18
Moc obliczeniowa a cyfrowo-analogowy dualizm

Motto: *Omnia sub numero.*
– Liber Sapientiae 11, 22.

This text, concerning *computational power and the digital-analog dualism*, is found at the site calculemus.org/cafe-aleph/ as an excerpt from the book by Witold Marciszewski and Paweł Stacewicz: *Umysł – Komputer – Świat. O zagadce Umysłu z Informatycznego Punktu Widzenia* [Mind – Computer – World. On the Riddle of Mind from an Informational Point of View], Warsaw (Poland) 2011, published by Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT (sklep@exit.pl).

ABSTRACT

This Chapter poses the problem: whether any computational simulation of the whole universe could by perfectly (up to minutest details) performed by a giant digital machine alone, or should it require also an analog machine to support calculations? The author conjectures that both machines should come into play, and calls this fact „digital-analog dualism". The conjecture is based on (1) the pieces of reasearch like that of H. Siegelmann (see English quotations at p. 5), as well as (2) the observation that most problem-solving processes as performed by human brains involve both digital and analog computations. Hence, also an exact simulation of human brain (being the universe's part) would require both kinds of machines.

RECOMMENDED REFERENCES

Witold Marciszewski, "It from bit?": calculemus.org/pub-libr/2011/it-from-bit.html.
Paweł Stacewicz, "Cyfrowe versus Analogowe": http://blog.marciszewski.eu/?p=1033

Wprowadzenie. Biblijna „Księga Mądrości” chwali Stwórcę, że wszystko ustanowił *pod liczbą, miarą i wagą.* Za motto starczy nam początek tej maksymy, skoro waga i miara to też liczby, tyle że wcielone w świat fizyczny. Ta myśl Pitagorasa przez Biblię upowszechniona, entuzjastycznie powtarzana przez filozofów racjonalistów, w szczególności Leibniza, dobrze się nadaje na hasło światopoglądu informatycznego czyli *informatyzmu*. Wynika z niej bowiem, że skoro świat cały jest „ustanowiony pod liczbą”, to zarówno stwarzanie świata, jak i jego poznawanie polega na obliczaniu. *Obliczanie* zaś to maksymalnie precyzyjny, niejako wzorcowy, rodzaj *przetwarzania informacji*.

Nie wiemy, czy uprzytomnił sobie ten wniosek autor Księgi Mądrości, w każdym razie w pełni był go świadom Leibniz i stąd jego czołowa rola wśród prekursorów informatyzmu. Brakowało jednak Leibnizowi tego pojęcia liczby, które się ukształtowało w dwa wieki później, głównie za sprawą Georga Cantora, z jego przekątniową metodą odróżnienia liczb naturalnych od rzeczywistych. Dopiero na tym fundamencie mogło powstać pytanie: czy wszystkie liczby rzeczywiste są obliczalne?[1]

Odpowiedź na tę kwestię negatywna, którą wysunął i udowodnił w roku 1936 Alan Turing – za pomocą swej koncepcji maszyny do obliczeń – umożliwiła precyzyjną artykulację pytań o naturę świata i umysłu oraz o zasięg ludzkiego poznania. Pytania te oraz propozycje odpowiedzi stanowią treść światopoglądu informatycznego. Jak widać, jego jądrem jest koncepcja maszyny Turinga.[2]

Na niej opiera się pojęcie mocy obliczeniowej będące tematem obecnego eseju. Będziemy w nim śledzić, jak się zawiązuje intrygujący wątek oddany w tytule jako cyfrowo-analogowy dualizm. Bierze się on stąd, że zdolność, czyli moc obliczeniowa maszyny Turinga polega na przetwarzaniu informacji cyfrowym i jest ograniczona – jak głosi historyczne odkrycie Turinga – do znajdowania wartości funkcji obliczalnych. Rodzi się stąd pytanie, czy istnieją urządzenia o takiej mocy, że mogą również obliczać wartości niektórych funkcji nieobliczalnych. Część autorów odpowiada twierdząco oraz utrzymuje, że w klasie o większej mocy znajdują się układy analogowe, a wśród nich sieci neuronowe. Pogląd ten, jako uznający dwa rodzaje mocy obliczeniowej dogodnie będzie określić jako *dualizm cyfrowo-analogowy*.

Inna jednak część autorów jest zdania, iż różnica między układami cyfrowymi i analogowymi polega jedynie na odmiennym sposobie pracy, cza-

---

[1] Żeby śledzić dalszy tok tego eseju nieodzowna jest pewna wiedza o wymienionych tu rodzajach liczb. Jest ona podana w eseju 10 w pouczającym kontekście historycznym; w szczególności §2 wyczerpująco omawia wkład Turinga w rozróżnienie liczb nieobliczalnych i obliczalnych.

[2] Istnieją rozwiązania równoważne koncepcji Turinga, pochodzące m.in. od Alonzo Churcha i od Emila Posta (oba z tegoż roku 1936), które są również wielkimi osiągnięciami logiki matematycznej. Koncentrujemy się jednak na rozwiązaniu Turinga, ponieważ to ono stało się impulsem i podstawą dla teorii obliczeń jako działu informatyki dzięki idei maszyny obliczeniowej, podczas gdy pozostali autorzy oparli się na innych pojęciach.

sem efektywniejszym w przypadku analogowym, ale moc analogowych jest nie większa niż ów standard wyznaczony przez maszynę Turinga. A w razie potrzeby – powiada się dalej – możemy procesy analogowe zastąpić cyfrowymi czyli te pierwsze zredukować w pewnym sensie do drugich. Mamy więc do czynienia z poglądem, który stosownie będzie określić jako *redukcjonizm cyfrowy*.

Obserwując to rozszczepienie na dwa obozy, mamy szansę pełniejszego uchwycenia, na czym polega światopogląd informatyczny. Tytuł do tego, by się nim legitymować, mają po równi dualiści i redukcjoniści, ponieważ przy odmienności odpowiedzi wspólny jest im problem, na który starają się odpowiedzieć, a w tym przypadku wspólnota problemu bardziej łączy aniżeli może dzielić różnica odpowiedzi. Ten zaś problem jest to spleciona ze sobą para pytań: o obliczalność świata (cyfrowa, analogowa?) i o moc obliczeniową poznających świat układów, w szczególności ludzkiego umysłu.

Zajmuję w tym eseju stanowisko dualizmu czyli uznaję równoprawność i komplementarność obu *strategii obliczeniowych*. Czynię to nie na prawach ustalonego na dobre poglądu, lecz na zasadzie hipotezy roboczej. Jej stosowanie ma nie tylko coś wyjaśniać, lecz także testować samą hipotezę, na ile się ona z prób wyjaśniania wywiązuje.

Wzajemne dopełnianie się obu strategii przedstawiam w dwóch poświęconych im odcinkach, §2 i §4, przedzielonych przez coś w rodzaju intermedium (§3), które dzięki anegdocie historycznej powinno pomóc w prześledzeniu nieco trudniejszej tematyki następującego dalej odcinka. Całość poprzedzona jest rozważaniem (§1) mającym powiązać zagadnienia tego eseju z aktualnym stanem wiedzy i terminologii na temat mocy obliczeniowej.

§1. Rozszerzenie pojęcia mocy obliczeniowej i problem obliczalności świata

1.1. W dialekcie informatyków, gdy mowa o mocy obliczeniowej, ma się zwykle na uwadze moc sprzętu (*hardware*) zależną m.in. od szybkości procesora i pojemności pamięci operacyjnej; od tego zależy, jak złożone zadania i w jakim tempie mogą być realizowane na danym sprzęcie. Typowym tego rodzaju kontekstem jest *prawo Moore'a*.

> Gordon Moore, jeden z założycieli firmy Intel produkującej procesory zwrócił w roku 1965 uwagę na fakt, że optymalna pod względem ekonomicznym liczba tranzystorów w układzie scalonym podwaja się co 12 miesięcy, co stanowi wzrost wykładniczy; później skorygowano tę obserwację do kwoty 24 miesięcy, co jednak nie zmienia natury trendu wykładniczego. Ponieważ od liczby tranzystorów zależy moc oblicze-

niowa maszyny, prawo Moore'a przyjęło się szeroko w postaci twierdzenia, że *moc obliczeniowa komputerów podwaja się co 24 miesiące*.

Popularność tego prawa, jego częste przywoływanie, sprawia, że termin „moc obliczeniowa" rozumie się przede wszystkim w sensie właściwości sprzętu. Jego treść jednak dysponuje go do posiadania znacznie szerszego zasięgu. Wszak do obliczeń służy nie tylko sprzęt. Ich narzędziami są również algorytmy, programy, rachunki logiczne, teorie matematyczne. A że różnią się one między sobą możliwościami rozwiązywania zadań, jakimi są problemy obliczeniowe, dobrze opisuje się to powiedzeniem, że różnią się mocą obliczeniową. Zachowajmy tę intuicję, w taki jednak sposób żeby uniknąć wplątywania się w wieloznaczność.

