AGNOSTYCZNY JEŻ W LESIE SEMANTYCZNYM

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki Stosowanej UAM
`www.logic.amu.edu.pl`

IZABELA BONDECKA-KRZYKOWSKA
Zakład Logiki Matematycznej UAM
`www.logika.amu.edu.pl`

Pan Profesor Witold Marciszewski jest autorem szeregu znakomitych pomocy dydaktycznych do nauczania logiki. Niniejszy tekst poświęcamy pewnym refleksjom dotyczącym właśnie nauczania logiki.[1] W szczególności, staramy się zwrócić uwagę na zalety posiłkowania się MDS (Metodą Drzew Semantycznych) w wykładzie Klasycznego Rachunku Predykatów, która to metoda — o ile wiemy — należy do lubianych przez Profesora technik. Niektóre z przytoczonych w tekście przykładów zaczerpnięto z przygotowywanego skryptu *Metoda drzew semantycznych w klasycznym rachunku logicznym.*[2]

1. Uwagi wstępne

Terminy: *tablice semantyczne*, *tablice analityczne*, *drzewa semantyczne*, itp. znane są każdemu, kto logikę mógł studiować lub chce (bądź musi) jej nauczać. Związane są one z technikami badania czy zachodzi wynikanie logiczne, ustalaniem czy dane formuły są prawami logiki, rozpoznawaniem spełnialności (semantycznej niesprzeczności) zbiorów formuł, itd., a więc z centralnymi zadaniami, których rozwiązania oczekujemy od logiki na jej elementarnym poziomie. Istota rozważanej metody to postępowanie *apagogiczne*, nakierowane na wykluczanie zajścia pewnych sytuacji. Nadto, drugą charakterystyczną cechą tej

---

[1] Tekst opublikowany w: K. Trzęsicki (ed.) *Ratione et Studio. Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu w darze.* Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok, 191–234.

[2] Autorzy dziękują: Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu oraz Panu Doktorowi Tomaszowi Połacikowi za życzliwe rady i trafne uwagi krytyczne dotyczące niniejszego tekstu.

metody jest odwoływanie się jedynie do *podformuł* rozpatrywanych formuł. Drzewowe reprezentacje zastosowań tej metody są, w ściśle określonym sensie, dualne do drzewowych reprezentacji dowodów prowadzonych na sposób hilbertiański lub gentzenowski.

Wspomniane wyżej terminy pojawiają się w literaturze logicznej około pół wieku temu, można jednak ich historię prenatalną, a także drogi prowadzące do samego momentu poczęcia metody je wykorzystującej wiązać z o wiele wcześniejszymi rezultatami uzyskanymi w logice i metalogice.

Informacje historyczne, wraz ze stosownymi eksplikacjami znaleźć można np. w monografii Marciszewski-Murawski 1995. Autorzy wymieniają Everta W. Betha, Jaakko Hintikkę oraz Karla Schütte'go jako prekursorów omawianej tu metody, nawiązujących do wcześniejszych klasycznych prac Gerharda Gentzena. Wskazują też na dalsze rozwinięcia tej metody, przede wszystkim przez Stephena Kleene'go, Saula Kripke'go, Raymonda Smullyana oraz Paula Lorenzena.[3]

W literaturze polskiej konstrukcje rozważanego typu (lub bardzo im bliskie) również pojawiły się stosunkowo wcześnie. Do ważniejszych należy zaliczyć m.in. propozycje Heleny Rasiowej i Romana Sikorskiego (np. Rasiowa-Sikorski 1963), prace Zdzisława Pawlaka (np. Pawlak 1965), ważny artykuł Zbigniewa Lisa (Lis 1960; złożony w redakcji *Studia Logica* 3 marca 1959 i zawierający propozycje, które zyskały sporą popularność dzięki późniejszym, acz niezależnym pracom Raymonda Smullyana).[4]

Jest wiele podręczników wykorzystujących omawianą metodę. Największą popularnością cieszyły się bodaj: Smullyana *First Order Logic*, Jeffreya *Formal Logic: Its Scope and Limits*, Bella i Machovera *A Course in Mathematical Logic*, Hodgesa *Logic*. Piszący te słowa cenią sobie np. przystępnie napisane podręczniki: *Elementary formal logic* (Georgacarakos-Smith 1979) oraz *Logika matematyczna w informatyce* (Ben-Ari 2005). W literaturze polskiej metoda ta jest konsekwentnie stosowana w podręcznikach Małgorzaty Porębskiej i Wojciecha Suchonia (zob. np. Porębska-Suchoń 1991), a ostatnio również w dostępnych w Internecie opracowaniach Witolda Marciszewskiego.[5]

