence*
ciąg wyborów, *choice sequence* zob. **intuicjonizm**
ciężar dowodzenia, *onus probandi (burden of proof)* zob. **onus probandi**
circulus in definiendo zob. **błędne koło w definiowaniu**
circulus vitiosus zob. **błędne koło w rozumowaniu**
Clavius Christophorus zob. **rachunek zdań**
Cohen Paul J. zob. **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości**
continuum, *continuum, (c)* zob. **teoria mocy zbiorów**
contradictio zob. **sprzeczność**
contradictio in adiecto (*lac.*)
copulatio zob. **proprietates terminorum**
Craig W. zob. **lemat Craiga**
Cramer Gabriel zob. **prawdopodobieństwo**
cudzysłów, *quotation*
Czeżowski Tadeusz zob. też **klasyfikacja rozumowań; wyrażenie okazjonalne**
częstościowa koncepcja prawdopodobieństwa, *frequency theory of probability* zob. **prawdopodobieństwo**
częściowy porządek, *partial order* zob. **teoria relacji**
część właściwa zbioru, *proper subset*
część wspólna zbiorów, *intersection of sets* zob. **rachunek zbiorów**

dana pytania, *datum quaestionis* zob. **pytanie**
Darapti zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Darii zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Datisi zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
datum quaestionis zob. **pytanie**
Dąmbska Izydora
De Finetti Bruno zob. **wnioskowanie statystyczne**
De Morgan August zob. też **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria relacji**
decyzja w warunkach niepewności, *decision making under uncertainty* zob. **wnioskowanie statystyczne.**
Dedekind Julius Wilhelm Richard zob. **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; zbiór nieskończony; zbiór skończony**
dedukcja, *deduction*
dedukcja naturalna, *natural deduction*
dedukcjonizm, *deductionism* zob. **metodologia nauk empirycznych**
dedukcyjna dyrektywa znaczeniowa, *deductive rule of meaning* zob. **znaczenie**
definicja, *definition*
definicja aksjomatyczna, *postulational definition, implicit d., axiomatic d.*
definicja analityczna, *analytic definition*
definicja arbitralna, *meaning postulate* zob. też **zdanie analityczne**
definicja cząstkowa, *partial definition* zob. też **zdanie analityczne**
definicja dejktyczna, *ostensive definition* zob. **definicja ostensywna**
definicja indukcyjna, *inductive definition, recursive d.*
definicja klasyczna, *classical definition*
definicja kontekstowa, *contextual definition, definition in use*
definicja metajęzykowa, *metalinguistic definition*
definicja niepredykatywna, *impredicative definition* zob **teoria typów, rozgałęziona; zbiór**
definicja niesprzeczna, *definition satisfying the condition of consistency* zob. **definicja normalna**
definicja nominalna, *nominal definition*
definicja normalna, *normal definition*
definicja operacyjna, *operational definition*
definicja ostensywna, *ostensive definition*
definicja pełna, *normal definition* zob. **definicja normalna**
definicja przez abstrakcję, *definition by abstraction*
definicja przez postulaty, *axiomatic definition* zob. **definicja aksjomatyczna**
definicja realna, *real definition* zob. **definicja nominalna**
definicja regulująca, *regulating definition*
definicja redukcyjna, *reductional definition*
definicja rekurencyjna, *recursive definition (inductive definition)* zob. **definicja indukcyjna**
definicja równościowa, *normal definition* zob. **definicja normalna**
definicja semantyczna, *word-thing definition*
definicja słownikowa, *word-word definition, lexical d.*
definicja sprawozdawcza, *analytic definition (lexical definition)* zob. **definicja analityczna**
definicja syntetyczna, *synthetic definition (stipulative definition)* zob. **definicja analityczna**
definicja tautologiczna, *vitious circle (in a definition)* zob. **błędne koło w definiowaniu**
definicja twórcza, *creative definiton* zob. też **systemy Leśniewskiego**
definicja w uwikłaniu, *axiomatic definition (implicit definition)* zob. **definicja aksjomatyczna**
definicja warunkowa, *conditional definition*
definicja, *definition,* według Leśniewskiego zob. **systemy**

Leśniewskiego
definicja wewnątrzjęzykowa, *intralinguistic definition* zob. **definicja metajęzykowa**
definicja wyraźna, *explicit definition*
definicje, w systemie dedukcyjnym zob. **system dedukcyjny**
definiendum, *definiendum*
definiens, *definiens*
definiowalność, *definability* zob. też **definicja normalna**
definiowalność semantyczna, *semantic definability* zob. **definiowalność**
definiowalność syntaktyczna, *syntactic definability* zob. **definiowalność**
definiowanie, *process of defining,* w naukach empirycznych zob. **metodologia nauk empirycznych**
denotacja, *denotation* zob. też **zakres**
denotacja wyrażeń, *denotation of an expression* zob. **kategoria semantyczna**
denotat, *denotatum* zob. **denotacja**
deskrypcja, *descriptio...*
deskrypcja nieokreślona, *indefinite description* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
deskrypt, *descriptum*
desygnat, *designatum*
desygnowanie, *designation*
diagramy Venna, *Venn's diagrams*
dialektyka, *dialectics* zob. **logika dialektyczna**
differentia speciffica, *lac.,* zob. też **definicja klasyczna**
Dilthey Wilhelm zob. **metodologia nauk**
Dimatis zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Disamis zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
dodawanie typów porządkowych, *addition of ordinal types* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
dodawanie zbiorów, *addition of sets* zob. **rachunek zbiorów**
doniosłość egzystencjalna, *existential import,* zdań ogólnych zob. **kwadrat logiczny**
dopełnienie zbioru, *complement of a set* zob. **rachunek zbiorów**
dostateczność estymatora zob. **wnioskowanie statystyczne**
dowodzenie, *demonstration (proof)* zob. też **klasyfikacja rozumowań**
dowodzenie nie wprost, *indirect proof* zob. **dowodzenie**
dowodzenie wprost, *direct proof* zob. **dowodzenie**
dowód, *proof*
dowód nie wprost, *indirect proof* zob. **intuicjonizm**
dowód, *proof,* według intuicjonizmu zob. **intuicjonizm**
drugie twierdzenie Gödla, *second Gödel's theorem* zob. **twierdzenie Gödla**
Du Bois Reymond Paul zob. **teoria mnogości**
dualność, *duality,* zob. też **algebra Boole'a**
Duns Szkot zob. **prawo Dunsa Szkota; rachunek zdań**
duży kwantyfikator, *universal quantifier* zob. **kwantyfikator ogólny**
dwoistość, *duality* zob. **algebra Boole'a**
dwu-jedność, *two-ity* zob. **intuicjonizm**
dychotomiczny podział logiczny, *dychotomic partition* zob. **podział logiczny**
dylemat, *dilemma*
dylemat destrukcyjny, prosty, *destructive dilemma, simple* zob. **dylemat**
dylemat destrukcyjny, złożony, *destructive dilemma, compound* zob. **dylemat**
dylemat konstrukcyjny, prosty *constructive dilemma, simple* zob. **dylemat**
dylemat konstrukcyjny, złożony, *constructive dilemma, compound* zob. **dylemat**
dyrektywa uznawania, *rule of acceptance* zob. **znaczenie**
dysjunkcja, *alternative denial, Sheffer stroke* (dot. symbolu dysjunkcji)
dysjunkcja Sheffera, *Sheffer's stroke* zob. **dysjunkcja**
dysjunkcyjna postać normalna, *disjunctive normal form* zob. **postać normalna**
działanie dwuargumentowe, *binary operation* zob. **teoria relacji**
działanie na liczbach kardynalnych, *operations on cardinals* zob. **teoria mocy zbiorów**
dziedzina, *domain* zob. **model semantyczny**
dziedzina relacji, *domain of relation* zob. też **teoria relacji**
dziedzina teorii, *domain of a theory*

efektywność asymptotyczna estymatora, *asymptotic effectivity of an estimator* zob. **wnioskowanie statystyczne**
efektywność estymatora, *effectivity of an estimator* zob. **wnioskowanie statystyczne**
egzystencjalna generalizacja, *existential generalization* zob. **deskrypcja**
Eilenberg Samuel zob. **podstawy matematyki i logiki**
eksperyment, *experiment*
eksperyment diagnostyczny, *diagnostic experiment* zob. **eksperyment**
eksperyment krzyżowy, *crucial experiment* zob. **eksperyment**
eksperyment rozstrzygający, *crucial experiment* zob. **eksperyment**
eksplikacja, *explication*
ekstensjonalność, *extensionality*
ekwiwokacja, *equivocation*
element maksymalny, *maximal element* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
element minimalny, *minimal element* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
element najmniejszy, *the least element* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
element największy, *the greatest element* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
empiryczna dyrektywa znaczeniowa, *empirical rule of*