Kłopoty terminologiczne biorą się stąd, że od czasu przełomowych badań Turinga (1936) dzieli się funkcje matematyczne na obliczalne i nieobliczalne. Te drugie charakteryzują się tym, że ich wartościami są liczby nieobliczalne, to znaczy takie, że nie istnieje zdolna je obliczyć maszyna Turinga. Nie przeczy to jednak faktowi, że wartość tego rodzaju funkcji może być znaleziona, mianowicie odkryta w sposób intuicyjny. Sam Turing podjął próbę matematycznej charakterystyki takich odkryć, biorąc za ich koronny przykład rozumowanie prowadzące do uznania prawdziwości zdania gödlowskiego (▷o zdaniu gödlowskim mowa jest w eseju 19, §3).

Znajdowanie wartości funkcji jest to zawsze jakieś obliczanie, także gdy nie mieści się ono w możliwościach maszyny Turinga. Mamy więc takie szerokie pojęcie obliczania, że obejmuje ono, paradoksalnie, również znajdowanie wartości funkcji nieobliczalnych. Układ dokonujący tego rodzaju „obliczania tego, co nieobliczalne" obdarzył Turing (w pracy z roku 1939) mianem *wyroczni* (ang. *oracle*). W ten sposób oprócz wyjściowego pojęcia obliczania jako procedury właściwej maszynie Turinga powstaje szersze, w którym mieści się i to mechaniczne i to będące dziełem wyroczni.

Tę wieloznaczność musi dziedziczyć pojęcie mocy obliczeniowej. Nie powstała dotąd jakaś terminologia, w której dałoby się te pojęcia wyraźnie oddzielić, ale pojawiła się pewna warta uwagi sugestia. Zawiera się ona w takich określeniach, jak *super-Turing computation*, *hypercomputation*, *non-Turing computation*, używanych przez różnych autorów dla nazwania tego samego rodzaju procesów. Jest to ten rodzaj obliczania, którego istnienie zasygnalizował Turing w studium z roku 1939, przez co – rzec można – stał się sam super-Turingiem.[3] Wzbogaćmy w tej materii polskie słownictwo o dwa terminy techniczne utworzone za pomocą skrótowych prefiksów.[4]

---

[3] *Systems of logic based on ordinals*, „Proc. Lond. Math. Soc" (2) 45, 1939, pp. 161-228.

[4] Ustęp ten stanowi rozwinięcie rozważań z eseju 11, §3.2 (por. przypis 6) w nieco zmienionej (na potrzeby obecnego kontekstu) typografii (kapitaliki w prefiksach „T" i „NT"). Obecne uzupełnienie zawiera odniesienia do literatury pominięte w tamtym eseju, który jako wstęp do części drugiej zapowiada tylko jej główne pojęcia i tematy.

T-obliczanie (Turing computation) = obliczanie w granicach możliwości Uniwersalnej Maszyny Turinga (UMT);
NT-obliczanie (Non-Turing computation) = obliczanie zawierające wszystkie możliwości osiągalne dla UMT oraz pewne inne dla UMT nieosiągalne, np. rozwiązanie problemu stopu; są powody, żeby do tych drugich zaliczyć akty matematycznej intuicji.

Zwrot „non-Turing" przyjął się dość szeroko w literaturze. Ogniskuje się wokół niego żywa kontrowersja, w której jedni autorzy opowiadają się stanowczo za istnieniem procesów NT-obliczeniowych, inni stanowczo temu zaprzeczają, wyrażając przekonanie o możliwości ich redukcji do T-obliczeń. Zdecydowanym rzecznikiem pierwszego poglądu jest Jack Copeland, który w roku 1999 zaproponował termin *hypercomputation*, używany dziś zamiennie z *super-Turing computation* i *non-Turing computation*. (wiadomości na ten temat łatwo znaleźć przez Google'a, adresując za pomocą któregoś z tych terminów). Jest on autorem liczących się w tej materii publikacji. Ważnym w ten spór wkładem na rzecz koncepcji NT-obliczeń są badania, które prowadzi Hava T. Siegelmann z zespołem.

> Reprezentatywny jest w tej materii jej artykuł (2003) pt. „Neural and Super-Turing Computing" streszczony pod adresem portal.acm.org/citation.cfm?id=607935, w którym są też odnośniki do innych publikacji tej autorki do roku 2010. Godne uwagi są w tym streszczeniu następujące propozycje. Oto jego fragment. „Our analog neural network allows for supra-Turing power while keeping track of computational constraints, and thus embeds a possible answer to the superiority of the biological intelligence within the framework of classical computer science. We further propose it as standard in the field of analog computation, functioning in a role similar to that of the universal Turing machine in digital computation. In particular an analog of the Church-Turing thesis of digital computation is stated where the neural network takes place of the Turing machine.".

Przyjmuję tu pogląd o istnieniu NT-obliczeń na prawach hipotezy roboczej, a nie wyniku, który miałby oparcie we własnych badaniach. Na gruncie tej hipotezy proponuję odpowiednie do jej treści rozszerzenia pojęcia obliczalności oraz, w konsekwencji, mocy obliczeniowej.

Skoro mamy obliczanie typu T i obliczanie typu NT, to naturalne jest przyjąć *szerokie pojęcie obliczania*, które obejmie oba te rodzaje. Trzymając się tego ustalenia, będziemy odróżniać *moc T-obliczeniową* oraz *moc NT-obliczeniową*, a mówiąc „moc obliczeniowa" bez prefiksu, będziemy mieć na myśli alternatywę T lub NT.

Tu jednak pojawia się trudność, która nie jest natury logicznej, lecz środowiskowej. Ta mianowicie, że ilekroć informatyk używa terminu „obliczanie" (bez prefiksu) poza kontekstem takim, jak obecny, to ma na myśli wyłącznie T-obliczanie, gdyż tylko z takim ma on do czynienia w teorii i w praktyce informatycznej. Rysuje się więc kolizja powyższej propozycji terminologicznej ze zwyczajem językowym zakorzenionym w kręgu specjalistów. Jest to koszt, który trzeba ponieść dla uzyskania pojęcia mocy obliczeniowej, które mogłoby posłużyć do opisu i wyjaśniania tego, co zachodzi w rozległym spektrum procesów dziejących się we wszechświecie, a więc pełnić rolę koncepcji światopoglądowej.

To szerokie spektrum obejmuje z jednej strony przyrodę i ludzkie życie społeczne (cywilizację), a z drugiej czynniki fizyczne (*hardware*) i czynniki logiczne (*software*).

Zaliczymy do *czynników fizycznych* nie tylko sprzęt będący wytworem ludzkiej techniki (od dawnych liczydeł po superkomputery), lecz także żywe komórki z ich DNA, neurony etc.

Zaś do *czynników logicznych* zaliczymy nie tylko algorytmy i programy, lecz także kod genetyczny, kod neuronowy, rachunki, metody badawcze, teorie naukowe, umysły, a nawet systemy prawne i inne regulacje, które czynią ze struktur społecznych układy do przetwarzania informacji.

Każdy z tych elementów, czy to fizycznych czy logicznych, przyczynia się do powstawania lub powiększania mocy obliczeniowej w przyrodzie lub w cywilizacji. Gdy obejmiemy pojęciem *mocy obliczeniowej* tak rozległą i wielowymiarową dziedzinę, uzyskamy środki ekspresji dla sądów światopoglądowych charakterystycznych dla informatyzmu: jak ten, że ewolucja przebiega w sposób prowadzący do powstawania coraz większych mocy obliczeniowych, czy ten, że moc obliczeniowa cywilizacji nadbudowuje się na mocy obliczeniowej przyrody jako pewna jej kontynuacja. W ten sposób, dzięki osiągnięciom nauki i techniki myśl filozoficzna, adaptując pojęcie mocy obliczeniowej, pozyskała w epoce informatycznej całkiem nową kategorię o zasięgu uniwersalnym, o której nie śniło się filozofom epok dawniejszych.

1.2. Poprzedni odcinek przyniósł projekt terminologiczny dotyczący, by tak rzec, uniwersalizacji pojęcia mocy obliczeniowej. Ważnym jego punktem jest innowacja wychodząca poza istniejące dotąd słownictwo specjalistyczne.

Jest to propozycja, żeby zdefiniować dziedzinę nadrzędną względem sprzętu informatycznego (hardware), w której sprzęt taki jest tylko jednym z iluś składników, i nazwać ją *czynnikiem fizycznym*. A także zdefiniować dziedzinę nadrzędną względem algorytmów i programów, nazwawszy ją *czynnikiem logicznym*. Pozwala to zwięźle wysłowić dokonane uogólnienie pojęcia mocy obliczeniowej. Powiemy, że cechuje ona zarówno czynnik logiczny jak i czynnik fizyczny, każdemu z nich przysługując w jemu właściwy sposób. Czynnikowi logicznemu przysługuje w ten sposób, że jest to moc T-obliczeniowa lub NT-obliczeniowa.