Cele niniejszego krótkiego artykułu są dwa. Pierwszym jest oczywiście skromne wyrażenie wdzięczności Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu za możliwość obcowania z jego nieprzeciętną osobowością, oraz z jego dokonaniami naukowymi, z których staraliśmy się korzystać wysilając nasze skromniutkie moce intelektualne, za okazywaną nam wszystkim bezinteresowną życzliwość i pomoc. Drugim, który uważać można za nieskromny (ale chyba nie całkiem nikczemny), jest autoreklama przygotowywanego przez piszących te słowa po-

---

[3] Zobacz prace wymienionych autorów zamieszczone w odnośnikach bibliograficznych.

[4] Nie jest naszym zadaniem podawanie w tym miejscu wyczerpujących, skrupulatnych informacji o historii rozwoju omawianej metody. Zwięzłe, acz bardzo treściwe informacje zawiera monumentalny *Handbook of Tableau Methods* 1999. Krótką prezentację historii rozwoju metody podaje także np. artykuł Annelis 1990.

[5] Zobacz *Lectorium* Profesora, gdzie znajdujemy wciąż nowe teksty dotyczące nauczania logiki i jej zastosowań. Odnośniki do innych stron w domenie ***calculemus.org*** także prowadzą do wielu artykułów Witolda Marciszewskiego. Całkiem poważnie, bez przypisywanej nam zwykle przez otoczenie wesołkowatości cytujemy pointę starego żartu: *Mniej jeździć, więcej czytać, towarzysze!* Warto.

dręcznika *Metoda drzew semantycznych w klasycznym rachunku logicznym.* Mamy nadzieję, że efekt końcowy tego przedsięwzięcia sprawi Profesorowi przyjemność, jako że po części inspirowany jest jego właśnie zapałem w propagowaniu metody drzew semantycznych (w różnych jej odmianach) w dydaktyce logiki. Może dostarczy też minimalnych choćby pożytków studiującym dobrowolnie, samowolnie bądź tylko regulaminowo logikę elementarną.

Tych z ewentualnych czytelników tego tekstu, którzy nie znajdą w nim absolutnie nic dla nich nowego upraszamy o wyrozumiałe przypomnienie sobie deklaracji estetycznej inż. Mamonia z *Rejsu*, który *lubił tylko te piosenki, które już kiedyś słyszał.*

W dalszym ciągu tekstu skrót MDS zastępuje określenie *metoda drzew semantycznych*, natomiast KRZ oraz KRP są powszechnie używanymi skrótami dla *klasycznego rachunku zdań* oraz *klasycznego rachunku predykatów*, odpowiednio. FOL jest używanym w literaturze skrótem dla *logika pierwszego rzędu.*[6]

2. MDS i Humanistki

Ze względu na liczne zastosowania w zautomatyzowanym przetwarzaniu informacji (np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń) MDS jest atrakcyjna dla informatyków.[7] To całkiem zrozumiałe — dostępne środki techniczne są wystarczające, aby w stosunkowo krótkim czasie (a zatem także niedrogo) zbudować *myk-myk* drzewo semantyczne dla formuł o sporej nawet złożoności.

Przy całym szacunku dla *potęgi bezmyślności* nieprawdopodobnie szybkich maszyn matematycznych warto może pamiętać o tym, że *twórczy* charakter pracy w naukach formalnych zakłada, iż w grę wchodzą różnorakie aspekty natury *pragmatycznej.* Przywołajmy w tym miejscu słowa napisane prawie pół wieku temu:

> Wyobraźmy sobie, że matematyk chce sprawdzić, czy jakieś wyrażenie jest twierdzeniem badanej przez niego teorii. Dowód tego twierdzenia wymaga jednak milionów bądź miliardów operacji, tak że wykonanie ich przez człowieka jest praktycznie niemożliwe. A więc o twierdzeniu tym nie można orzec czy jest ono prawdziwe czy nie. Zastosowanie w tym przypadku maszyny pozwoli przeprowadzić dowód; powstaje jednak pytanie, czy dowód ten może być przez człowieka rozumiany? W dotychczasowym sensie — chyba nie. Jeżeli nie, to za pomocą maszyn matematycznych można dowodzić twierdzeń, których nie można zrozumieć, ewentualnie pojęcie zrozumienia wymaga innej interpretacji.
>
> Pawlak 1965, 6

---

[6] Ewentualny skrót polski źle nam się kojarzy.