meaning zob. **znaczenie**
empiryczna sensowność, *empirical meaningfulness* zob. **sensowność empiryczna**
empiryzm, *empiricism* zob. **metodologia nauk empirycznych; podstawy matematyki i logiki**
entymemat, *enthymeme*
epichejremat, *epicheirema*
episylogizm, *episyllogism* zob. **prosylogizm**
ε-operator (operator epsilonowy), *ε-operator (epsilon operator)* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
epsylon ontologiczny, *ontological epsilon* zob. **systemy Leśniewskiego**
erystyka, *eristic*
estymacja przedziałowa, *interval estimation* zob. **wnioskowanie statystyczne**
estymacja punktowa, *point estimation* zob. **wnioskowanie statystyczne**
estymator, *estimator* zob. **wnioskowanie statystyczne**
η-operator (eta-operator), *η-operator* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
Euler Leonhard zob. **teoria mnogości**
experimentum crucis zob. **eksperyment**
falsyfikacja, *falsification*
falsyfikowalność, *falsifiability* zob. **falsyfikacja**
Felapton zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Ferio zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Ferison zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Fesapo zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
Festino zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
figury sylogizmu, *syllogistic figures* zob. też **sylogistyka zdań asertorycznych**
filozofia a podstawy matematyki zob. **podstawy matematyki i logiki**
filozofia logiki, *philosophy of logic* zob. **podstawy matematyki i logiki**
filozofia matematyki, *philosophy of mathematics* zob. **podstawy matematyki i logiki**
filozofia nauki, *philosophy of science*
finityzm, *finitism* zob. **Hilbert** Dawid; **konstruktywizm**
fizykalizm, *physicalism* zob. **podstawy matematyki i logiki**
forma logiczna, *logical form* zob. **logika formalna**
formalizm, *formalism*, zob. też **Hilbert** Dawid
formalny schemat wnioskowania, *formal schema of inference* zob. **schemat wnioskowania**
formuła, *formula*
formuła atomiczna, *atomic formula*
formuła niepredykatywna, *impredicative formula* zob. **teoria typów, rozgałęziona**
formuła poprawnie zbudowana, *well-formed formula* (skrót: *wff*), klasycznego rachunku zdań zob. **rachunek zdań**
formuła, *formula*, w l. mn. *formulae* lub *formulas*, rachunku kwantyfikatorów zob. **rachunek kwantyfikatorów**
formuła zdaniowa, *propositional formula (sentential formula)* zob. **funkcja zdaniowa**
Fraenkel Abraham A. zob. **teoria mnogości; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**
Frege Gottlob Friedrich Ludwig zob. też **podstawy matematyki i logiki; pojęcie**
Fregego pojęcie zbioru zob. **zbiór**
Fresison zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
funkcja, *function* zob. też **relacja jednoznaczna; teoria relacji**
funkcja charakterystyczna, *characteristic function* zob. **funkcje rekurencyjne**
funkcja deskryptywna, *descriptive function*
funkcja dwu zmiennych, *function of two variables* zob. **teoria relacji**
funkcja jednoargumentowa, *one-place function* zob. **funkcja**
funkcja n-argumentowa, *n-place function* zob. **funkcja**
funkcja obliczalna, *computable function* zob. **funkcje rekurencyjne; rozstrzygalność**
funkcja odwracalna, *one-to-one function* zob. **teoria relacji**
funkcja ogólnie rekurencyjna, *general recursive function* zob. **funkcje rekurencyjne**
funkcja pierwotnie rekurencyjna, *primitive recursive function* zob. **funkcje rekurencyjne**
funkcja pragmatyczna, *pragmatic role (pragmatic function)* zob. **funkcja semiotyczna**
funkcja prawdziwościowa, *truth function*
funkcja propozycjonalna, *predicate-logic function* zob. też **predykat**
funkcja różnowartościowa, *one-to-one function* zob. **teoria relacji**
funkcja semantyczna, *semantic role (semantic function)* zob. **funkcja semiotyczna**
funkcja semiotyczna, *semiotic role (semiotic function)*
funkcja syntaktyczna, *syntactic role (syntactic function)* zob. **funkcja semiotyczna**
funkcja zdaniowa, *sentential function* zob. też **predykat**
funkcje rekurencyjne, *recursive functions*
funktor, *functor* zob. też **kategoria semantyczna; logika kombinatoryczna**
funktor ekstensjonalny, *extensional functor* zob. też **ekstensjonalność**
funktor funktorotwórczy, *functor-forming functor* zob. **funktor**
funktor intensjonalny, *intensional functor* zob. też **intensjonalność**
funktor nazwotwórczy, *name-forming functor* zob. **funktor**
funktor prawdziwościowy, *truth functor* zob. **funktor ekstensjonalny**
funktor temporalny, *functor of temporal logic* zob. **logika**

temporalna
funktor zdaniotwórczy, *sentence-forming functor* zob. **funktor; predykat**

gatunek (species), *species* zob. **definicja klasyczna; genus proximum; intuicjonizm**
Geiger Hans zob. **podstawy matematyki i logiki**
generalizacja egzystencjalna, *existential generalization* zob. **deskrypcja**
Gentzen Gerhard zob. też **podstawy matematyki i logiki; twierdzenie Herbranda-Gentzena**
genus, *genus* zob. **definicja klasyczna**
genus proximum (*łac.*)
gęsty porządek liniowy, *dense linear order* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
Gonseth Ferdinand zob. **podstawy matematyki i logiki**
Gödel Kurt zob. też **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria modeli; twierdzenie Gödla**
gramatyka, *grammar* zob. **lingwistyka matematyczna**
gramatyka funktorowa, *functorial grammar* zob. **logika kombinatoryczna**
gramatyka kategorialna, *categorial grammar* zob. **logika kombinatoryczna**
Gerlling K. zob. **antynomie w logice**

Hamilton William sir zob. **teoria mnogości**
Hao Wang zob. **teoria typów, rozgałęziona**
Hausdorff Felix zob. **pewnik wyboru**
Herbrand Jacques zob. **twierdzenie Herbranda-Gentzena**
Heyting Arend zob. **intuicjonizm; logiki wielowartościowe**
hierarchia liczb kardynalnych, *hierarchy of cardinal numbers* zob. **teoria mocy zbiorów**
Hilbert Dawid zob. też **podstawy matematyki i logiki; twierdzenia Gödla**
hipotetyzm, *hypothetism* zob. **metodologia nauk empirycznych**
hipoteza, *hypothesis*
hipoteza continuum, *continuum hypothesis*
homomorfizm relacji, *homomorphism of relations*
Hume David zob. **podstawy matematyki i logiki**
Husserl Edmund zob. też **pojęcie; przezroczystość semantyczna**

idem per idem zob. **błędne koło w definiowaniu**
identyczność, *identity*
identyczność, *identity*, w rachunku kwantyfikatorów zob. **rachunek kwantyfikatorów**
idiogeniczna teoria pytań, *idiogenic theory of questions (non-allogenic theory of questions)* zob. **logika pytań**
ignoratio elenchi (*łac.*)
ignotum per ignotum (*łac.*)
iloczyn kartezjański, *Cartesian product*
iloczyn relatywny relacji, *relative product of relations* zob. **teoria relacji**
iloczyn względny relacji, *relative product of relations* zob. **teoria relacji**
iloczyn zdarzeń, *intersection of events* zob. **prawdopodobieństwo**
ilościowa logika indukcji, *quantitative logic of induction* zob. **logika indukcji**
imię własne, *proper name*
implikacja, *implication* zob. też **rachunek zdań**
implikacja formalna, *formal implication*, (generalna) zob. **implikacja**
implikacja intuicjonistyczna, *intuitionistic implication* zob. **intuicjonizm**
implikacja kierunkowa w logice kierunkowej *(brak terminologii ang.)* zob. **logika dialektyczna**
implikacja materialna, *material implication (truth-functional implication)* zob. **implikacja**
implikacja relewantna, *relevant implication*
implikacja ścisła, *strict implication* zob. **implikacja; logika modalna; logiki wielowartościowe**
implikacja w logice stoików zob. **logika stoików**
indukcja eliminacyjna, *induction by elimination*
indukcja enumeracyjna, *enumerative induction* zob. **klasyfikacja nauk**
indukcja enumeracyjna niezupełna, *induction (by incomplete enumeration* – ta przydawka może być opuszczona)
indukcja matematyczna, *mathematical induction* zob. **intuicjonizm**
indukcja statystyczna, *statistical induction* zob. **wnioskowanie statystyczne**
indukcja zupełna, *complete induction*
indukcjonizm, *inductionism* zob. **metodologia nauk empirycznych**
indywiduum, *individual*
inicjacja w logice kierunkowej *(brak terminologii ang.)* zob. **logika dialektyczna**
inkluzja, *inclusion* zob. **rachunek zbiorów**
intencja znaczeniowa, niem. *Bedeutungsintention* zob. **znaczenie**
intencjonalizm (odmiana konstruktywizmu), *intentionalism* zob. **konstruktywizm**
intencjonalność, *intentionality* zob. też **znaczenie**
intensjonalność, *intensionality*
interpretacja mocna zdań ogólnych, *interpretation attributing the existential import to universal statements* zob. **kwadrat logiczny**
interpretacja słaba zdań ogólnych, *interpretation that does not attribute existential import to universal sentences* zob. **kwadrat logiczny**
interpretacja teorii, *interpretation of a theory*
interpretacje algebry Boole'a, *interpretations of Boolean algebra* zob. **algebra Boole'a**
intuicja, *intuition* zob. **intuicjonizm**

intuicjonistyczna teoria dowodu, *intuitionistic proof theory* zob. **logika intuicjonistyczna**
intuicjonistyczny rachunek zdań, *intuitionistic sentential calculus* zob. **logika intuicjonistyczna; logiki wielowartościowe**
intuicjonizm, *intuitionism*
inwersja, *inversion*
istnienie przedmiotów matematycznych, *existence of mathematical objects* zob. **intuicjonizm**
iteracja, *iteration* zob. **logika deontyczna**
iteracyjna koncepcja zbioru, *iteration theory of a set* zob. **zbiór**
izomorfizm intensjonalny, *intensional isomorphism* zob. **znaczenie**
izomorfizm relacji, *isomorphism of relations* zob. też **homomorfizm relacji**

James William zob. **prawda**
jasność, *clarity*
Jaśkowski Stanisław zob. też **dedukcja naturalna; logiki wielowartościowe** (ph Intuicjonistyczny rachunek zdań)
jednoczesne zaprzeczenie, *joint denial*
jednostkowa nazwa cudzysłowowa, *individual quotation-name* zob. **wyrażenie**
jednostronne zdanie redukcyjne, *unilateral reductive sentence* zob. **definicja redukcyjna**
Jeffreys Harold sir zob. **prawdopodobieństwo**
język, *language*
język automatu zob. **automat**
język ekstensjonalny, *extensional language* zob. **ekstensjonalność**
język formalny, *formal language* zob. **język sformalizowany**
język intensjonalny, *intensional language* zob. **intensjonalność**
język w matematyce zob. **intuicjonizm**
język naturalny, *natural language (ordinary language)* zob. **język**
język przedmiotowy, *object language*
język sformalizowany, *formalized language*
język sztuczny, *artificial language* zob. **język**
ι-operator, (jota-operator) *iota-operator* zob. **deskrypcja**

kanon jedynej różnicy, *method of difference* zob. **indukcja eliminacyjna Milla**
kanon jedynej zgodności, *method of agreement* zob. **indukcja eliminacyjna Milla**
kanon połączonych metod zgodności i różnicy, *method of agreement and difference* zob. **indukcja eliminacyjna Milla**
kanon reszt, *method of residues* zob. **indukcja eliminacyjna Milla**
kanon zmian współtowarzyszących, *method of concomitant variations* zob. **indukcja eliminacyjna Milla**
Kant Emmanuel zob. **intuicjonizm; podstawy matematyki i logiki**
kategoria funktorowa, *functor category* zob. **kategoria semantyczna**
kategoria ontologiczna, *ontological category* zob. **ontologia**
kategoria podstawowa, *basic category* zob. **kategoria semantyczna**
kategoria semantyczna, *semantic category (meaning category)* zob. też **systemy Leśniewskiego**
kategoria syntaktyczna, *syntactic category (grammatical category)* zob. **kategoria semantyczna**
kategoryczność teorii, *categoricity of a theory*
kategoryczność w mocy, *categoricity in power* zob. **kategoryczność teorii**
Keynes John Maynard zob. **prawdopodobieństwo**
klasa abstrakcji, *equivalence class* zob. też **definicja przez abstrakcję**
klasa kolektywna, *aggregate (mereological class)* zob. **systemy Leśniewskiego**
klasa równoważności, *equivalence class* zob. **klasy abstrakcji**
klasa w sensie von Neumanna, *von Neumann class* zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
klasa, *class,* w systemie Gödla zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
klasy według koncepcji Cantora zob. **zbiór**
klasyczna definicja prawdopodobieństwa, *classical theory of probability* zob. **prawdopodobieństwo**
klasyczna teoria prawdy, *classical theory of truth* zob. **prawda**
klasyczny rachunek logiczny, *classical logical calculus* zob. też **logika formalna**
klasyczny rachunek zdań, *classical sentential calculus*
klasyfikacja, *classification (partition)* zob. **podział logiczny**
klasyfikacja Ajdukiewicza zob. **klasyfikacja rozumowań**
klasyfikacja dziesiętna, *decimal classification* zob. **klasyfikacja nauk**
klasyfikacja Kleenego i Mostowskiego zob. **funkcje rekurencyjne**
klasyfikacja nauk, *classification of sciences*
klasyfikacja rozumowań, *classification of inferences (arguments)*
Kleene S. C. zob. **funkcje rekurencyjne**
Klein Felix zob. **podstawy matematyki i logiki**
koła Eulera, *Euler's diagrams* zob. **stosunki zakresów**
kombinator, *combinator* zob. **logika kombinatoryczna**
konceptualizm, *conceptualism* zob. też **podstawy matematyki i logiki**
konfirmacja, *confirmation*
konfirmacja hipotezy zob. **logika indukcji**