Nowością językową jest rozszerzenie pojęcia mocy obliczeniowej na czynnik logiczny, podczas gdy w standardowej terminologii informatycznej odnosi się ono tylko do czynnika fizycznego, i to w zakresie ograniczonym do produktów technologii informatycznej. Gdy idzie o czynnik logiczny, w szczególności algorytmy, istnieje już terminologia określająca ich możliwości obliczeniowe, trzeba więc wyjaśnić, jak ma się do niej obecna propozycja terminologiczna.

Moc obliczeniową algorytmu należy utożsamić z tym, co nazywamy *sprawnością algorytmu* (lub programu). Z dwóch algorytmów ten jest bardziej sprawny, który mniej wymaga zasobów, w szczególności czasu, do rozwiązywania problemów z tego samego rzędu złożoności (liniowej, kwadratowej, silniowej etc.).[5]

1.3. Mając tak wypracowane instrumentarium pojęciowe, powróćmy do hasła „wszystko pod liczbą" – motta tego eseju. Ta krótka fraza kryje w sobie głębokie pytanie filozoficzne. Jest ono słabo w skali społecznej dostrzegane, gdyż powstaje wyłącznie na gruncie światopoglądu informatycznego, a ten nie jest bynajmniej poglądem masowym. Będzie to pytanie: *Pod jaką stworzone jest wszystko liczbą? Czy tylko obliczalną? Czy również nieobliczalną?*

Istnienie liczb nieobliczalnych w abstrakcyjnym świecie matematyki jest faktem dowiedzionym przez Turinga, pozostaje natomiast otwarte pytanie, czy w świecie fizycznym występują jakiekolwiek wielkości charakteryzowane przez liczby nieobliczalne. Przynajmniej część wszystkiego, czyli wszechświata, jest T-obliczalna. To oczywiste. Dzięki temu mamy sformułowane ilościowo precyzyjne prawa przyrody. Czy nie ma jednak jakichś obszarów problemowych gdzie już nie sięga T-obliczeniowa moc uniwersalnej maszyny Turinga? Nie stawiamy tego pytania z czystej ciekawości. Ma ono w sobie ładunek praktyczności, tak w odniesieniu do świata przyrody, jak i świata społecznego. O tym drugim mowa jest w eseju 20, a co się tyczy przyrody, rzecz idzie między innymi o ukierunkowanie badań w fizyce.

Odkrycie liczb nieobliczalnych może mieć wpływ na szanse opisu złożoności świata fizycznego. Rzutuje ono na słynną kwestię, czy możliwa jest w fizyce tak zwana *teoria wszystkiego* (ang. *Theory of Everything*, skr. TOF), będąca marzeniem niektórych fizyków. Przytaczam dwie takie wypowiedzi, co pozwoli zrozumieć, jak destrukcyjny byłby dla tej koncepcji fakt istnienia w świecie stanów czy procesów dla których obliczenia nie wystarczyłaby moc obliczeniowa uniwersalnej maszyny Turinga (o ile uznamy ją za kres możliwości obliczeniowych).

> „Widzimy chwilami zarysy teorii ostatecznej, która miałaby nieograniczony zakres ważności i byłaby całkowicie zadowalająca pod względem zupełności i niesprzeczności. Poszukujemy pewnych uniwersalnych praw przyrody, a gdy takie prawdy znajdziemy, usiłujemy pokazać, jak można je wydedukować z praw jeszcze prostszych." S. Weinberg, *Sen o teorii ostatecznej*. Przełożył P. Amsterdamski. Alkazar, Warszawa 1994, s. 13.

[5] W tej sprawie można się poradzić książki: Simon Harris and James Ross, *Od podstaw. Algorytmy*, Helion 2006. Warto jednak przede wszystkim wczytać się (jeśli Czytelnik dotąd tego nie zrobił) w drugi esej tej książki, gdzie jest mowa o sprawności algorytmów, złożoności problemów etc.

„Jeśli odkryjemy teorię ostateczną, będzie ona w zasadzie zrozumiała dla każdego, nie tylko dla wąskiego grona uczonych. Wtedy wszyscy [...] będziemy mogli uczestniczyć w dyskusji nad zagadnieniem, dlaczego doszło do zaistnienia wszechświata, a w nim nas samych. Jeśli znajdziemy na to odpowiedź, byłby to ostateczny triumf ludzkiego rozumu, gdyż poznalibyśmy umysł Boga." Stephen W. Hawking, *A Brief History of Time*. Bantam Press, London etc. 1988. Przełożył ad hoc WM.

Znaczący odłam fizyków optuje za poglądem, że choć w abstrakcyjnej krainie matematyki istnieje prowincja funkcji i liczb nieobliczalnych, nie ma takiego rejonu w świecie empirycznym badanym przez fizykę. Skąd takie stanowisko?

Istnieje takie zjawisko intelektualne, które Georg Cantor (1845-1918), twórca podstawowej dziś dla matematyki teorii zbiorów nieskończonych nazwał nieco ironicznie łacińskim zwrotem *horror infiniti*, (imitując słynną frazę Arystotelesa *horror vacui* – lęk przed próżnią). Jeśli to nie lęk, to w każdym razie jakiś opór intelektualny, który cechował także pewnych klasyków filozofii, a dziś, jak widzimy, bywa nie obcy przyrodnikom. Z drugiej strony, badacze o tej postawie nie mogą nie uznać, że czas i przestrzeń mają wszelkie znamiona ciągłości, a więc nieskończoności właściwej zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych (w sprawie jego definicji zob. 10, §1.2).

Stanowisko to bierze się z oporu przeciw wizji świata nieskończonego, za którą optują inni autorzy.

Niektórzy przeciwnicy ciągłości w przyrodzie, których możemy nazwać finitystami, roztaczają wizję, że świat jest w gruncie rzeczy skwantowany, a składających się nań elementarnych cząstek jest skończenie wiele. Trudno wprawdzie nie uznać, że fizyka ma do czynienia z ciągłością czasu i przestrzeni, ale rzecznicy owej *digital philosophy* (jak nazwał swój pogląd Ed Fredkin) traktują to jako wybieg metodologiczny, pomocny w rachunkach, ale niezgodny, jak powiadają, ze stanem faktycznym, w którym czas i przestrzeń też są skwantowane. W takim świecie ograniczonym do skończoności, uniwersalna maszyna Turinga czyli (w realizacji fizycznej) komputer cyfrowy, czułaby się, można rzec, jak u siebie w domu. Każdy problem empiryczny byłby dla niej do pokonania.

Inni badacze tworzą frakcję infinitystów, chętnie medytujących nad nieskończonością czy ciągłością tak świata matematyki, jak i fizycznego wszechświata. Należy podkreślić, że obie frakcje, ta finitystów czyli cyfrowców i ta infinitystów czyli analogowców, choć pozostają w sporze, zasilają wspólnie obóz informatyzmu – światopoglądu informatycznego. Jedni bowiem i drudzy wyrażają swój ogląd świata w kategoriach informatycznych, odwołują się do pojęć obliczalności i mocy obliczeniowej, mając zwrot „maszyna Turinga" u podstaw swej aparatury pojęciowej. Tacy, nazwijmy, informatyści są gęsto reprezentowani w populacji fizyków.

Trudniej jest uświadczyć informatystów wśród filozofów. Zwłaszcza między Odrą i Bugiem, gdzie co sprawniejsze umysły zaliczają się z niejaką dumą do tzw. filozofii analitycznej, nad którą ubolewa Stephen Hawking, cytując z dezaprobatą słowa Wittgenteina, że

„jedynym zadaniem, jakie pozostało filozofii jest analiza języka", poczem dodaje Hawking z wykrzyknikiem: „what a comedown from the great tradition of philosophy from Aristotle to Kant!" (strona końcowa w *Brief History of Time*).

W obozie przeciwnym, wśród informatystów-infinitystów, do których obecny autor (odczuwając *horror finiti*) czuje się przynależnym, panuje pogląd, że ograniczenia mocy obliczeniowej matematyki, wykryte m.in. przez Gödla i Turinga, zmniejszają szanse zdania sprawy ze złożoności świata fizycznego. Najpoważniejsze argumenty w tej sprawie podali Marian Pour-El i Ian Richards, wykazując, że istnieją nieobliczalne rozwiązania pewnych znanych równań teorii kwantów, w tym równania falowego, które opisuje rozchodzenie się fal elektromagnetycznych.[6]

§2. Strategia analogowa w sukurs cyfrowej w sytuacjach kryzysowych

2.1. Idea mocy obliczeniowej, tak pojemna, jak zarysowana wyżej, jest istotnym wkładem informatyzmu w rozumienie świata. Dzięki tej idei informatyzm pozwala uchwycić fundamentalne prawo rozwoju. To mianowicie, że rozwój jest procesem, w którym się przeplatają cykle kryzysowe, to znaczy: fazy nierozwiązywalnych zrazu problemów, z fazami ich rozwiązywania, które następują po uzyskaniu niezbędnego wzrostu mocy obliczeniowej.