[7] Literatura dotycząca zastosowań (różnych odmian) MDS jest ogromna — np. pytania o terminy i techniki z nią związane zadawane wyszukiwarkom internetowym podają setki tysięcy odpowiedzi.

> Tworzenie teorii przez matematyka nie sprowadza się do kolejnego wypisywania twierdzeń i ich dowodów; teorie te są budowane w celach poznawczych. A więc twierdzenia teorii muszą być zrozumiałe, muszą dać się czytać przez człowieka ze zrozumieniem. Wiadomo zaś, że zdolności recepcyjne człowieka są ograniczone. Zbyt długie ciągi symboli nie mogą być przez człowieka rozpoznawane i czytane ze zrozumieniem.
>
> Pawlak 1965, 25

> Załóżmy, że kryterium takie [*kryterium „ciekawości” twierdzenia* — IBK, JP] udało się znaleźć i że maszyna produkuje rzeczywiście ciekawe twierdzenia. Przy dzisiejszej szybkości liczenia maszyna matematyczna może w krótkim czasie wyprodukować kilkaset tysięcy twierdzeń teorii. Pojawia się więc pytanie, kto będzie mógł te twierdzenia czytać, rozumieć i wykorzystywać? Właściwie należałoby zapytać, czy w jakiejkolwiek teorii może być rzeczywiście sto tysięcy interesujących twierdzeń?
>
> Pawlak 1965, 141[8]

Zadumanie się nad powyższymi cytatami prowadzi, jak nam się wydaje, do takich samych wniosków dziś, jak i pół wieku temu. A to, że konkluzje te są podobne, powinno zachęcać do (Humanistycznej, a jakże) *metakonkluzji*.[9]

Boolos podaje ciekawy przykład ilustrujący *pragmatyczne* ograniczenia w zastosowaniach logiki pierwszego rzędu i jednocześnie wskazujący, że logika drugiego rzędu (do której pełnego zaufania mieć nie można, ze względu na niezachodzenie twierdzenia o pełności) jest bardziej *ludzka*, a nawet — chciałoby się nieco humorystycznie rzec — bardziej *Humanistyczna*; zob. Boolos 1987. Streszczając wynik Boolosa: dostarcza on przykładu wnioskowania, którego zapis formalny w logice pierwszego rzędu nie mieści się w istniejącym Wszechświecie, a które stosunkowo łatwo prześledzić w formalizmie logiki drugiego rzędu.

Planowany przez piszących te słowa skrypt ma być prezentacją wybranej metody (MDS), a nie podręcznikiem logiki. Połowa z nas uczy logiki od trzydziestu lat, używając w tym celu przeróżnych metod; MDS stosowana jest w tej posłudze dydaktycznej (przede wszystkim dla Humanistek) od lat prawie dwudziestu. Gdy ma się prowadzić wykład z logiki, to — jak (chyba bez

---

[8] Czytelnik zechce wybaczyć, że przywołujemy przydługie cytaty. Częściowym usprawiedliwieniem niech będzie tematyka poruszana w 4.4. poniżej.

[9] Połowa z piszących te słowa pamięta wykład inauguracyjny Profesora Andrzeja Mostowskiego wygłoszony podczas otwarcia *Międzynarodowego Centrum Matematycznego im. Stefana Banacha* w Warszawie w 1973 roku. Prelegent mówił wtedy m.in. o tym, jak ważne (i jednocześnie beznadziejnie trudne) byłoby scharakteryzowanie co to znaczy, że jakieś twierdzenie matematyczne jest *interesujące*, *ciekawe*, itp. Pamiętamy też wyraz (chyba) skupienia, malujący się na twarzy Pierwszego Sekretarza Komitetu Wojewódzkiego Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej, służbowo obecnego podczas tego otwarcia — *Wyjść przed wykładem, czy poczekać? Może będzie potem poczęstunek?*

przekory) pisał James McCawley — *łatwiej jest napisać podręcznik do swoich wykładów, niż go nie napisać.*[10]

Daleko nie wszystkie Humanistki[11] lubią najstarszą dyscyplinę humanistyczną, jaką jest logika. Stąd, zdarza się usłyszeć (dla nas zabawne) wypowiedzi rodzaju: *Po co mi logika? Jestem Humanistką!* Jak wykładowca może próbować sobie dawać radę w takiej sytuacji, bez masochistycznej emigracji wewnętrznej (kryjąc się za tarczą programu studiów) i jednocześnie bez apodyktycznego sadyzmu (by nie rzec: molestowania) intelektualnego wobec niewinych, ufnych przede wszystkim w Eufonię Słowa, Humanistek, zależy od jego umiejętności dydaktycznych, doświadczenia, a także od otwartości intelektualnej audytorium. W tym miejscu zwróćmy uwagę na cztery sprawy:

- Humanistki (choć oczywiście nie tylko one) w miarę łatwo przyswajają (kapralsko)-wojskowe podejście do przetwarzania informacji. Bezmyślne wykonywanie rozkazów (postępowanie według jasno określonego algorytmu) pozwala zaoszczędzić moce intelektualne, które można przeznaczyć choćby na — zrozumiałe u młodzieży — fantazjowanie na tematy gromko przez Watykan potępiane. Przymus postępowania według zaleceń algorytmu zwalnia od przykrego obowiązku ponoszenia jakiejkolwiek odpowiedzialności za minimalne choćby własne inicjatywy intelektualne (a młodzież jest wrażliwa — bardzo przeżywa wszelkie karcące uwagi, które mogłyby ją rzekomo spotkać w przypadku takich inicjatyw). *Last but not least*, algorytmy to przecież odmiana ćwiczeń logiczno-gimnastycznych dostępnych każdemu (powyżej pewnego minimalnego progu umiejętności komunikowania społecznego): gdy wspomnisz, że logika to coś w rodzaju *aerobicu* myślowego, to przytomne w danym momencie zajęć słuchaczki mogą się zainteresować nią o wiele bardziej, niż gdy długo i dobitnie przekonywać je będziesz, że to właśnie dzięki logice i racjonalizmowi kultura Zachodu uzyskała sporo całkiem niegłupich osiągnięć.

- Humanistki (choć oczywiście nie tylko one) chyba lubią *przekorę w myśleniu.* Apagogiczny charakter MDS odzwierciedla, jak mniemamy, jakąś część takiej przekory. Może za nieprzyzwoite uznane zostanie przyznawanie się do nikczemnego manipulowania młodymi umysłami, ale stwierdzamy (z rozbawieniem), że bałamutnie wskazując na rzekome związki metod apagogicznych z obmierzłym nam postmodernizmem czujemy się po trosze jak, nie przymierzając Konrad Wallenrod, jak jakaś *piąta kolumna logiczna* dosypująca truciznę racjonalizmu do obficie tryskających źródeł postmodernizmu, jak *advocatus diaboli*...

---

[10] *I didn't really want to write this book, but I decided in 1974 that it would be easier for me to write it than to not write it, assuming, that is, that I was going to continue teaching courses on logic for linguists regularly.* McCawley 1981, ix.

[11] Używany *passim* w tym tekście termin *Humanistka* nie ma — w naszej intencji — wydźwięku pejoratywnego. Zaczęliśmy go używać na sugestię samych nauczanych. Posługę dydaktyczną staramy się wykonywać rzetelnie, pomni złożonej przysięgi doktorskiej. Nauczanie Humanistek (rudymentów) logiki to zajęcie i trudne i ciekawe.

- Humanistki dzisiejsze (choć oczywiście nie tylko one) należą do *pokolenia obrazkowego*, łatwiej przetwarzającego informację podaną w postaci diagramów, ikon, rysuneczków, itp. niż taką samą informację poddawaną obróbce na modłę, powiedzmy, algebraiczną. Istnieje już spora literatura na temat tego, jak skutecznie wykorzystywać w dydaktyce takie właśnie nastawienie nauczanych.
- Humanistki oswojone są (dokładniej: powinny być) z różnego typu drzewami — szczególnie dotyczy to tych, które mają kontakt z analizami lingwistycznymi, w których rozmaicie znakowane drzewa są na porządku dziennym. W ostateczności, jeśli z ich pamięci umknęły wiadomości dotyczące gramatyk generatywno-transformacyjnych, gramatyk kategorialnych, gramatyk dependencji, HPSG, itp., to zawsze można odwołać się np. do drzew genealogicznych (te z Humanistek, które śledzą uważnie, powiedzmy perypetie generacji bohaterek ukazane w kilkuset odcinkach telenoweli *Kłąb żądz* nie będą miały najmniejszej trudności w operowaniu reprezentacjami drzewowymi).