konieczność logiczna, *logical necessity*
koniunkcja, *conjunction* zob. **rachunek zdań**
koniunkcja Heglowska w logice kierunkowej zob. **logika dialektyczna**
koniunkcyjna postać normalna, *conjunctive normal form* zob. **postać normalna**
konkluzja, *conclusion,* sylogizmu zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
konkretyzm, *reism* zob. **reizm**
konotacja, *connotation* zob. też **znaczenie**
konotowanie, *connoting*
konsekwencja, *consequence*
konstrukcja, *construction* zob. **intuicjonizm**
konstruktywizm, *constructivism*
kontrapozycja, *contraposition*
kontrfaktyczny okres warunkowy, *counterfactual conditional*
konwencjonalizm, *conventionalism* zob. **metodologia nauk empirycznych; podstawy matematyki i logiki**
konwers relacji, *converse of a relation* zob. też **teoria relacji**
konwersja, *conversion*
Kotarbiński Tadeusz zob. też **ontologia; reizm**
Kreisel Georg zob. **podstawy matematyki i logiki**
Kripke Saul zob. **podstawy matematyki i logiki**
Kronecker Leopold zob. **intuicjonizm; podstawy matematyki i logiki**
krzyżowanie, *overlapping* zob. **stosunki zakresów**
Kuratowski Kazimierz zob. **pewnik wyboru; teoria zbiorów uporządkowanych**
kwadrat logiczny, *square of opposition* zob. też **logika tradycyjna**
kwadrat zbioru, *square of a set* zob. **iloczyn kartezjański zbiorów**
kwantyfikator duży, *universal quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator egzystencjalny, *existential quantifier* zob. **kwantyfikator szczegółowy; rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator mały, *existential quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator o ograniczonym zakresie, *restricted quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator ogólny, *universal quantifier* zob. też **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator szczegółowy, *existential quantifier* zob. też **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikator universalny, *universal quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
kwantyfikatorowa postać normalna, *prenex normal form* zob. **postać normalna**

Lakatos Imre zob. **podstawy matematyki i logiki**
λ-operator, *λ-operator,* (lambda-operator) zob. też **logika kombinatoryczna**
Lambert Johann Heinrich zob. **teoria mnogości**
Laplace Pierre Simon zob. **prawdopodobieństwo**
Leibnitz Gottfried Wilhelm zob. też **ars combinatoria; ars magna; podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości**
lemat, *lemma*
lemat Craiga, *Craig's interpolation lemma*
lemat Kuratowskiego-Zorna, *Zorn-Kuratowski lemma* zob. **teoria typów uporządkowanych**
Leśniewski Stanisław zob. też **teoria mnogości**
lewa dziedzina relacji, *domain of a relation* zob. **teoria relacji**
Lewis Clarence Irving zob. też **logiki wielowartościowe**
liczba graniczna, *limit number* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
liczba kardynalna, *cardinal number* zob. też **równoliczność zbiorów; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; teoria mocy zbiorów**
liczba początkowa, *initial number* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
liczba porządkowa, *ordinal number* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
liczba relatywna, *relational number* zob. **izomorfizm relacji**
Lindenbaum Alfred zob. **twierdzenie Lindenbauma**
lingwistyka matematyczna, *mathematical linguistics*
Locke John zob. **podstawy matematyki i logiki**
logicyzm, *logicism*
logiczny schemat wnioskowania zob. **schemat wnioskowania**
logika, *logic* zob. też **podstawy matematyki i logiki**
logika dedukcji, *deductive logic* zob. **logika formalna**
logika deontyczna, *deontic logic* zob. też **logika filozoficzna**
logika dialektyczna, *dialectic logic*
logika dialogowa, *dialogic logic*
logika doksastyczna, *doxastic logic* zob. **logika epistemiczna**
logika dyskusyjna, *disscussive logic* zob. **logika dialektyczna**
logika elementarna, *elementary logic* zob. **klasyczny rachunek logiczny**
logika epistemiczna, *epistemic logic*
logika erotetyczna, *erotetic logic* zob. **logika pytań**
logika filozoficzna, *philosophical logic*
logika formalna, *formal logic* zob. też **logika; Peirce** Charles Sanders
logika indukcji, *inductive logic, logic of induction*
logika intuicjonistyczna, *intuitionistic logic*
logika kierunkowa, *directional logic* zob. **logika dialektyczna**
logika kombinatoryczna, *combinatory logic*
logika konstruktywistyczna, *constructive logic* zob. **logika intuicjonistyczna**
logika matematyczna, *mathematical logic*

logika modalna, *modal logic*
logika przedmiotowa *(brak terminologii ang.)* zob. **logika formalna**
logika pytań, *logic of questions, erotetic logic*
logika stoików, *stoic logic*
logika symboliczna, *symbolic logic* zob. **logika matematyczna**
logika temporalna, *temporal logic, tense logic, chronological logic* – tylko przez niektórych (np. Rescher) używane zamiennie
logika tradycyjna, *traditional logic* zob. też **logika formalna**
logika zdań, *propositional logic (sentential logic, sentence logic, truth-function logic)* zob. **rachunek zdań**
logiki uogólnione, *generalized logics*
logiki wielowartościowe, *many-valued logics*
logiki z kwantyfikatorem uogólnionym, *logics with generalized quantifier* zob. **logiki uogólnione**
logiki z wyrażeniami nieskończenie długimi, *logics with infinitely long expressions* zob. **logiki uogólnione**
logistyka, *logistic* zob. też **logika matematyczna**
Lorentzen Paul zob. **teoria typów, rozgałęziona; logika dialogowa**
Lullus Raimund zob. **ars magna**

łańcusznik, *sorites* zob. **sorites**
łańcusznik progresywny, *progressive sorites* zob. **sorites**
łańcusznik regresywny, *regressive sorites (Goclenian sorites)* zob. **sorites**
Łukasiewicz Jan zob. też **logiki wielowartościowe; sylogistyka zdań asertorycznych; symbolika Łukasiewicza**

macierz adekwatna, *adequate matrix* zob. **logiki wielowartościowe**
Malcew Anatolij I. zob. **podstawy matematyki i logiki**
mały kwantyfikator, *existential quantifier* zob. **kwantyfikator szczegółowy**
maszyna Turinga, *Turing machine* zob. **automat**
matematyka, *mathematics* zob. **podstawy matematyki i logiki**
matematyka intuicjonistyczna, *intuitionistic mathematics* zob. **intuicjonizm**
matematyka w Comte'a klasyfikacji nauk zob. **klasyfikacja nauk**
matematyka według intuicjonizmu zob. **intuicjonizm**
mathesis universalis (*lac.*)
Mc Lane Saunders zob. **podstawy matematyki i logiki**
Meinong Alexius zob. **pojęcie**
mentalizm, *mentalism* (odmiana konstruktywizmu) zob. **konstruktywizm**
mereologia, *mereology* zob. **systemy Leśniewskiego**
metajęzyk, *metalanguage*
metalogika, *metalogic* zob. **metodologia nauk dedukcyjnych; podstawy matematyki i logiki**
metamatematyka, *metamathematics* zob. **metodologia nauk dedukcyjnych**
metateoria, *metatheory* zob. **metajęzyk**
metoda aksjomatyczna, *axiomatic method* zob. **konstruktywizm; logiki wielowartościowe**
metoda indukcyjna, *inductive method*
metoda interpretacji, *method of interpretation* zob. **logiki wielowartościowe**
metoda macierzowa, *matrix method* zob. **logiki wielowartościowe**
metoda momentów zob. **wnioskowanie statystyczne**
metoda tabel analitycznych, *method of analytic tableaux* zob. **Beth** Evert W.: **dedukcja naturalna**
metoda von Neumanna, *von Neumann's method* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
metoda zerojedynkowa, *truth-table method*
metodologia apragmatyczna, *apragmatic methodology* zob. **metodologia nauk**
metodologia nauk, *methodology of science* zob. też **logika**
metodologia nauk dedukcyjnych, *methodology of deductive sciences*
metodologia nauk empirycznych, *methodology of empirical sciences*
metodologia ogólna, *general methodology of science* zob. **metodologia nauk**
metodologia pragmatyczna, *pragmatic methodology* zob. **metodologia nauk**
metodologia szczegółowa *methodology of particular sciences* zob. **metodologia nauk**
Mill John Stuart zob. też **indukcja eliminacyjna Milla; indukcja klasyczna; podstawy matematyki i logiki**
minimalna logika temporalna, *minimal temporal logic* zob. **logika temporalna**
minimalny rachunek zdań, *minimal logic* zob. **logika intuicjonistyczna**
Mirimanoff D. zob. **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**
Mises Ludwig von zob. **prawdopodobieństwo**
ML zob. **teoria mnogości Quine'a**
mnożenie typów porządkowych, *multiplication of order types* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
mnożenie zbiorów, *multiplication of sets* zob. **rachunek zbiorów**
moc zbioru, *power of a set* zob. **liczba kardynalna; teoria mocy zbiorów**
mocna interpretacja zdań ogólnych, *interpretation attributing the existential import to universal statements* zob. **zdanie ogólne**
modalizm, *modalism* zob. **podstawy matematyki i logiki**
modalność deontyczna, *deontic modality* zob. **logika modalna**
modalny rachunek zdań, *modal propositional calculus* zob. **logika modalna**