Kryzys nie musi być wynikiem czyichś błędów, choć błędy, i to ciężkie, bywają nagminne, na przykład w rozwoju politycznym, czyniąc kryzys dotkliwszym, niż gdyby brał się z samej natury rozwoju. Do jego zaś natury należy to, że zmiany, zrazu nieznaczne lecz o rosnącym natężeniu i kumulacji, prowadzą do punktu krytycznego, po którym następuje nowa jakościowo, czasem wręcz rewolucyjnie nowa, faza procesu. Przykładem – prosty model fizyczny, kiedy to coraz szybsze drgania coraz większej liczby cząstek podgrzewanej wody przekraczają w pewnym momencie próg nowej jakościowo fazy: zamiast ciała płynnego pojawia się gazowe, para wodna. Mamy na to uczoną nazwę: *przejście fazowe*.

Duże kryzysy należą do kategorii przejść fazowych. Umysł konfrontując się z nieznaną dotąd sytuacją, tkwiąc w koleinach dawnych chodów myślowych, nie może podołać tej nowości pojęciowo, a więc i obliczeniowo; w rezultacie, nie umie reagować odpowiednim działaniem. Mamy wtedy stan trudnego do opanowania chaosu. Nazywamy go kryzysem. W jaki sposób informatyzm, ze swą kluczową ideą mocy obliczeniowej, radzi sobie

[6] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*. Seria „Perspectives in Mathematical Logic", Volume 1, Berlin, Springer-Verlag, 1989. Szerszy komentarz na temat tego wyniku, obejmujący refleksje Freemana Dysona, znajduje się w eseju 11, §4.3.

z wyjaśnieniem tej bezradności umysłu w obliczu kryzysów? I jak wyjaśnia powstawanie zdolności do ich przezwyciężania?

Chcielibyśmy mieć odpowiedź w jak najszerszym zakresie, obejmującym całość cywilizacji, o której wiemy, że co jakiś czas wstrząsana jest kryzysami. Powstała nawet osobna gałąź literatury katastroficznej, wyspecjalizowana w wieszczeniu kryzysu i w konsekwencji zmierzchu cywilizacji. Najgłośniejsza, szczycąca się wielką karierą czytelniczą, pozycja to książka niemieckiego filozofa Oswalda Spenglera *Zmierzch Zachodu*.[7] Zachód oznacza tu zachodnią cywilizację. Gdy zajrzeć do tych spekulacji po stu prawie latach, gdy cywilizacja zachodnia – z jej nauką, techniką, ustrojem gospodarczym i politycznym oraz etyką państwa prawa i praw człowieka – dociera do wszystkich kontynentów (wiadomo, z oporami i selektywnie, ale istotny jest kierunek procesu), to jaką przyjąć metodę myślenia, żeby nie wpadać w objęcia takiego bezpłodnego poznawczo katastrofizmu?

Żeby naturę kryzysu uchwycić, trzeba wziąć w roli modelu możliwie najprostszy przypadek procesu, w którym występują fazy kryzysowe: przyjrzeć się skąd się one biorą oraz czy jest możliwe, a jeśli tak, to jakim sposobem, żeby kryzys przezwyciężyć. Nie mamy gwarancji, że taki model znajdzie zastosowanie w przypadkach bardziej złożonych, ale dopiero w drodze się okaże, czy można posuwać się dalej, urealniając wyjściowy model w kierunku większej złożoności.

Proponowany model procesów kryzysowych wychodzi z poglądu, banalnego jak tautologia, że źródłem kryzysu w ludzkich społecznościach jest niedostatek zdolności rozwiązywania pojawiających się w danym czasie problemów. Jednocześnie przyjmujemy hipotezę, że zdolność rozwiązywania problemów jest to szeroko pojęta moc obliczeniowa. Do sformułowania obecnej tezy wystarczy wyobrażenie, na czym polega moc obliczeniowa nauki; sięgamy bowiem po przypadek kryzysów w nauce jako modelowy dla zrozumienia natury kryzysu w ogólności, w wymiarze wielorakich dziedzin cywilizacji.

Nauka jest tą dziedziną, w której intelektualny wątek kryzysu, czyli brak pojęć i mocy obliczeniowej do rozwiązania nacierających w danej fazie problemów, rysuje się dość prosto i w stosunkowo czystej postaci. Rozgrywa się bowiem bez takiego zmącenia obrazu, jakie bierze się z konfliktu interesów i jego ekscesów emocjonalnych, jak np. w polityce, a także z interferencji wątków, które już same w sobie są nader skomplikowane, a cóż dopiero ich wzajemne sploty, jak splot polityki, gospodarki, obyczajowości, religii, demografii.

Trzeba przy tym mieć na uwadze, że kryzysy mogą się pojawiać tylko w takiej teorii, której pojęcia są na tyle zdefiniowane, że dobrze wiadomo, czego dotyczą, a twierdzenia na tyle sprawdzalne, że wiadomo, jakie fakty byłyby zdolne im zaprzeczyć. Można to oddać paradoksalnie sentencją, że

[7] W oryginale *Der Untergang des Abendlandes. Umrisse einer Morphologie der Weltgeschichte*. Pierwszy tom ukazał się w roku 1918 w Wiedniu, drugi w 1922 w Monachium.

teoria uznająca się za naukową na tyle ma realną wartość poznawczą, na ile jest zdolna do wchodzenia w kryzysy. Przechodziła przez takie próby fizyka i matematyka, nie słyszano natomiast o kryzysie w psychoanalizie Freuda czy w ekonomii politycznej marksizmu.

Kryzys w matematyce pojawił się w wyniku jej bardzo intensywnego rozwoju w 19-ym wieku. Wyzwolił on nurt poszukiwań, z których wyłoniły się nowe i doniosłe idee. Historycznym osiągnięciem matematyki w tamtym okresie było coś, co można porównać do scalenia różnorodnych i nie powiązanych ze sobą prowincji w jedno państwo. Rolę integrującą odegrała najpierw arytmetyka, a pierwszy doniosły krok w tym kierunku uczynił Kartezjusz, scalając arytmetykę z geometrią. Kolejnym krokiem, przypadającym na wiek 19-ty, było definicyjne sprowadzenie różnych rodzajów liczb, w tym rzeczywistych, do liczb naturalnych jako podstawowych; pozwoliło to m.in. na powiązanie arytmetyki z analizą matematyczną. Szukając jeszcze głębszej podstawy, tym razem dla pojęcia liczby naturalnej, znaleziono ją w teorii zbiorów nieskończonych, zwanej najczęściej *teorią mnogości*, a zainicjowanej przez geniusz niemieckiego matematyka Georga Cantora (1845-1918).

Było to osiągnięcie na miarę początku nowej ery, ale nie pozbawione ryzyka, które rychło dało o sobie znać. Pojęcie nieskończoności, wyniesione przez Cantora na wyżyny abstrakcji (nieskończony ciąg zbiorów „coraz bardziej” nieskończonych) przerastało zdolność wielu umysłów do intuicyjnego pojmowania nieskończoności. Nie dość jasne intuicje prowadziły na krawędź sprzeczności, które, mniej drastycznie, nazwano *antynomiami teorii mnogości*. Sytuacja miała niewątpliwe znamiona kryzysu.

2.2. W jego leczeniu pierwszej pomocy udzieliła narodzona w tymże czasie, w roku 1879, logika matematyczna. Tego roku ukazało się w Halle dzieło niemieckiego matematyka Gottloba Fregego (1848-1925) pod tytułem wielce znaczącym dla obecnej opowieści: *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens*. To znaczy: „pismo pojęciowe: język formalny czystej myśli ukształtowany na wzór języka arytmetycznego”. Terminy „pismo” i „język formalny” sygnalizują kierunek dalszego rozwoju logiki ku teorii przybierającej stopniowo charakter algorytmiczny, to znaczy takiej, że jej reguły dotyczą kształtu czyli *formy* pisma, a więc pewnej jakości fizycznej (cecha istotna dla mającej przyjść po paru dekadach implementacji maszynowej). Przymiotnik „pojęciowe”, jak też odniesienie do arytmetyki, wskazuje na uwolnienie się od fonetycznej warstwy języka, podobnie jak w arytmetyce, gdzie cyfry i symbole funkcyjne bezpośrednio, bez pośrednictwa dźwięków, wskazują swym kształtem na określone pojęcia.