model, *model*
model matematyczny, *mathematical model* zob. **model**
model nominalny, *theoretical model* zob. **model**
model realny, *simulation (simulating model)* zob. **model**
model semantyczny, *semantic model* zob. też **model**
model teoretyczny, *theoretical model* zob. **model**
model teorii, *model of a theory* zob. **model semantyczny**
modus ponendo ponens (*łac.*)
modus ponendo tollens (*łac.*)
modus ponens zob. **rachunek zdań**
modus tollendo ponens (*łac.*)
modus tollendo tollens (*łac.*)
modus tollens zob. **rachunek zdań**
Morgenstern Oskar zob. **wnioskowanie statystyczne**
Mostowski Andrzej zob. też **funkcje rekurencyjne**
motywacja, *motivation,* w Ajdukiewicza teorii znaczenia zob. **znaczenie**
możliwa definicja nominalna, *possible nominal definition* zob. **definicja analityczna**

nadrzędność, *A is superordinated to B*—A jest nadrzędne względem B zob. **stosunki zakresów**
najwyższe prawa myślenia, *first principles* zob. **pierwsze zasady**
należenie (elementów do zbioru) *elementhood (membership)* zob. **zbiór**
następnik liczby, *successor of a number* zob. **arytmetyka** (symbol S(x))
następnik liczby porządkowej, *successor of an ordinal number* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
następnik relacji, *the first term of a relation* zob. **teoria relacji**
naturalizm, *naturalism,* w metodologii nauk humanistycznych zob. **metodologia nauk**
naturalny podział logiczny, *natural classification* zob. **podział logiczny**
nauki aposterioryczne, *a posteriori sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki aprioryczne, *a priori sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki dedukcyjne, *deductive sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki empiryczne, *empirical sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki formalne, *formal sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki humanistyczne, *humanities* zob. **metodologia nauk**
nauki idiograficzne, *idiographic disciplines* zob. **klasyfikacja nauk; metodologia nauk**
nauki indukcyjne, *inductive sciences* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki nomotetyczne, *nomothetic disciplines,* (nomologiczne) zob. **klasyfikacja nauk; metodologia nauk**
nauki realne *(brak terminologii ang.)* zob. **klasyfikacja nauk**
nauki typologiczne, *typological disciplines* zob. **klasyfikacja nauk**
nazwa, *name*
nazwa abstrakcyjna, *abstract name*
nazwa bezprzedmiotowa, *empty name* zob. **nazwa pusta**
nazwa cudzysłowowa, *quotation name* zob. **cudzysłów; intensjonalność**
nazwa generalna, *universal name*
nazwa indywidualna, *individual name* zob. też **imię własne; stała indywiduowa**
nazwa jednostkowa, *singular term*
nazwa kolektywna, *collective name* zob. **nazwa zbiorowa**
nazwa konkretna, *non-abstract name*
nazwa konotatywna, *connotative name*
nazwa o intencji jednostkowej, *(brak terminologii ang.)* zob. **nazwa**
nazwa o intencji ogólnej, *(brak terminologi ang.)* zob. **nazwa**
nazwa ogólna, *general name*
nazwa okazjonalna, *indexical name*
nazwa pozorna, *onomatoid*
nazwa (predykat) nieostra, *vague name (predicate)* zob. **jasność wyrażeń**
nazwa pusta, *empty name*
nazwa zbiorowa, *collective name*
nazywanie, *naming*
negacja, *negation* zob. też **rachunek zdań**
negacja intuicjonistyczna, *intuitionistic negation* zob. **intuicjonizm**
negacja przynazwowa, *negation of a predicate* zob. **negacja**
negacja słaba, *weak negation,* w logice kierunkowej zob. **logika dialektyczna**
negatywne założenie pytania, *negative assumption of a question* zob. **pytanie**
Neumann John von zob. **teoria mnogości; teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla; teoria zbiorów uporządkowanych; wnioskowanie statystyczne**
Neyman Spława Jerzy zob. **wnioskowanie statystyczne**
NF zob. **teoria mnogości Quine'a**
nieaksjomatyzowalność, *non-axiomatizability* zob. **podstawy matematyki i logiki**
niedopowiedzenie (brak terminu angielskiego)
nieobciążoność asymptotyczna estymatora, *asymptotic unbiasness of an estimator* zob. **wnioskowanie statystyczne**
nieskończoność aktualna, *actual infinity* zob. **zbiór**
niesprzeczność, *consistency* zob. **intuicjonizm; niesprzeczność systemu**
niesprzeczność systemu, *consistency of a system*
niezależność formuł, *independence of formulas*
niezawodny schemat wnioskowania, *valid schema of inference* zob. **schemat wnioskowania**

nominalizm, *nominalism* zob. też **podstawy matematyki i logiki**
nominalizm umiarkowany, *moderate nominalism* zob **podstawy matematyki i logiki**
non sequitur zob. **błąd formalny**
nonsens, *nonsense*
notacja Łukasiewicza, *Polish notation* zob. **symbolika Łukasiewicza**
numery Gödla, *Gödel's numbers*

obalalność, *falsifiability*
obalalność empiryczna, *empirical falsifiability* zob. **obalalność**
obiektywizm, (odmiana konstruktywizmu) *objectivism* zob. **konstruktywizm**
obraz zbioru wedle relacji R, *image of a set under a relation* zob. też **teoria relacji**
obustronne zdanie redukcyjne, *bilateral reductive sentence* zob. **definicja redukcyjna**
obwersja, *obversion*
Ockham Wilhelm zob. **supozycja**
odejmowanie zbiorów, *subtraction of sets* zob. **rachunek zbiorów**
odpowiedź bezpośrednia, *direct answer* zob. **pytanie**
odpowiedź całkowita, *complete answer* zob. **pytanie**
odpowiedź częściowa, *partial answer* zob. **pytanie**
odpowiedź nieścisła, *inexact answer* zob. **pytanie**
odpowiedź niewłaściwa, *improper answer* zob. **pytanie**
odpowiedź pośrednia, *indirect answer* zob. **pytanie**
odpowiedź ścisła, *exact answer* zob. **pytanie**
odpowiedź właściwa, *proper answer* zob. **pytanie**
odpowiedź znosząca negatywne założenie pytania, *answer abolishing the negative assumption of a question* zob. **pytanie**
odpowiedź znosząca pozytywne założenie pytania, *answer abolishing the positive assumption of a question* zob. **pytanie**
odróżnianie dwu obiektów, *discrimination* zob. **intuicjonizm**
odwrotne prawo podwójnego przeczenia, *converse law of double negation* zob. **logika dialogowa**
odwzorowanie zbioru, *mapping of a set* zob. **funkcja**
ogólna teoria klas, *general theory of classes* zob. **teoria typów, prosta**
okres warunkowy, *conditional* zob. **paradoks implikacji**
onomatoid, *onomatoid* zob. **nazwa pozorna**
ontologia, *ontology* zob. też **systemy Leśniewskiego**
onus probandi (*łac.*)
operacja minimum, *minimum operation* zob. **funkcje rekurencyjne**
operacjonizm, *operationism* zob. też **podstawy matematyki i logiki**
operator, *operator* zob. też **kategoria semantyczna**
operator abstrakcji, *abstraction operator*
operator deskrypcyjny, *iota-operator (description operator)* zob. **deskrypcja**
orzeczenie, *predicate* zob. **predykat**
orzecznik, *predicate noun* lub *predicate adjective*, w zależności od kategorii danego orzecznika
orzecznik autologiczny, *autological predicate* zob. **orzecznik autosemantyczny**
orzecznik autosemantyczny, *autosemantic predicate*
orzecznik heterologiczny, *heterological predicate* zob. **orzecznik heterosemantyczny**
orzecznik heterosemantyczny, *heterosemantic predicate*
orzecznik uniwersalny, *universal predicate*
orzecznik zerowy, *empty predicate*
osnowa pytania, *datum questionis* zob. **pytanie**
oznaczanie, *referring, standing for*
oznaka, *index (sign, token, symptom)* zob. też **znak**
o-zupełność, *o-completeness* zob. **zupełność systemu**

pamięć maszyny, *memory (storage) of a machine* zob. **automat**
para uporządkowana, *ordered pair, ordered couple*
paradoks implikacji, *paradox of material implication*
paralogizm, *paralogism* zob. też **sofizmat**
parametr statystyczny, *statistical parameter* zob. **wnioskowanie statystyczne**
partykuła pytajna, *question marker (interrogative particle)* zob. **pytanie**
Peano Giuseppe zob. też **arytmetyka; podstawy matematyki i logiki; symbolika Peano-Russella**
Peirce Charles Sanders zob. też **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria relacji**
pełność, *completeness* zob. **zupełność systemu**
pełność definicyjna, *definitional completeness (functional completeness)* zob. **rachunek zdań**
petitio principii (*łac.*)
pewnik, *axiom, principle*
pewnik abstrakcji, *comprehension axiom* zob. **teoria mnogości Quine'a; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**
pewnik wyboru, *axiom of choice* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; teoria mocy zbiorów; teoria typów, prosta; teoria zbiorów uporządkowanych; twierdzenie Zermeli; zbiór nieskończony; zbiór skończony**
Piaget Jean zob. **podstawy matematyki i logiki**
pierwsze twierdzenie Gödla, *the first Gödel's theorem* zob. **twierdzenie Gödla**
pierwsze zasady, *first principles*
Piotr Hiszpan zob. **significatio; supozycja**
Platon zob. **podstawy matematyki i logiki**
platonizm, *platonism* zob. też **podstawy matematyki i logiki**
podporządkowanie, *subalternation* zob. **kwadrat logiczny**
podprzeciwieństwo, *subcontrariety* zob. **kwadrat logiczny**

podrzędność, *subordination* zob. **stosunki zakresów**
podstawianie, *substitution* zob. **zmienna**
podstawy logiki, *foundations of logic* zob. **podstawy matematyki i logiki**
podstawy matematyki, *foundations of mathematics* zob. **Hilbert** Dawid; **logika matematyczna; podstawy matematyki i logiki**
podstawy matematyki i logiki, *foundations of mathematics, ... of logic*
podstawy teorii mnogości, *foundations of set theory* zob. **zbiór**
podzbiór właściwy, *proper subset* zob. **część właściwa zbioru**
podział logiczny, *partition* zob. też **klasy abstrakcji; teoria relacji**
podział nazw, *partition of names* zob. **nazwa**
Poincaré Henri zob. **intuicjonizm; metodologia nauk empirycznych**
pojęcie *concept (niem. Begriff)*, u Fregego zob. też **zbiór**
pojęcie w sensie logicznym, *concept* zob. **pojęcie**
pojęcie w sensie psychologicznym, *idea* zob. **pojęcie**
pole relacji, *field of a relation* zob. też **teoria relacji**
polisylogizm, *polysyllogism*
poprzednik liczby porządkowej, *predecessor of an ordinal number* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
poprzednik relacji, *the first term of a relation* zob. **teoria relacji**
populacja, *population* zob. **wnioskowanie statystyczne**
porównawcza logika indukcji, *comparative logic of induction* zob. **logika indukcji**
porządek częściowy, *partially ordering relation* zob. **relacja częściowo porządkująca; teoria zbiorów uporządkowanych**
porządek dobry, *well-ordering relation* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
porządek liniowy, *linearly ordering relation* zob. **relacja porządkująca; teoria relacji; teoria zbiorów uporządkowanych**
Post Emil zob. też **logiki wielowartościowe; zupełność systemu**
postać normalna, *normal form*
postulat, *postulate* zob. **zdanie analityczne**
postulat Bayesa, *Bayes' postulate* zob. **wnioskowanie statystyczne**
postulat teoretyczny, *theoretical postulate* zob. **sensowność empiryczna**
postulat znaczeniowy, *meaning postulate* zob. też **definicja arbitralna**
pośrednie błędne koło, *indirect vitious circle* zob. **błędne koło w definiowaniu**
potwierdzalność, *confirmability* zob. **zdanie empiryczne**
powszechniki, *universals* zob. **uniwersalia**
pozytywne założenie pytania, *positive assumption of a question* zob. **pytanie**
pragmatyczna teoria prawdy, *pragmatical theory of truth* zob. **prawda**
pragmatyka, *pragmatics* zob. też **semiotyka**
pragmatyzm, *pragmatism* zob. **Peirce** Charles Sanders
prakseologia, *praxiology* zob. **logika**
prawa dziedzina relacji, *counterdomain (inverse domain) of a relation* zob. **teoria relacji**
prawa logiczne, *logical truth*, rachunku kwantyfikatorów zob. **logika formalna**
prawda, *truth*
prawda faktyczna, *factual truth* zob. **podstawy matematyki i logiki**
prawda logiczna, *logical truth*, w teorii Carnapa zob. też **znaczenie**
prawda rozumowa, *truth of reason* zob. **podstawy matematyki i logiki**
prawdopodobienstwo, *probability*
prawdopodobieństwo a posteriori, *a posteriori probability* zob. **prawdopodobieństwo**
prawdopodobieństwo aprioryczne, *a priori probability* zob. **prawdopodobieństwo**
prawdopodobieństwo logiczne, *logical probability* zob. **prawdopodobieństwo**
prawdopodobieństwo matematyczne, *mathematical probability* zob. **prawdopodobieństwo**
prawdopodobieństwo psychologiczne zob. **prawdopodobieństwo**
prawdopodobieństwo subiektywne, *subjective probability* zob. **prawdopodobieństwo; wnioskowanie statystyczne**
prawdopodobieństwo warunkowe, *conditional probability* zob. **prawdopodobieństwo; wnioskowanie statystyczne**
prawdopodobieństwo względne, *conditional probability* zob. **prawdopodobieństwo**
Prawitz Dag zob. **podstawy matematyki i logiki**
prawo Clavius, *Clavius law* zob. **rachunek zdań**
prawo De Morgana, *De Morgan's law* zob. **rachunek zdań**
prawo De Morgana dla rachunku kwantyfikatorów zob. **rachunek kwantyfikatorów**
prawo Dunsa Szkota, *Duns Scotus'law* zob. też **rachunek zdań**
prawo dylematu destrukcyjnego, *law of destructive dilemma* zob. **dylemat; rachunek zdań**
prawo dylematu konstrukcyjnego, *law of constructive dilemma* zob. **dylemat; rachunek zdań**
prawo eksportacji, *law of exportation* zob. **rachunek zdań**
prawo importacji, *law of importation* zob. **rachunek zdań**
prawo logiczne, *law of logic (logical law)* klasycznego rachunku zdań zob. **rachunek zdań**
prawo nauki, *scientific law* zob. **hipoteza**
prawo (nie) sprzeczności, *law of contradiction* zob. **pierwsze zasady**
prawo Peirce'a, *Peirce's law* zob. **logika dialogowa; logika intuicjonistyczna**
prawo podwójnego przeczenia, *law of double negation*

zob. **rachunek zdań**
prawo przemienności, *law of commutativity* zob. **rachunek zdań**
prawo redukcji do absurdu, *law of reductio ad absurdum* zob. **rachunek zdań**
prawo sprzeczności, *law of contradiction*
prawo sylogizmu hipotetycznego, *law of hypothetical syllogism* zob. **rachunek zdań**
prawo symplifikacji, *law of simplification* zob. **rachunek zdań; zdanie analityczne**
prawo tożsamości, *law of identity* zob. **pierwsze zasady**
prawo transpozycji prostej, *law of transposition* zob. **rachunek zdań**
prawo wyłączonego środka, *law of excluded middle (tertium non datur principle)* zob. **logika dialogowa; logika intuicjonistyczna; pierwsze zasady**
predykat, *predicate*
predykat jednoargumentowy, *one-place predicate (unary predicate, monadic predicate)* zob. **predykat**
predykatywna teoria mnogości, *predicative set theory* zob. **zbiór**
principium identitatis indiscernibilium (*łac.*)
problem indukcji, *problem of induction* zob. **logika indukcji**
produkt zbiorów, *Cartesian product* zob. **iloczyn kartezjański zbiorów**
program Hilberta, *Hilbert's program* zob. **Hilbert** Dawid; **twierdzenie Gödla**
proprietates terminorum (*łac.*)
prototetyka, *prototethics* zob. **systemy Leśniewskiego**
próba statystyczna, *random sample* zob. **wnioskowanie statystyczne**
przeciwdziedzina relacji, *counterdomain (inverse domain) of a relation* zob. też **teoria relacji**
przeciwieństwo, *contrariety* zob. **kwadrat logiczny**
przedmiot idealny, *ideal object* zob. **znaczenie**
przedmiot intencjonalny, *intentional object* zob. **znaczenie**
przekładalność, *translatability*
przesłanka mniejsza, *minor premiss* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
przesłanka sylogizmu, *premiss of a syllogism* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
przesłanka większa, *major premiss* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
przezroczystość semantyczna, *semantic transparency* zob. też **intencjonalność; znak**
psychologizm, *psychologism,* w kwestii zdań spostrzeżeniowych zob. **metodologia nauk empirycznych**
psychologizm w logice, *psychologism in logic*
Putnam Hilary zob. **podstawy matematyki i logiki**
pytanie, *question*
pytanie dopełnienia, *complementation question (which question)* zob. **pytanie**
pytanie niewłaściwe, *improper question* zob. **pytanie**
pytanie rozstrzygnięcia, *decision question (whether question)* zob. **pytanie**
pytanie sugestywne, *suggestive question* zob. **pytanie**
pytanie źle postawione, *question improperly posed* zob. **pytanie**

Quine Willard van Orman zob. **intensjonalność; teoria mnogości; teoria mnogości Quine'a**

rachunek funkcyjny, *functional calculus (predicate calculus)* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek Gentzena, *Gentzen's inferential calculus, sequent calculus* zob. też **natural deduction**
rachunek kwantyfikatorów, *quantificational calculus (predicate calculus)* zob. też **logika formalna**
rachunek kwantyfikatorów drugiego rzędu, *predicate logic of second order* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu, *predicate logic of first order (first order logic)* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek kwantyfikatorów trzeciego rzędu, *predicate logic of third order* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek kwantyfikatorów z identycznością, *predicate logic with identity* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek kwantyfikatorów z identycznością i funkcjami, *predicate logic with identity and functions* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek lambda-konwersji, *calculus of lambda-conversion* zob. **logika kombinatoryczna**
rachunek nazw, *calculus of names*
rachunek predykatów, *predicate calculus (predicate logic)* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
rachunek relacji, *calculus of relations* zob. **teoria relacji**
rachunek zbiorów, *calculus of classes* zob. też **teoria mnogości**
rachunek zdań, *sentential calculus* zob. też **logika formalna**
R-owy obraz zbioru, *image of a set under a relation* zob. **obraz zbioru wedle relacji R; teoria relacji**
Ramsey Frank P. zob. **antynomie w logice; teoria typów, prosta; teoria typów, rozgałęziona; wnioskowanie statystyczne**
realizacja, *realization,* modelu nominalnego zob. **model**
realizm umiarkowany, *moderate realism* zob. **podstawy matematyki i logiki**
realizm skrajny, *extreme realism* zob. **podstawy matematyki i logiki**
redukcja, *reduction*
redukcja nie wprost, *indirect reduction* zob. **redukcja trybów**
redukcja trybów, *reduction of syllogisms*
redukcja wprost, *direct reduction* zob. **redukcja trybów**
redukcjonizm, *reductionism* zob. **metodologia nauk empi-**

rycznych
reguła dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego, *rule of introducing the existential quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego, *rule of introducing the universal quantifier* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
reguła dowodzenia, *inference rule (transformation rule)* zob. **system dedukcyjny**
reguła formowania, *formation rule* zob. **syntaktyka**
reguła generalizacji, *generalization rule* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
reguła korespondencji, *rule of correspondence* zob. **sensowność empiryczna**
reguła odrzucania, *rejection rule*, w sylogistyce zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
reguła pierwotna, *primitive rule* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
reguła przekształcania, *transformation rule* zob. **język; syntaktyka**
reguła przyporządkowania, *rule of correspondence* zob. **sensowność empiryczna**
reguła tworzenia (formowania), *formation rule* zob. **język**
reguła wnioskowania, *inference rule* zob. **schemat wnioskowania**
reguła wtórna, *derived rule* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
Reichenbach Hans zob. **prawdopodobieństwo**
reizm, *reism*
relacja, *relation* zob. też **teoria relacji**
relacja antysymetryczna, *antisimmetric relation* zob. też **relacja częściowo porządkująca; teoria relacji**
relacja asymetryczna, *asymmetric relation* zob. też **teoria relacji**
relacja częściowo porządkująca, *partially ordering relation* zob. też **teoria relacji**
relacja dwuczłonowa, *binary relation* zob. **para uporządkowana**
relacja jednoznaczna, *many-one relation* zob. też **relacja wzajemnie jednoznaczna; teoria relacji**
relacja nieprzynależenia elementu do zbioru, *denial of membership* zob. **rachunek zbiorów**
relacja obliczalna, *computable relation* zob. **funkcje rekurencyjne**
relacja odwrotna, *converse of a relation* zob. **konwers relacji; teoria relacji**
relacja odwrotnie jednoznaczna, *one-many relation* zob. **teoria relacji**
relacja pełna, *universal relation* zob. **teoria relacji**
relacja pierwotnie rekurencyjna, *primitive recursion relation* zob. **funkcje rekurencyjne**
relacja porządkująca, *order relation* zob. też **teoria relacji**
relacja przechodnia, *transitive relation* zob. też **relacja częściowo porządkująca; teoria relacji**
relacja przeciwsymetryczna, *antisimmetric relation* zob. **relacja antysymetryczna**
relacja przeciwzwrotna, *irreflexive relation* zob. też **teoria relacji**
relacja pusta, *empty relation* zob. **teoria relacji**
relacja rekurencyjnie przeliczalna, *recursively denumerable relation* zob. **funkcje rekurencyjne**
relacja ograniczona do pewnego zbioru, *relation restricted to a set* zob. **teoria relacji**
relacja równościowa, *equivalence relation* zob. **relacja równoważnościowa**
relacja równoważnościowa, *equivalence relation* zob. też **teoria relacji**
relacja spójna, *connected relation* zob. też **teoria relacji**
relacja symetryczna, *symmetric relation* zob. też **teoria relacji**
relacja uniwersalna, *universal relation* zob. **teoria relacji**
relacja wieloczłonowa, *many-termed relation* zob. **teoria relacji**
relacja wielo-jednoznaczna, *many-one relation* zob. **relacja jednoznaczna**
relacja wzajemnie jednoznaczna, *one-one relation*
relacja zwrotna, *reflexive relation* zob. też **relacja częściowo porządkująca; teoria relacji**
relatywny funktor deontyczny, *relative deontic functor* zob. **logika deontyczna**
reprezentowanie, *representing (of an expression by a variable)*
Richard J. zob. **antynomie w logice**
Rickert Heinrich zob. **metodologia nauk**
Riemann Georg Friedrich Bernhard zob. **podstawy matematyki i logiki**
Robinson Abraham zob. **podstawy matematyki i logiki**
rodzaj, *genus* zob. **definicja klasyczna**
Romahnowa Seweryna
rozgałęziona teoria typów, *ramified theory of types* zob. **teoria typów, prosta**
rozkład a priori, *a priori distribution* zob. **wnioskowanie statystyczne**
rozłączny podział logiczny, *disjunctive partition* zob. **podział logiczny**
rozłożony termin, *distributed term*
rozstrzygalność, *decidability* zob. też **funkcje rekurencyjne**
rozumowanie, *reasoning (argument)* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozumowanie dedukcyjne, *deductive reasoning* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozumowanie odkrywcze, *inventive reasoning* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozumowanie progresywne, *progressive reasoning* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozumowanie redukcyjne, *reductive reasoning* zob. **klasy-**