Zwrot „czysta myśl” świadczy, że ma to być pismo oddające pojęcia, które wyprzedzają doświadczanie świata zewnętrznego, czyniąc umysł zdolnym do takiego doświadczania; należą więc one do czystej myśli, niezależnej od doświadczenia i stanowiącej jego warunek (np. żeby móc uogólniać jednostkowe obserwacje trzeba mieć uprzednio logiczne pojęcie zbioru). Taką funkcję pełnią pojęcia logiczne, co wskazuje, że tematem utworu *Begriffsschrift* jest pewien system logiki. System ten stworzył Frege inspirując się projektami Leibniza (do których praktycznej realizacji czas Leibniza jeszcze nie dojrzał) oraz korzystając z przełomowych, o trzy dekady wcześniejszych, osiągnięć algebraicznych angielskiego matematyka George Boole'a (podstawowa teoria logiczna, rachunek zdań, jest pewną algebrą Boole'a). Tym nie mniej, wypada powtórzyć za znakomitym logikiem polskim Janem Łukasiewiczem te pełne podziwu słowa, że nowa logika wyskoczyła cała i gotowa z genialnej głowy Fregego, jak w greckim micie Atena, bogini mądrości, poczęła się z głowy ojca bogów Zeusa.

Jej godna podziwu nowość polega na tym, że jest to język, w którym da się jednoznacznie zapisać bez posiłkowania się językiem naturalnym dowolną myśl matematyczną, nawet z najbardziej zaawansowanych teorii. Decydująco do tego się przyczynia wynalazek językowy Fregego, którym są symbole kwantyfikatorów odpowiadające słowom „każdy" i „niektóry"; słów tych matematycy zawsze używali w formułowaniu twierdzeń, ale czynili to w sposób intuicyjny, który Frege przetworzył na postać dającą się ująć algorytmicznie, w czym mamy krok przygotowujący mechanizację dowodzenia. Ta zdatność do wyrażania wszelkich pojęć i twierdzeń matematyki stała się powodem, dla którego nową naukę, wykraczającą daleko poza horyzont tradycyjnej logiki Arystotelesa, nazwano *logiką matematyczną* (choć ma ona też zastosowania w rozległych obszarach pozostałej wiedzy). Przy pomocy logiki matematycznej, dało się tak uściślić intuicje teoriomnogościowe, że został zrobiony ważny krok w kierunku zabezpieczenia teorii przed antynomiami.

§2.3. Teoria mnogości została pomyślana jako instrument o maksymalnej wśród teorii matematycznych mocy dedukcyjnej, a więc obliczeniowej (przy założeniu, że jest niesprzeczna). W tym, mianowicie sensie, że miała dostarczyć fundamentu czyli podstawowych pojęć i pierwszych przesłanek innym teoriom matematyki. Miały więc one wyprowadzać się z niej dedukcyjnie czyli być dowodzone na jej podstawie. Niezależnie od tego, w jakim stopniu projekt ten został wykonany (jest to przedmiotem dyskusji, w którą nie musimy tu wchodzić), stanowi on pouczający przykład gradacji mocy dedukcyjnej. Np. arytmetyka wyprowadzona z teorii mnogości, podczas gdy teoria mnogości się z niej nie wyprowadza, ma mniejszą niż teoria mnogości moc dedukcyjną. Zachodzi tego rodzaju gradacja także między różnymi wersjami samej teorii mnogości. Na przykład, przy pewnej śmielszej konstrukcji aksjomatyki, gdy obejmuje ona tzw. pewnik wyboru, da się udowodnić więcej istotnych dla matematyki twierdzeń niż przy aksjomatyce, która (z racji pewnych zastrzeżeń filozoficznych) pewnika tego nie zawiera, i w rezultacie ma mniejszą moc dedukcyjną.[8]

[8] Zob. Witold Marciszewski (red.), *Logika Formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa 1987. Znajdują się w niej m.in. obszerne

Pojęcie mocy obliczeniowej odnosi się także do zmatematyzowanych teorii empirycznych, które najliczniej znajdujemy, oczywiście, w fizyce. W tym przypadku moc obliczeniowa jest nawet bardziej spektakularna. Posługując się teoriami fizycznymi, umysł dokonuje rzeczy tak zdumiewających, jak obliczenie wieku wszechświata, jego rozmiarów, czy liczby składających się nań atomów. A również takich, jak niezwykle precyzyjne obliczenie kąta odchylenia światła w polu grawitacyjnym słońca (słynne potwierdzenie empiryczne ogólnej teorii względności).

Te niewyobrażalne dla dawniejszej nauki sukcesy obliczeniowe zawdzięczamy teoriom względności i kwantów, a te z kolei zawdzięczają swe zdolności mocy obliczeniowej teorii matematycznych, które dostarczają modeli badanych dziedzin. Przykład: metryka Minkowskiego u podstaw szczególnej teorii względności; także mechanika matrycowa (*Matrizenmechanik*) – rachunek zainicjowany przez Wernera Heisenberga na potrzeby teorii kwantów; a także równoważna temu rachunkowi (lecz alternatywna jako metoda) Ernsta Schrödingera mechanika falowa.[9] Przytaczam te konteksty, żeby wczytując się w nie, doświadczyć, jak przekonująco brzmi pojęcie mocy obliczeniowej w zastosowaniu do matematycznych lub zmatematyzowanych teorii naukowych.

Tytuł obecnego odcinka wiąże z ideą mocy obliczeniowej zjawisko kryzysów w nauce. Motywem tego powiązania jest światopoglądowa doniosłość zagadnienia kryzysu. Jeśli światopogląd ma być busolą działań, to dla jego formowania na potrzeby naszego czasu trzeba skorzystać z takich lekcji historii, jaką był kryzys matematyki przed półtora wiekiem. Również kryzys fizyki, gdy fizyce Newtona, uchodzącej przez dwa przeszło wieki za ostateczne, nie wymagające żadnych korekt, słowo nauki, zabrakło środków obliczeniowych do wyjaśniania i przewidywania zjawisk w makroskali wszechświata, jak i mikroskali zjawisk subatomowych. Z pierwszego zadania wywiązuje się dziś w wysokim stopniu ogólna teoria względności, a z drugiego mechanika kwantowa.

Dzieje nauki dostarczają nam unikalnego materiału do badania kryzysów mocy obliczeniowej jako zjawiska o szerokim zasięgu, obejmującego różne dziedziny myśli i życia, w tym tak żywotnie ważne, jak gospodarka i polityka. Materia nauki jest szczególnie w tym badaniu cenna, gdyż najbardziej (co nie znaczy całkowicie) jest wolna od zaciemniających logikę kryzysu takich czynników jak gry interesów, burzliwe emocje (jakże nagminne w polityce) oraz błędy biorące się tyleż z defektów umysłowych i charakterologicznych aktorów zdarzeń, co i z niezmiernej złożoności tkanki społecznej, w której zachodzą zjawiska kryzysowe. W tej gęstwie czynników trudno o jasne dostrzeżenie istotności jednych, nieistotności innych. Przebieg kryzysów w nauce

---

omówienia problemu antynomii (autor S. Krajewski) i aksjomatycznej teorii mnogości (autor W. Marciszewski).

[9] Por. Armin Hermann, *Jahrhundertwissenschaft. Werner Heisenberg und die Geschichte der Atomphysik*, Rowohlt 1993.

wskazuje na istotność czynnika mocy obliczeniowej, czym daje podpowiedź i zachętę do jego wypatrywania w zjawiskach społecznych.[10]

§2.4. Ogólniejszy morał, który zawdzięczamy analizie kryzysów w nauce obejmuje nie tylko docenienie czynnika mocy obliczeniowej, lecz także dostrzeżenia, że kryzysy są to etapy rozwojowe biorące się z prawidłowości rozwoju, niejako z jego logiki, a nie ze złośliwości losu. Owszem, jeśli za taki dopust losu uznać będące do uniknięcia błędy, to istotnie mogą one rozdąć kryzys do rozmiarów katastrofy. Ale nie zmienia to faktu, że kryzys miewa aspekt pozytywny, jako niezbędna faza postępu.