fikacja rozumowań
rozumowanie regresywne, *regressive reasoning* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozumowanie uzasadniające, *substantiating inference* zob. **klasyfikacja rozumowań**
rozwinięcie, *spread* zob. **intuicionizm**
równokształtność, *equiformity*
równoliczność zbiorów, *equipollence, equivalence of sets*
równość, *equality* zob. **relacja równoważnościowa; teoria relacji**
równoważność, *equivalence* zob. też **rachunek zdań; relacja równoważnościowa; stosunki zakresów; teoria relacji**
równoważność formalna, *formal equivalence* zob. **równoważność**
równoważność implikacyjna, *material equivalence* zob. **równoważność**
równoważność inferencyjna, *mutual deducibility* zob. **równoważność**
równoważność logiczna, *logical equivalence* zob. **równoważność**
równoważność logiczna w teorii Carnapa zob. **znaczenie**
równoważność materialna, *material equivalence* zob. **równoważność; znaczenie**
równoważność predykatów, *equivalence of predicates* zob. **znaczenie**
równoznaczność, *synonymy* zob. też **znaczenie**
różnica gatunkowa, *specific difference* zob. **definicja klasyczna**
różnica symetryczna zbiorów, *symmetric difference of sets* zob. **rachunek zbiorów**
różnica zbiorów, *difference of sets* zob. **rachunek zbiorów**
Russell Bertrand Arthur William zob. też **antynomie w logice; intensjonalność; pewnik wyboru; symbolika Peano-Russella; teoria mnogości**
rząd typu, *order of a type* zob. **teoria typów, prosta**
rząd wyrażenia, *order of an expression* zob. **teoria typów, prosta**

Savage Leonard J. zob. **wnioskowanie statystyczne**
sąd, *statement, proposition*
sąd a posteriori, *a posteriori statement* zob. **podstawy matematyki i logiki**
sąd a priori, *a priori statement* zob. **podstawy matematyki i logiki**
sąd analityczny, *anylytic statement* zob. **podstawy matematyki i logiki**
sąd syntetyczny, *synthetic statement* zob. **podstawy matematyki i logiki**
sąd w sensie logicznym, *proposition* zob. **sąd**
sąd w sensie psychologicznym, *judgment* zob. **sąd**
schemat indukcji, *schema of mathematical induction* zob. **arytmetyka**
schemat inferencyjny, *inference schema* zob. **schemat wnioskowania**
schemat poprawnego wnioskowania, *valid-inference schema* zob. **logika formalna**
schemat wnioskowania, *inference schema*
Schröder Ernst zob. **podstawy matematyki i logiki; teoria mnogości; teoria relacji**
sekwencja, *sequent* zob. **rachunek Gentzena**
semantyka, *semantics* zob. też **semiotyka**
semantyka czysta, *pure semantics* zob. **semantyka**
semantyka empiryczna, *empirical semantics* zob. **semantyka**
semantyka ogólna, *general semantics* zob. **semantyka**
semantyka opisowa, *descriptive semantics* zob. **semantyka**
semantyka teoretyczna, *theoretical semantics* zob. **semantyka**
semiotyka, *semiotics, semiotic*
semiotyka logiczna, *logical semiotics* zob. **logika**
sens, *sense*, w teorii Churcha zob. **znaczenie**
sensowność, *meaningfulness*
sensowność empiryczna, *empirical meaningfulness*
Sheffer M. H. zob. **dysjunkcja**
significatio (*lac.*)
Skinner Burrhus F. zob. **metodologia nauk empirycznych**
składnia logiczna, *logical syntax*
składnia, *syntax*, rachunku kwantyfikatorów zob. **rachunek kwantyfikatorów**
składnik analityczny, *analytic component*, zdania analitycznego zob. **zdanie analityczne**
składnik syntetyczny, *synthetic component*, zdania analitycznego zob. **zdanie analityczne**
Skolem Thoralf A. zob. **teoria mnogości; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema**
skończona aksjomatyzowalność, *finite axiomatizability* zob. **aksjomatyzowalność**
słownik, *vocabulary*, rachunku kwantyfikatorów zob. też **rachunek kwantyfikatorów**
Słupecki Jerzy zob. **logiki wielowartościowe**
Sobociński Bolesław zob. **logiki wielowartościowe**
sofizmat, *sophism*
sorites, *sorites*
species zob. **genus proximum**
species (gatunek) zob. **definicja klasyczna**
spełnianie, *satisfaction*
sposób użycia wyrażenia, *use of an expression* zob. **znaczenie**
spójność syntaktyczna, *syntactic connexion, syntactic connectedness*
sprawdzalność empiryczna, *empirical testability*
sprawdzanie, *testing* zob. też **klasyfikacja rozumowań**
sprowadzanie trybów, *reduction of a mood* zob. **redukcja trybów**
sprzeczność, *contradiction* zob. też **kwadrat logiczny**
sprzeczność (systemu), *inconsistency (of a system)*

sprzeczność w przydawce, *contradiction in adiecto* zob. **contradictio in adiecto**
stała deontyczna, *deontic constant* zob. **logika deontyczna**
stała indywidualna, *individual constant* zob. **stała indywiduowa**
stała indywiduowa, *individual constant*
stała logiczna, *logical constant* zob. też **logika formalna**
stała nazwowa, *individual constant* zob. **term**
standardowy model, *standard model,* dla arytmetyki zob. **arytmetyka**
statystyczna koncepcja prawdopodobieństwa, *statiscical theory of probability* zob. **prawdopodobieństwo**
Steinhaus Hugo zob. **wnioskowanie statystyczne**
stopień przedmiotu, *degree of an object,* w rozgałęzionej teorii typów zob. **teoria typów, rozgałęziona**
stosunek, *relation* zob. **relacja**
stosunki zakresów, *relations of extensions*
stratyfikowalność, *possibility of stratification* zob. **teoria mnogości Quine'a**
struktura, *structure* zob. **dziedzina teorii; model semantyczny**
struktura intensjonalna, *intensional structure* zob. **znaczenie**
struktura modelowa, *model structure* zob. **logika deontyczna; logika modalna**
subsumpcja, *subsumption*
suma logiczna, *logical sum (disjunction)* zob. **alternatywa**
suma zbiorów, *sum (union) of sets* zob. **rachunek zbiorów**
suma zdarzeń, *sum of events* zob. **prawdopodobieństwo**
superpozycja funkcji, *superposition of functions* zob. **funkcje rekurencyjne**
superpozycja relacji, *superposition of relations* zob. **iloczyn względny relacji; teoria relacji**
supozycja, *supposition*
supozycja materialna, *autonymous mode of speech*
suppositio formalis zob. **supozycja**
suppositio materialis zob. **supozycja**
suppositio naturalis zob. **supozycja**
suppositio personalis zob. **supozycja**
suppositio simplex zob. **supozycja**
Suszko Roman zob. też **prawdopodobieństwo**
sylogistyka zdań asertorycznych, *syllogistic of assertoric sentences*
sylogistyka zdań modalnych Arystotelesa, *Aristotle's modal syllogistics* zob. **logika modalna**
sylogizm, *syllogism* zob. **logika formalna**
sylogizm hipotetyczny, *hypothetical syllogism, modus ponens*
symbol funkcyjny, *function symbol* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
symbol niesamodzielny, *incomplete symbol* zob. **deskrypcja**
symbolika Łukasiewicza, *Polish notation*
symbolika Peano-Russella, *Peano-Russell notation*
synkategorematyczny, *syncategorematic expression (syncategorema)* zob. **wyrażenie synkategorematyczne**
synonimiczność, *synonymy* zob. **równoznaczność**
syntaktyka, *syntax* zob. też **semiotyka**
system aksjomatyczny niesformalizowany, *non-formalized axiomatic system* zob. **system dedukcyjny**
system aksjomatyczny sformalizowany, *formalized axiomatic system* zob. **system dedukcyjny**
system asertoryczno-dedukcyjny, *assertive-deductive system* zob. **system dedukcyjny**
system dedukcyjny, *deductive system*, według Leśniewskiego zob. też **systemy Leśniewskiego**
system dedukcyjny w postaci przedaksjomatycznej, *deductive system at the pre-axiomatic stage* zob. **system dedukcyjny**
system hipotetyczno-dedukcyjny, *hypothetic-deductive system* zob. **system dedukcyjny**
system Mathematical Logic, *Quine's ML system* zob. **teoria mnogości Quine'a**
system New Foundations, *Quine's NF system* zob. **teoria mnogości Quine'a**
system przepełniony, *overfilled system* zob. **niesprzeczność systemu**
system S4, *system S4* zob. **logika modalna**
system T, *system T* zob. **logika modalna**
systematyczna wieloznaczność, *systematic ambiguity* zob. **teoria typów, prosta**
systemy Leśniewskiego, *Leśniewski's systems*
szerszy rachunek funkcyjny, *functional calculus of higher orders* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
szkoła Hilberta, *Hilbert's school* zob. **Hilbert** Dawid
sztuka kombinatoryjna, *ars combinatoria (general theory of arrangements)* zob. **ars combinatoria**
sztuka wielka, *ars magna* zob. **ars magna**

Ślęzyński Jan
świat wzorcowy, *model world* zob. **logika deontyczna**

Tarski Alfred zob. też **cudzysłów; podstawy matematyki logiki; teoria mnogości; twierdzenie Tarskiego**
tautologia, *tautology*
tautologia, *tautology (valid formula)* klasycznego rachunku zdań zob. **rachunek zdań; tautologia**
tautologia rachunku kwantyfikatorów, *valid formula of predicate logic* zob. **tautologia**
tautologia systemu modalnego, *valid formula of modal logic* zob. **logika modalna**
teoria asocjacyjna, *associacionist theory* zob. **znak**
teoria asocjacjonistyczna, *associacionist theory* zob. **znaczenie**
teoria decyzji, *decision theory* zob. **wnioskowanie statystyczne**

teoria dedukcji, (jako nazwa rachunku zdań występowała tylko w polskiej terminologii) zob. **rachunek zdań**
teoria dedukcyjna, *deductive theory*
teoria dowodu, *proof theory* zob. **Hilbert** Dawid; **metodologia nauk dedukcyjnych**
teoria elementarna, *elementary theory* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
teoria intencji znaczeniowej, *Bedeutungsintention theory* zob. **intencjonalność; znak**
teoria kategorii i funktorów, *theory of categories* zob. **podstawy matematyki i logiki**
teoria mnogości, *set theory* zob. też **logika formalna; podstawy matematyki i logiki**
teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema (w skrócie ZF) zob. **zbiór**
teoria mocy zbiorów, *theory of cardinal numbers* zob. też **teoria mnogości**
teoria modeli, *model theory*
teoria nieelementarna, *non-elementary theory* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
teoria pierwszego rzędu, *first-order theory* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
teoria prawdopodobieństwa, *theory of probability* zob. **prawdopodobieństwo**
teoria relacji, *theory of relations* zob. też **teoria mnogości**
teoria typów, *theory of types* zob. też **teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; zbiór**
teoria weryfikacji, *verification theory* zob. **znaczenie**
teoria zbiorów, *set theory* zob. **teoria mnogości**
teoria zbiorów uporządkowanych, *theory of ordered sets* zob. też **teoria mnogości**
teoria zdań, *propositional logic* zob. **rachunek zdań**
teoria zgodności, *semantic conception of truth* zob. **prawda**
teoria zinterpretowana, *interpreted theory* zob. **model semantyczny**
teorio-dowodowa interpretacja stałych logicznych, *proof-theoretical interpretation of logical constants* zob. **logika intuicjonistyczna**
teoriomnogościowe pojęcie relacji, *set-theoretical concept of relation* zob. **teoria relacji**
term, *term* zob. też **teoria typów, prosta**
termin dyspozycyjny, *dispositional predicate* zob. też **definicja redukcyjna**
termin elementarny, *basic predicate* zob. **definicja ostensywna; termin spostrzeżeniowy**
termin empiryczny, *empirical predicate*
termin mniejszy, *minor term* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
termin obserwacyjny, *observational predicate (perceptual predicate, perceptual expression)* zob. **sensowność empiryczna; termin spostrzeżeniowy**
termin pierwotny, *primitive term (undefined term)* zob. też **system dedukcyjny**
termin pochodny, *derived term (defined term)* zob. **system dedukcyjny; termin pierwotny**
termin rodzajowy, *generic term* zob. **definicja klasyczna**
termin sensowny empirycznie, *empirically meaningful expression* zob. **sensowność empiryczna**
termin spostrzeżeniowy, *perceptual expression (perceptual term)* zob. też **definicja ostensywna**
termin średni, *middle term* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
termin teoretyczny, *theoretical concept* zob. też **sensowność empiryczna**
termin większy, *major term* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
termin wzięty w całym zakresie, *distributed term* zob. **rozłożony termin**
test empiryczny, *empirical test* zob. **metodologia nauk empirycznych**
teza radykalnego konwencjonalizmu, *thesis (point) of radical conventionalism* zob. **Ajdukiewicz** Kazimierz
Tichonow zob. **pewnik wyboru**
tłumaczenie *(brak w terminologii ang.)* zob. **klasyfikacja rozumowań**
tożsamość, *identity* zob. **identyczność**
treść charakterystyczna, *characteristic intension* zob. **konotacja**
treść charakterystyczna, *characteristic intension,* nazwy zob. **treść nazwy**
treść językowa, *linguistic intension* zob. **konotacja**
treść nazwy, *intension of a name* (*of a predicate*)
Troelstra A. S. zob. **podstawy matematyki i logiki**
tryby sylogistyczne, *syllogistic moods* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
trylemat, *trilemma*
Twardowski Kazimierz zob. **pojęcie**
twierdzenie Betha, *Beth's theorem* zob. **definiowalność**
twierdzenie Cantora-Bernsteina, *Cantor-Bernstein theorem* zob. **teoria mocy zbiorów**
twierdzenie Gödla, *Gödel's theorem*
twierdzenie Gödla-Malcewa, *Gödel-Malcew theorem* zob. **podstawy matematyki i logiki**
twierdzenie Herbranda-Gentzena, *Herbrand-Gentzen theorem*
twierdzenie Lindenbauma, *Lindenbaum's lemma*
twierdzenie logiczne, *logical theorem (logical law)* zob. **schemat wnioskowania**
twierdzenie o dedukcji, *deduction theorem*
twierdzenie o nadsystemach zupełnych, *Lindenbaum's lemma* zob. **twierdzenie Lindenbauma**
twierdzenie o niedefiniowalności prawdy, *Tarski's theorem on undefinability of truth* zob. **twierdzenie Tarskiego**
twierdzenie o trychotomii liczb kardynalnych, *law of trychotomy of cardinals numbers* zob. **teoria mocy zbiorów**
twierdzenie obserwacyjne, *observation statement* zob. **sen-**

sowność empiryczna
twierdzenie pochodne, *derived statement* zob. **system dedukcyjny**
twierdzenie redukcyjne, *reductive statement* zob. **logika modalna**
twierdzenie Tarskiego, *Tarski's theorem on undefinability of truth*
twierdzenie teoretyczne, *theoretical statement* zob. **sensowność empiryczna**
twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni topologicznych, *Tychonoff's theorem on a product of topological spaces* zob. **pewnik wyboru**
twierdzenie Zermeli, *well-ordering theorem*
typ, *type* zob. **typologia**
typ empiryczny, *empirical type* zob. **klasyfikacja nauk**
typ idealny, *ideal type* zob. **klasyfikacja nauk**
typ indywiduów, *type of individuals* zob. **teoria typów, prosta**
typ logiczny, *logical type* zob. **teoria typów, prosta**
typ myśli, *type of thought* zob. **znaczenie**
typ porządkowy, *order type* zob. **teoria mnogości; teoria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; teoria zbiorów uporządkowanych**
typ wyrażeń, *type of expression* zob. **teoria typów, prosta**
typologia, *typology*

układ relacyjny, *relational system* zob. **dziedzina teorii**
uniwersalia, *universals*
uogólnienie indukcyjne, *inductive generalization*
uogólniona hipoteza continuum, *generalized continuum hypothesis* zob. **hipoteza continuum**
uzasadnianie, *substantiation, justification*
uzasadnianie bezpośrednie, *direct substantiation* zob. **uzasadnianie**
uzasadnianie pośrednie, *indirect substantiation* zob. **uzasadnianie**
uzasadnianie, *substantiation (justification)*, w naukach empirycznych zob. **metodologia nauk empirycznych**
uznawanie, *acceptance*
uzupełnienie zbioru, *complement of a set* zob. **rachunek zbiorów**
użyteczność reguły decyzyjnej, *utility of a decision-making rule* zob. **wnioskowanie statystyczne**

Wald A. zob. **wnioskowanie statystyczne**
wariancja, *variance* zob. **wnioskowanie statystyczne**
wartościowanie, *valuation*
wartość logiczna, *truth value*
wartość przeciętna, *mean value* zob. **wnioskowanie statystyczne**
wartość zmiennej, *value of a variable* zob. też **zmienna**
warunek indukcyjny, *inductive condition* zob. **definicja indukcyjna**
warunek istnienia, *existence condition* zob. **definicja normalna**
warunek jedyności, *uniqueness condition* zob. **definicja normalna**
warunek przekładalności *eliminability condition (translatability condition)* zob. **definicja normalna**
warunek wyjściowy, *initial condition* zob. **definicja indukcyjna**
Weber Heinrich zob. **zbiór nieskończony; zbiór skończony**
Weierstrass Karl zob. **podstawy matematyki i logiki**
weryfikacja, *verification*
weryfikacja hipotez statystycznych, *verification of statistical hypotheses* zob. **wnioskowanie statystyczne**
węższy rachunek funkcyjny, *first-order predicate calculus* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
Whitehead Alfred North zob. też **teoria mnogości**
wielości konsystentne *(brak terminologii ang.)* zob. **zbiór**
wielości niekonsystentne *(brak terminologii ang.)* zob. **zbiór**
wieloznaczność, *equivocality*
Windelband Wilhelm zob. **metodologia nauk**
Wittgenstein Ludwig zob. też **podstawy matematyki i logiki**
własność, *property* zob. **ekstensjonalność**
własności semantyczne wyrażeń, *semantic properties* zob. **proprietates terminorum**
wniosek sylogizmu, *syllogistic conclusion* zob. **sylogistyka zdań asertorycznych**
wnioskowanie, *inference* zob. też **klasyfikacja rozumowań**
wnioskowanie bezpośrednie, *direct inference*
wnioskowanie dedukcyjne, *deductive inference* zob. **wnioskowanie**
wnioskowanie niededukcyjne, *non-deductive inference* zob. **wnioskowanie**
wnioskowanie pośrednie, *indirect inference*
wnioskowanie przez analogię, *analogical inference*
wnioskowanie statystyczne, *statistical inference*
wnioskowanie uprawdopodobniające, *probabilistic inference* zob. **wnioskowanie**
wolny wybór, *free choice* zob. **intuicjonizm**
wskaźnik, *index* zob. **oznaka**
wskaźnik kategorii, *category index* zob. **kategoria semantyczna**
współoznaczanie, *connotation* zob. **konotowanie**
wyczerpujący podział logiczny, *adequate logical partition (exhaustive logical partition)* zob. **podział logiczny**
wykluczanie, *exclusion* zob. **stosunki zakresów**
wynikanie, *deducibility, corollary*
wynikanie implikacyjne, *implication* zob. **wynikanie**
wynikanie inferencyjne, *deducibility* zob. **wynikanie**
wynikanie semantyczne, *semantic entailment* zob. **wynikanie**
wyraz, *word*
wyrażanie, *expressing, expression*