Dobrze tę rzecz ilustruje proces rozwoju ustrojów politycznych prowadzący od monarchii do demokracji. Była w tym nieunikniona logika rozwoju, bo jedynowładza monarchy, mogąca dobrze się sprawdzać w społeczeństwach na niskim poziomie złożoności, staje się niewydolna, gdy skala złożoności problemów ustawodawczych, administracyjnych, sądowniczych, militarnych itd. przerasta możliwości ich rozwiązywania (co jest rodzajem obliczeń) przez jeden królewski mózg, nie zawsze zresztą wysokiej klasy (ale i wtedy nieusuwalny z tronu, co czyni też trudności nieusuwalnymi). Staje się więc koniecznością podział, specjalizacja i kadencyjność władzy, czyli demokracja. Takie jest parcie procesu historycznego w miarę rośnięcia złożoności życia publicznego. A póki się nie wypracuje nowego ustroju, o należycie większej mocy obliczeniowej, stary coraz gorzej sobie radzi, co od pewnego punktu przybiera znamiona kryzysu. Kryzys zaś mobilizuje do nowych rozwiązań. Będą one funkcjonować czas jakiś, dopóki zalety nowego ustroju nie doprowadzą do takiego postępu, a więc i skali złożoności problemów, że ustrój zacznie pękać w szwach, czyli zacznie się nowa faza kryzysowa; wtedy będzie się znów szukać sposobów wzmożenia mocy obliczeniowej na miarę nowej złożoności problemów. Tak następuje kolejne przejście fazowe (por. ▷wyżej §2.1).

Poprzedzone kryzysem przejście fazowe w światowej gospodarce zasługujące na opis w podręcznikach ekonomii wytłuszczoną czcionką, nastąpiło po drugiej wojnie światowej. Kryzys gospodarczy lat 1929-1933, nie bez powodu zaszczycony mianem wielkiego, był zażegnywany środkami na miarę ówczesnej wiedzy. Były wśród nich takie, które go jeszcze pogłębiały, jak tendencje autarkiczne skutkujące drastycznym spadkiem wymiany i współpracy międzynarodowej, ze stratą dla wszystkich stron.

Oto jeden z mechanizmów tej destrukcji. W owym okresie państwa prowadziły politykę dewaluacji waluty, zwiększając tym konkurencyjność swoich produktów w handlu międzynarodowym, co poprawiało bilans płatniczy, ale rodziło deflację w kraju, a z nią

---

[10] Pionierem takiego na nie patrzenia był klasyk nauk społecznych Max Weber (1864-1920), ale w tej sprawie jego głos pozostał niedostrzeżony przez kolegów z tej samej profesji; natomiast podejście od strony logiki z informatyką pozwala go wyłowić z bogactwa wątków myśli weberowskiej, co jest tematem eseju 20.

zmniejszenie popytu, spadek produkcji i w konsekwencji dochodu narodowego, za czym szedł wzrost bezrobocia.

Z ówczesnej przeto wiedzy nie udało się wykrzesać należytej zdolności rozwiązywania problemów, czyli szeroko pojętej mocy obliczeniowej. Nastąpiło jednak zbawienne uczenie się na błędach. Historyczna międzynarodowa konferencja w Bretton Woods (USA, 1944), wyciągając wnioski z lekcji Wielkiego Kryzysu, ustanowiła w skali świata nowy ład gospodarczy, który stwarzał ramy dla międzynarodowej solidarności i współpracy. Na jego straży stoją do dziś ustanowione wtedy instytucje: Międzynarodowy Fundusz Walutowy i Bank Światowy. Istotnie, agendy te potężnymi nieraz pożyczkami ratują z opresji walące się gospodarki i zarazem pomagają im w inicjowaniu reform mających zapobiegać kryzysom na przyszłość. Doświadczyła tego także Polska w dobie postkomunistycznej transformacji. Tak to funkcjonowało w miarę sprawnie przez ponad pół wieku, ale rok 2008 przyniósł nowy kryzys o skali, która przerosła wszelkie przewidywania. Takiej, że aby przewidywać i zapobiegać kryzysom w coraz bardziej komplikującej się gospodarce, od pewnego punktu nie starczyło już mocy obliczeniowej, którą winna się była wykazać teoria ekonomiczna. Stąd nowa faza kryzysowa, w której dla wyjścia z kryzysu, ucząc się znów na błędach, trzeba pozyskiwać nowe moce, na miarę większej niż niegdyś złożoności życia gospodarczego.

§3. Intermedium: z wizytą w Wiedniu u docenta Gödla

§3.1. Obecny odcinek stanowi przygotowanie do rozważań, które wprowadzą głębiej w kwestie wzrostu mocy obliczeniowej jako środka pokonywania kryzysów. W przezwyciężaniu kryzysu matematyki w 19-ym wieku pierwszym, przypomnijmy, krokiem było stworzenie logiki matematycznej. Dostarczyła ona środków, żeby rozumowaniom matematycznym nadać postać rachunkową czyli algorytmiczną. Choć nie było jeszcze maszyn rachujących, kształtuje się wtedy język, który okaże się zrozumiały dla maszyn. Pierwszy kroki w tym kierunku, aksjomatyczne sformalizowane systemy logiki były dziełem Fregego i konstelacji innych wybitnych umysłów, wśród których ważną rolę odegrali logicy polscy.

Ważna też dla dalszego biegu wydarzeń była aksjomatyzacja arytmetyki, której dokonał jako pierwszy (1899) matematyk Giuseppe Peano (1858-1932). Odtąd, gdy mowa o rozwiązywaniu zagadnień arytmetycznych przez dowodzenie twierdzeń, dobrze wiadomo, od czego wiarogodność dowodu zależy, mianowicie od aksjomatów. Jest to potrzebne, by rozumieć następny krok w tym procesie: program Davida Hilberta (1862-1943), który jako jedno z wielkich zadań matematyki na wiek 20 wymienił problem formalnej czyli algorytmicznej, a dziś powiemy też maszynowej, rozwiązywalności problemów arytmetyki na gruncie określonych aksjomatów.

Na pytanie Hilberta odpowiedział w roku 1931 młody docent z uniwersytetu wiedeńskiego Kurt Gödel (1906-1978), zdumiawszy świat naukowy twierdzeniem, że są w arytmetyce prawdy, których nie da się udowodnić w sposób formalny, czyli algorytmiczny, to znaczy, przez wyprowadzenie z aksjomatów za pomocą reguł logiki. W erze komputerów odczytujemy to tak, że istnieją prawdy arytmetyczne niedowodliwe dla maszyny.

Przełomowe studium Gödla nosi tytuł: *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme – I.*[11] Klasa zdań określonych w tym tytule jako „nierozstrzygalne formalnie" pokrywa się z klasą tych, których nie jest w stanie udowodnić maszyna. „Formalnie" bowiem znaczy tyle, co „algorytmicznie", to jest w sposób odwołujący sie jedynie do fizycznego kształtu (formy) wyrażeń, co po arytmetyzacji języka w zapisie binarnym i fizykalizacji zapisu w postaci impulsów elektrycznych pozwala zapisać każdy tekst w języku maszyny.

§3.2. Żeby móc wyłożyć rzecz dokładniej, warto przedstawić postać Kurta Gödla z jego wiedeńskim środowiskiem. Niech dygresję usprawiedliwi myśl Goethego, że aby dobrze rozumieć pisarza, trzeba odwiedzić jego ojczyznę. Wprawdzie Goethe miał na myśli raczej poetę niż matematyka, ale tu można sobie pomóc sentencją Hilberta, że matematykowi jeszcze bardziej niż poecie potrzebna jest wyobraźnia. A to, jak ona pracuje, w wielkiej mierze zależy od intelektualnego otoczenia pisarza.

Wybitny polski logik matematyczny Andrzej Mostowski (1913- 1975), jeden z głównych kontynuatorów dzieła Gödla, opowiadał o wrażeniach z jego seminarium, na które jeździł do Wiednia w latach trzydziestych ubiegłego wieku. Mostowski wspominał, że wyglądało to tak, jak gdyby Gödel dysponował bezpośrednim telefonem do Pana Boga, i w najtrudniejszych problemach po chwili „konsultacji" miał gotowe rozwiązanie. Ta anegdota dobrze oddaje niezwykłość umysłu i dokonań Gödla.

Wiedeń w latach międzywojennych, a także poprzedzających pierwszą wojnę światową, był bodaj najaktywniejszym centrum intelektualnym Europy, o zdumiewającej wszechstronności zainteresowań i najwyższej klasie osiągnięć. Dotyczyło to także matematyki i filozofii. Promotorem rozprawy doktorskiej Gödla (1930), w której udowodnił on zupełność logiki pierwszego rzędu, był wybitny matematyk Hans Hahn (jego nazwisko dało nazwę kilku odkrytym przezeń ważnym faktom matematycznym). Hahn zapoznał Gödla z gronem wybitnych uczonych różnych specjalności, w tym filozofów, które zapisało się trwale w dziejach myśli pod nazwą *Koła Wiedeńskiego*. Stanowisko filozoficzne Koła znane jest pod nazwą *neopozytywizmu* i drugą – *empi-*

[11] Jest to rozprawa habilitacyjna Gödla opublikowana w „Monatshefte für Mathematik und Physik" vol. 38, 1931, s. 173-198.

ryzmu logicznego. Sztandarową jego tezą był pogląd, że istnieje tylko to, co jest dane w doświadczeniach zmysłowych; nie istnieje więc ani umysł ani abstrakcyjne przedmioty matematyczne, matematyka zaś jest tylko instrumentem stworzonym w celu przetwarzania informacji przez naukę. Skoro tak, to nie istnieje prawda matematyczna, bo prawda jest stosunkiem zgodności między treścią poznania i jego przedmiotem, a skoro nie ma przedmiotu, nie może być takiego stosunku. Jeśli nie istnieje prawda, to racją dla zdań jako twierdzeń przyjmowanych w obręb nauki może być tylko to, że zostały one dowiedzione przez wyprowadzenie ich z aksjomatów za pomocą reguł logiki. A zatem, jeśli mamy tradycyjnie mówić o prawdziwości w matematyce, to trzeba czynić to ze świadomością, że jest to tylko umowny sposób mówienia, w gruncie zaś rzeczy mamy na uwadze dowodliwość. Krótko mówiąc, w matematyce: zdanie prawdziwe to tyle, co zdanie dowodliwe z aksjomatów za pomocą czysto formalnych (algorytmicznych) reguł logiki (i nic więcej). W doktrynie Koła dowodliwość utożsamiano zakresowo z prawdziwością na tej podstawie, że druga jest tylko inną nazwą na tę pierwszą, a nie określeniem innej cechy.

Tradycyjnie również utożsamiano prawdziwość i dowodliwość zakresowo, ale na innej podstawie. Uznając odrębność tych cech, sądzono, iż prawdziwość implikuje dowodliwość, czyli że każde prawdziwe zdanie matematyki da się w niej dowieść przez wyprowadzenie logiczne z aksjomatów. Kto by więc głosił, że istnieją prawdy matematyczne niedowodliwe, płynąłby pod prąd, a raczej pod dwa prądy, występując przeciw postawie tradycyjnej jak i stanowisku kontestatorów z Koła Wiedeńskiego. I to właśnie uczynił Gödel. A choć była to wiadomość rewolucyjna i godząca w pogląd od wieków utrwalony, wywód Gödla był udokumentowany z tak nieodpartą matematyczną precyzją, że po niedługiej dyskusji wyczerpała się wszelka w tym względzie opozycja. Od tej pory wynik Gödla należy do niekwestionowanych osiągnięć nauki.[5].

Nie uzyskały natomiast aprobaty aż tak powszechnej jego poglądy filozoficzne, które on sam wiązał myślowo ze swymi wynikami naukowymi. Co się tyczy wkładu Gödla do filozofii, to obejmuje on nie tylko filozofię matematyki, którą zajmował się podobnie intensywnie, jak samą matematyką. Wchodzi też w fundamentalne kwestie ontologii, epistemologii i filozofii umysłu, w których nawiązywał on do platonizmu. Nie jest to jakiś nawrót koncepcji Platona w jej historycznej postaci, lecz nowoczesna wizja świata, która dobrze się tłumaczy przez analogie z myślą platońską.

Przewrót myślowy dokonany przez Gödla, który w jednej jakby odsłonie ukazał ograniczenia maszyny i zarazem nieograniczony potencjał ludzkiego umysłu – potencjał owocujący dynamiką mocy obliczeniowej w sprzężeniu umysłu z maszyną – to temat, który co do głównego wątku jest podjęty w eseju następnym, a pewne przygotowawcze szczegóły, żeby odciążyć ów główny

[5] W sprawie treści odkrycia Gödla i jego okoliczności historycznych zob. A. K. Dewdney, *Granice rozumu*, przełożył Jerzy Lewiński, Amber 2004, seria „Tajemnice nauki”

wątek, podaję w następnym odcinku eseju obecnego. Wizyta w Wiedniu spełni swe zadanie, jeśli nas przekona, że przez takie szczegóły warto się przekopywać, żeby przetrzeć drogę do odkrywczej myśli Gödla.

§4. Strategia cyfrowa: od arytmetyzacji do fizykalizacji języka

§4.1. Jak wiemy, komputer jest narzędziem uniwersalnym, tak jak to przewidział Turing, definiując swoją uniwersalną maszynę (▷esej 2, §2, esej 10, §3). Może wykonać każde zadanie, pod warunkiem, że wpiszemy mu w dysk odpowiedni program. Może odtwarzać, ale i „autorsko” wytwarzać dowody matematyczne, obrazy, muzykę, poezję; może też wyszukiwać dane w bazie, robić korektę ortograficzną itd. itd. Z drugiej strony, wiemy, że komputer to nic innego, jak kolosalne liczydło. Jak może liczydło, powiedzmy, skomponować piosenkę?

Z jednej strony, nie ma powodu do zdziwienia, jeśli się wczytać w sentencję, że wszystko ustanowione jest pod liczbą. Czemu więc nie muzyka? Przecież to obserwacje zachowania się grających strun nasunęły Pitagorasowi tę myśl o wszechobecności liczby. Objawiło mu się, że liczba może się wcielać w stany fizyczne; a jeśli w stany strun, to czemu nie w inne? Z tekstem do piosenki sprawa może być bardziej skomplikowana, ale jest to różnica w stopniu złożoności będąca do pokonania. Warunkiem takich osiągnięć maszyny jest to, żeby dostarczyć jej odpowiedniego programu.

Z drugiej jednak strony, jeśli ta maszyna jest liczydłem, to program musi być zapisany w postaci samych cyfr; opis obiektów, na których program operuje, także zapisany w postaci cyfr, a relacje między obiektami powinny być reprezentowane funkcjami arytmetycznymi, których wartości maszyna ma obliczać. Żeby to osiągnąć, wszystkie instrukcje zawarte w programie i wszystkie opisy obiektów i funkcji trzeba ponumerować, nadając im w ten sposób nowe nazwy. Trochę tak, jak urząd państwowy każdego z nas ponumerował peselem, czyniąc z tego numeru synonim naszego imienia z nazwiskiem.

I na tym polega sekret, jak pogodzić uniwersalność zadań z tak daleko idącym ograniczeniem języka, że występują w nim jedynie symbole cyfrowe. Ograniczenie jest tym bardziej uderzające, że komputer posługuje się tylko dwoma symbolami cyfrowymi. I te dwa wystarczą do opisania całego świata i zapisania wszystkich programów.

Jest więc określenie „maszyna uniwersalna” w pełni zasłużone. Zupełnie jak w żartobliwych opowieściach Lema z „Cyberiady”, o genialnych robotach konstrukcji Trurla i Klapaucjusza. Ich uniwersalne roboty potrafią dosłownie wszystko. Jak pisze David Deutsch, znany fizyk kwantowy i pionier kwantowego komputera, uniwersalna maszyna Turinga może symulować dowolne środowisko fizyczne, byleby miała algorytm, którego efektywność jest na miarę trudności podejmowanych problemów, odpowiednio szybki procesor i pojemną pamięć, oraz należyte zasoby energii.[6]

Nasz uniwersalny robot stawia tylko jeden (jak powiedziano wyżej) warunek: informacje mające być przesłankami rozwiązywania problemów muszą być podane jako ciągi samych zer i jedynek. Każmy mu np. rozwiązać taki nie specjalnie trudny problem: jeśli Pawełek ma 129 cm. wzrostu, a Gawełek 64, to o ile centymetrów Pawełek jest wyższy od Gawełka? Sam problem arytmetyczny jest dziecinny, ale nie do pokonania zdaje się być problem lingwistyczny – przetłumaczenia tego zdania na ciąg samych zer i jedynek. Owszem liczby określające wzrost łatwo jest zapisać binarnie; nawet dziecko odpowie (po lekcjach szkolnej informatyki), że Pawełek mierzy 10000001, a Gawełek 1000000 centymetrów. Ale co zrobić z resztą wyrażeń?

Kłopot jest nie tylko z imionami, pojęciem wzrostu itd., ale już na poziomie zapisu równości arytmetycznej $10000001 - 1000000 = 1000001$ powstaje pytanie: jakimi ciągami zer i jedynek oddać znak odejmowania i znak równości? O takich środkach ekspresji marzył już Leibniz, ale pierwszym, któremu to się udało był Kurt Gödel w przełomowych dla matematyki, logiki i filozofii badaniach opublikowanych w rozprawie z roku 1931.

Pochodząca od Gödla metoda arytmetyzacji składni nie była pomyślana na potrzeby komputerów, bo tych jeszcze nie było, ale ujawniła, przy sposobności innych badań, jak wielkie kryją się w tej metodzie możliwości. Gödel zastosował ją do prostego leksykalnie języka, ograniczonego w wersji ascetycznej do dziesięciu operatorów logicznych i arytmetycznych, a do jakichś dwudziestu w wersji dogodniejszej, ułatwiającej skracanie wyrażeń. Nie było w nim natomiast ograniczeń na liczbę zmiennych liczbowych (reprezentujących liczby naturalne), zdaniowych i predykatowych. Każdy znak otrzymał swój numer: operatory (jak spójniki logiczne, symbole działań arytmetycznych) numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi, np. od 1 do 10, a zmienne następującymi po 10 (jeśli trzymać się tego przykładu) liczbami pierwszymi podniesionymi każda do potęgi przypisanej danej kategorii zmiennych (np. do kwadratu dla zmiennych zdaniowych).