wyrażanie bezpośrednie *(brak terminologii ang.)* zob. **wyrażanie**
wyrażanie pośrednie (*brak terminologii ang.*) zob. **wyrażanie**
wyrażenie, *expression*
wyrażenie-egzemplarz, *sign-token* zob. **cudzysłów; wyrażenie**
wyrażenie ekstensjonalne, *extensional expression* zob. **ekstensjonalność; funktor ekstensjonalny**
wyrażenie intensjonalne, *intensional expression* zob. **intensjonalność**
wyrażenie kategorematyczne, *categorematic expression* zob. **wyrażenie synkategorematyczne**
wyrażenie niesamodzielne (niezupełne), *incomplete expression* zob. **definicja kontekstowa**
wyrażenie okazjonalne, *indexical expression*
wyrażenie sensowne, *meaningful (well-formed) expression,* klasycznego rachunku zdań zob. **rachunek zdań**
wyrażenie synkategorematyczne, *syncategorematic expression, syncategoreme*
wyrażenie-typ, *sign-design* zob. **cudzysłów; wieloznaczność; wyrażenie**
wywodzenie, *derivation,* w Ajdukiewicza teorii znaczenia zob. **znaczenie**
wzór Bayesa, *Bayes' formula* zob. **wnioskowanie statystyczne**

zaangażowanie ontologiczne, *ontological commitment* zob. **ontologia**
zaangażowanie ontologiczne logiki, *ontological commitment of logic* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
zachowanie indukcyjne, *inductive behavior* zob. **wnioskowanie statystyczne**
zaimek, *pronoun* zob. **wyrażenie**
zakres, *extension*
zakres zmiennej, *range of a value* zob. **zmienna**
zakresowa równość zbiorów, *extensional equality of sets* zob. **rachunek zbiorów**
założenie pytania, *assumption of a question* zob. **pytanie**
zasada dictum de omni et de nullo, *principle dictum de omni et nullo* zob. **pierwsze zasady**
zasada dobrego uporządkowania Zermeli, *Zermelo's well-ordering principle* zob. **pewnik wyboru**
zasada domknięcia, *closure principle* zob. **zbiór**
zasada ekstensjonalności, *principle of extensionality* zob. **zbiór**
zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych, *principle of identity of indiscernibles* zob. **proprietas identitatis indiscernibilium**
zasada indukcji, *principle of induction* zob. **logika indukcji**
zasada indukcji pozaskończonej, *principle of transfinite induction* zob. **formalizm; Gentzen** Gerhard
zasada komprehensji, *principle of comprehension* zob. **zbiór**
zasada maksimum Hausdorffa-Kuratowskiego-Zorna, *Hausdorff-Kuratowski-Zorn maximum principle* zob. **pewnik wyboru**
zasada największej wiarygodności, *maximum likelihood principle* zob. **wnioskowanie statystyczne**
zasada racji dostatecznej, *principle of sufficient reason* zob. **pierwsze zasady**
zasada wnioskowania, *law of logic underlying an inference* zob. też **wnioskowanie**
zasada wyłączonego środka, *principle of excluded middle (tertium non datur)* zob. **rachunek zdań**
zawieranie się zbiorów, *inclusion* zob. **rachunek zbiorów**
zbiory podobne, *similar sets* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
zbiory równoliczne, *equinumerous sets (equipollent sets)* zob. **teoria mocy zbiorów**
zbiór, *set*
zbiór częściowo uporządkowany, *partially ordered set* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
zbiór dobrze uporządkowany, *well-ordered set* zob. też **teoria zbiorów uporządkowanych**
zbiór (kolektywny), *mereological class* zob. **systemy Leśniewskiego**
zbiór konstruowalny, *constructible set* zob. **zbiór**
zbiór liniowo uporządkowany, *linearly ordered set* zob. **teoria zbiorów uporządkowanych**
zbiór nieskończony, *infinite set*
zbiór nieskończony w sensie Dedekinda, *non-inductive set (Dedekind-infinite set)* zob. **zbiór nieskończony**
zbiór nieskończony w sensie Webera, *Weber-infinite set* zob. **zbiór nieskończony**
zbiór obliczalny, *computable set* zob. **funkcje rekurencyjne; rozstrzygalność**
zbiór pełny, *universal set* zob. **rachunek zbiorów**
zbiór pierwotnie rekurencyjny, *primitive recursive set* zob. **funkcje rekurencyjne**
zbiór potęgowy, *power set*
zbiór przeliczalny, *denumerable set*
zbiór przeliczalny nieskończony, *denumerable infinite set* zob. **teoria mocy zbiorów**
zbiór pusty, *empty set* zob. **rachunek zbiorów**
zbiór rekurencyjnie aksjomatyzowalny, *recursively axiomatizable set* zob. **aksjomatyzowalność**
zbiór rekurencyjnie przeliczalny, *recursively denumerable set* zob. **funkcje rekurencyjne**
zbiór skończony, *finite set* zob. też **teoria mocy zbiorów**
zbiór skończony w sensie Dedekinda, *inductive set (Dedekind finite set)* zob. **zbiór skończony**
zbiór skończony w sensie Webera, *Weber-finite set* zob. **zbiór skończony**
zbiór w sensie dystrybutywnym, *abstract set* zob. też **uniwersalia; zbiór**

zbiór w sensie kolektywnym, *aggregate* zob. też **zbiór**
zbiór w sensie von Neumanna, *von Neumann set* zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
zbiór, *set*, w systemie Gödla zob. **teoria mnogości von Neumanna-Bernaysa-Gödla**
zbiór zdarzeń losowych, *set of random events* zob. **prawdopodobieństwo**
zdania równowartościowe inferencyjnie, *mutually deducible sentences* zob. **znaczenie**
zdanie, *sentence, proposition, statement*
zdanie a posteriori, *a posteriori proposition* zob. **klasyfikacja nauk**
zdanie a priori, *a priori proposition* zob. **klasyfikacja nauk**
zdanie analityczne, *analytic proposition* zob. też **zdanie konieczne**
zdanie apodyktyczne, *apodictic proposition* zob. **logika modalna; zdanie kategoryczne**
zdanie aprioryczne, *a priori proposition* zob. **zdanie analityczne**
zdanie asertoryczne, *assertoric sentence* zob. **zdanie kategoryczne**
zdanie atomowe, *atomic sentence*
zdanie egzystencjalne, *existential proposition* zob. **zdanie szczegółowe**
zdanie empiryczne, *empirical proposition*
zdanie empirycznie sensowne, *empirically meaningful proposition zob.* **sensowność empiryczna**
zdanie falsyfikowalne, *falsifiable proposition* zob. **zdanie empiryczne**
zdanie kategoryczne, *categorical sentence*
zdanie konieczne, *necessary proposition*
zdanie modalne, *modal proposition* zob. **zdanie kategoryczne**
zdanie molekularne, *molecular sentence*
zdanie nie-analityczne, *non-analytic proposition* zob. **zdanie konieczne**
zdanie obserwacyjne, *observation statement* zob. też **metodologia nauk empirycznych**
zdanie ogólne, *universal proposition*
zdanie podstawowe, *basic statement* zob. też **zdanie obserwacyjne**
zdanie problematyczne, *problematic statement* zob. **logika modalna; zdanie kategoryczne**
zdanie spostrzeżeniowe, *perceptual statement* zob. **metodologia nauk empirycznych**
zdanie sprawozdawcze, *observation statement (niem. Protokollsatz)* zob. **metodologia nauk empirycznych**
zdanie syntetyczne *synthetic statement* zob. też **zdanie analityczne**
zdanie syntetyczne a priori, *synthetic a priori statement* zob. **zdanie konieczne**
zdanie szczegółowe, *particular proposition* zob. też **kwadrat logiczny**
zdanie szczegółowe przeczące, *particular negative proposition* zob. **kwadrat logiczny**
zdanie szczegółowo przeczące, *particular negative proposition* zob. **zdanie szczegółowe**
zdanie szczegółowe twierdzące, *particular affirmative proposition* zob. **kwadrat logiczny**
zdanie szczegółowo twierdzące, *particular affirmative proposition* zob. **zdanie szczegółowe**
zdanie zależne, *direct speech* zob. **asercja; intensjo**
zdarzenie elementarne, *elementary event* zob. **prawdobieństwo**
zdarzenie niemożliwe, *impossible event* zob. **prawdobieństwo**
zdarzenie pewne, *certain event* zob. **prawdopodobi**
zdarzenie przeciwne do zdarzenia *x, complementing* zob. **prawdopodobieństwo**
Zermelo Ernst zob. **pewnik wyboru; teoria mnogośc ria mnogości Zermelo-Fraenkla-Skolema; teoria rów uporządkowanych; twierdzenie Zermeli**
ZF zob. **zbiór**
zgodność estymatora, *consistency of estimator* zob. **skowanie statystyczne**
złożenie relacji, *relative product of relations* zob. **ilo względny relacji; teoria relacji**
zmienna, *variable*
zmienna indywiduowa, *individual variable*
zmienna nazwowa, *individual variable* zob. **term**
zmienna pozorna, *apparent variable (bound variable)* z **zmienna**
zmienna rzeczywista, *free variable* zob. **zmienna**
zmienna syntaktyczna, *syntactic variable (metalinguis variable)* zob. **rachunek kwantyfikatorów**
zmienna wolna, *free variable* zob. też **rachunek kwant fikatorów; zmienna**
zmienna zdaniowa, *propositional variable*
zmienna związana, *bound variable* zob. też **rachunek kwa tyfikatorów; zmienna**
znaczenie, *meaning, sense, significance*
znaczenie wyrażenia, *meaning of an expression (sense o an expression)* zob. **znaczenie**
znak, *sign*
znak asercji, *assertion sign* zob. **asercja**
znak-egzemplarz, *sign-token (sign event)* zob. **znak**
znak ikoniczny, *iconic sign* zob. **znak**
znak odrzucania, *rejection sign* zob. **asercja**
znak-typ, *sign-design* zob. **znak**
Zorn M. zob. **pewnik wyboru; teoria zbiorów uporządkowanych**
zupełność, *completeness* zob. **zupełność systemu**
zupełność systemu, *completeness of a system*
zupełność w sensie Posta, *Post completeness* zob. **zupełność systemu**
zupełny podział logiczny, *exhaustive logical partition (adequate logical partition)* zob. **podział logiczny**

ERRATA

Str.	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Jest	Powinno być
24		2	53	23
30		5	wyd. I:	wyd.:
39		13	uczucie	użycie
49	9-10		mieć kierowanie	umieć kierować
54	6		wiedzieć	widzieć
65		7	porzedzają	poprzedzają
76		1	str. 94	str. 64
79		3	na tej samej	na poprzedniej
85		13	że pierwszy raz	że je pierwszy raz
123	1-2		oznaczane	oznaczone
202		7	141-175	174-176
202		5	175-180	176-180