Każda formuła czy to logiczna (np. $\exists_x \forall_y R(xy)$, czy zbudowana z symboli logicznych i arytmetycznych $(\forall_x \exists_y (y > x)$, zostaje odwzorowana w formule czysto arytmetycznej w sposób, który prześledzimy na przykładzie formuły:

$$\exists_x (x = Sy)$$

gdzie „*S*” oznacza następnik (od łac. Sequens), a kolejnym znakom z naszej formuły – od „∃” do „)” – przydzielamy umownie następujące numery:[7]

---

[6] David Deutsch, „Struktura Rzeczywistości”, przełożył Jerzy Kowalski-Glikman, Prószyński i S-ka, 2007. Oryginał: „The Fabric of Reality”, 1997.

[7] Przykład numeracji, wzorowanej z grubsza na oryginalnej numeracji Gödla, jest zaczerpnięty z cieszącej się dużą popularnością książeczki dwóch znakomitych logików: E. Nagel,

$$4,11,8,11,5,7,13,9.$$

Numer przysługujący jednoznacznie naszej formule oblicza się w następujący sposób. Tworzymy iloczyn, którego czynnikami są kolejne liczby pierwsze, każda podniesiona do takiej potęgi, której wykładnikiem jest numer danego symbolu. Bierzemy więc wyliczone wyżej numery w roli wykładników potęgowych, i tak otrzymujemy iloczyn:

$$2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^8 \cdot 7^{11} \cdot 11^5 \cdot 13^7 \cdot 17^{13} \cdot 19^9$$

Wykonawszy mnożenie, otrzymamy numer naszej formuły; tak otrzymaną liczbę przyjęło się nazywać *numerem gödlowskim*. Konsekwentna w tej procedurze preferencja dla liczb pierwszych, tak w numerowaniu zmiennych, jak w dobieraniu podstaw potęg dla wyrazów iloczynu, tłumaczy się względem na tzw. *podstawowe twierdzenie arytmetyki*, które głosi: *każda liczba naturalna złożona, czyli niepierwsza, ma dokładnie jeden rozkład na czynniki pierwsze*. Dzięki temu w numerze gödlowskim każdej formuły logicznej lub arytmetycznej zostaje zakodowana liczbowo, czyli arytmetycznie, jej struktura czyli składnia, to jest, symbole składowe w określonej kolejności. Z tej racji opisaną procedurę nazywamy *arytmetyzacją składni* lub *arytmetyzacją języka*.

§4.2. Arytmetyzacja według pomysłu Gödla, choć w jego badaniach była stosowana do języka o bardzo skromnym zasobie leksykalnym, dostarcza wzorca dającego się zastosować do języka o dowolnym bogactwie wyrażeń; może to rodzić pokaźne problemy techniczne, ale jest w zasadzie wykonalne. W szczególności, poddaje się tej procedurze w sposób niejako naturalny język programów czyli algorytmów wyrażanych w języku maszyny. Gdy są to napisy w notacji binarnej, formuły stają się nieznośnie długie, ale to kłopot dla człowieka, a dla komputera nie ma w tym nic nieznośnego, to jakby jego chleb powszedni.

Teraz zadana wyżej zagadka, jak przełożyć na język komputera pytanie, o ile jest wyższy Pawełek niż Gawełek, przestaje być zagadką. Po prostu, trzeba dać numery symbolom odejmowania i równości, słowu „wzrost", imionom „Pawełek" i „Gawełek" etc. Strukturę tekstu można oddać według recepty pochodzącej od Gödla (ale nie jest to sposób jedyny). Wykonawszy mnożenie, dostajemy pojedynczą liczbę, którą zapisujemy w notacji dwójkowej i po takiej binaryzacji dostarczamy ją komputerowi. W tej postaci nie ma w niej nic, co byłoby dlań nie do przyjęcia. Nie ma bowiem w tym ciągu symboli niczego prócz zer i jedynek, a te są dla komputera cyfrowego jak swojski język ojczysty;

J. R Newman, *Gödel's Proof*, New York University Press, 1958, w przekładzie Barbary Stanosz pt. *Twierdzenie Gödla*, Warszawa 1966, PWN, seria Omega. Przystępnie przedstawione rozumowanie Gödla, wraz z procedurą kodowania, znajduje się też w rozdziale „Okowy rozumu" książki: A. K. Dewdney, *Granice rozumu*, przekład Jerzy Lewiński, Amber 2004.

trzeba jedynie tego, żeby wyrażać jedne i drugie jako wyraźnie odróżnialne impulsy elektryczne czyli dokonać pewnego rodzaju fizykalizacji. Sekwencje takich impulsów są ciągami cyfr, z których jedne kodują liczbę zero, a drugie liczbę jeden.

I tak dochodzimy do zauważenia, że nie dałoby się wyrażać dowolnych tekstów w binarnym kodzie komputera, gdyby nie były one poddane arytmetyzacji czyli zakodowaniu w języku złożonym wyłącznie z cyfr. Cyfry mogą należeć do dowolnej notacji, np. dziesiętnej. Jeśli jednak wyrażają one informację, którą chcemy dać do przetworzenia takiej maszynie, jak komputer cyfrowy, to trzeba operować notacją binarną jako jedyną, którą komputer akceptuje. W takim układzie, arytmetyzacja tekstów jest nieodzownym ogniwem pośredniczącym między tekstem oryginalnym i jego tłumaczeniem na maszynowy kod binarny. Stosowne jest dla tego ogniwa określenie *złącze* zapożyczone z elektroniki, ale dobrze oddające opisywaną tu rolę; jest to ukuty na potrzeby polszczyzny odpowiednik angielskiego *interface*, czasem też spolszczanego jako „interfejs".

Podsumowując, powiemy, że arytmetyzacja języka, w którym zapisana jest informacja do przetworzenia maszynowego, stanowi rodzaj złącza między naszym językiem zapisu informacji i językiem maszynowym, stanowiącym własny dialekt komputera. Proces ten zachodzi w trzech następujących krokach.

- *arytmetyzacja* języka, w którym zapisana jest informacja do przetworzenia maszynowego, czyli zastąpienie każdego z wyrażeń ciągiem cyfr stanowiących jego numer;
- *binaryzacja* otrzymanych ciągów cyfrowych czyli ich zapisanie w notacji binarnej;
- *fizykalizacja* zapisu binarnego przez użycie w roli alfabetu impulsów fizycznych, w szczególności elektrycznych.

Zobaczymy, jaką rolę pierwszy z tych kroków, arytmetyzacja języka, odegrał w wykazaniu ograniczeń mocy obliczeniowej, którym podlega komputer w rozwiązywaniu problemów matematycznych. Zostało to wykazane przez Kurta Gödla, potem potwierdzone i rozwinięte przez Alana Turinga i innych autorów, jeszcze nim pojawiły się na świecie komputery w postaci fizycznej. Dwa następne kroki umożliwiły ich zaprzęgnięcie, gdy się już pojawiły, do rozwiązywania problemów – ze świadomością tych ograniczeń, których odkrycie umożliwił wynalazek arytmetyzacji języka. O tym, jak do niego doszło, oraz o tym, jak odkrycie ograniczeń szło u Gödla w parze z rozpoznaniem szansy ich pokonywania, mianowicie pokonywania przez twórczy umysł ludzki, opowiada esej następny.

Punkty pod dyskusję na seminarium logiki i metodologii nauk w Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego, 20 stycznia 2011

Punkty te nie obejmują odcinka §4, który zawiera tematy do osobnej dyskusji.

1. Czy istnieją układy zdolne do rozwiązywania problemów nierozwiązywalnych dla komputera cyfrowego czyli Uniwersalnej Maszyny Turinga?

2. Jeśli tak, to czy wtedy rozwiązywanie problemu dokonuje się zawsze metodą obliczeń analogowych, czy też może to być proces ani cyfrowy ani analogowy?

3. Czy do problemów nierozwiązywalnych dla maszyny cyfrowej należy znajdowanie aksjomatów teorii, np. arytmetyki?

4. Jeśli tak, to czy jest to obliczanie analogowe, czy proces jeszcze innego rodzaju, ani cyfrowy, ani analogowy?

5. Czy istnieją własności ciągłe w przyrodzie (np. czas, przestrzeń), czy może wszystkie są dyskretne, a ciągłość jest wytworem wyobraźni pomocnym do pewnych obliczeń?