Piszący te słowa czują wewnętrzną potrzebę złożenia krótkiej deklaracji. Wszelkie podawane dalej przykłady wykorzystujące język naturalny (polski) są czczą jedynie igraszką. Moglibyśmy ograniczyć się do rozważania jedynie formuł języka rachunku predykatów (bo tego języka dotyczy w istocie omawiana metoda!). Wierzymy, że formuły języka rachunku predykatów można próbować odczytywać w języku naturalnym; czasami odczytania takie mają nawet odrobinę sensu. Nie wierzymy, że „przekład" w drugą stronę jest jakoś wyraźnie zdeterminowany, tj. nie wierzymy w możliwość *bezpośredniej*, adekwatnej reprezentacji ***dowolnych*** wyrażeń języka naturalnego w języku KRP. To *Szema Israel* logiczno-lingwistyczne jest jednak tematem na osobną książkę.[12] W niektórych z rozważanych niżej przykładów wskazujemy na *ad hoc* wybrane kłopoty z takimi przekładami. Zachęcamy też do lektury wnikliwych analiz przeprowadzanych przez Witolda Marciszewskiego (w jego wspomnianym już wyżej *Lectorium*) konkretnych przykładów wnioskowań.

3. Przypomnienie podstawowych pojęć związanych z MDS

Podamy teraz — w największym skrócie — pewne ustalenia definicyjne oraz propozycje notacji. Używamy notacji eklektycznej i nieco nadmiarowej; jak dotąd, dość dobrze sprawdzała się ona w praktyce dydaktycznej.

Być może, Czytelnik miał już jakąś styczność z którąś z wersji MDS (np. z tablicami Smullyana). Istota metody polega, jak wiadomo, na szukaniu kontrprzykładów. Gdy udaje się np. pokazać, że dana formuła *A nie jest* fałszywa

---

[12] Zatrwożonego naszym gadulstwem Czytelnika spieszymy uspokoić: osobiście nie czujemy potrzeby jej napisania.

w żadnej interpretacji (przez dojście do sprzeczności przy przypuszczeniu, że w co najmniej jednej interpretacji A *jest* fałszywa), to wykazana zostaje tym samym prawdziwość A we wszystkich interpretacjach. Gdy zaś (przy takim samym przypuszczeniu) do sprzeczności nie dochodzimy, to możliwe jest skonstruowanie kontrprzykładu, tj. interpretacji, w której formuła A jest fałszywa.

Przeprowadzana analiza semantyczna polega na ustalaniu wartości logicznej *podformuł* formuły o danej wartości logicznej. Sprowadza się ona zatem do *eliminowania* stałych logicznych. W wyniku zastosowania tej procedury otrzymujemy drzewo (binarne), którego wierzchołki znakowane są podformułami oraz negacjami podformuł rozważanej formuły.

Należy oczywiście pamiętać m.in. o następujących sprawach:

- W dydaktyce używającej MDS pokazać trzeba *poprawność* tej metody, jej *trafność* (*soundness*) oraz *pełność* (*completeness*), tj. udowodnić, że formuły języka KRP, które są tautologiami wedle MDS są dokładnie tautologiami KRP w standardowym rozumieniu. Przedstawianie tego typu metalogicznych rozważań w usługowym kursie logiki dla Humanistek wymaga ostrożności, nie jest przecież celem dydaktycznym wykazywanie, iż logika zajmuje się przede wszystkim sama sobą. Nie potrafimy odmówić sobie przytoczenia w tym miejscu przypomnianej nam niedawno przez Pana Profesora Jana Zygmunta fraszki Tadeusza Kotarbińskiego:

  > Gdziekolwiek myślą sięgniesz, tkwi błędu łodyga.
  > Logiko, karcicielko, po badylach śmigaj!
  > Na chwasty moja praca później się rozpostrze.
  > A teraz czym się trudzisz? Sama siebie ostrzę.

- W praktyce dydaktycznej posługujemy się pewnymi wygodnymi uproszczeniami (drzewo „rośnie", gałąź „przedłużamy" bądź „zamykamy", itp.). Za tymi metaforycznie sformułowanymi zaleceniami postępowania stoją jednak porządne, poprawne definicje odnośnych procedur. Z punktu widzenia *efektywności* nauczania logiki dla Humanistek owe uproszczenia są chyba pożądane.

- W logicznej posłudze dydaktycznej dla Humanistek należy chyba zachować pewien umiar. Obiektywnie rzecz ujmując, pełne zalety MDS stają się widoczne, gdy ukaże się związki tej metody np. z *programowaniem w logice*, regułą rezolucji, procedurami unifikacji, itp. Nie zgadzamy się jednak z postulatami tych dydaktyków, którzy głoszą, iż ***logika powinna budzić grozę***. Choć wyznajemy *pesymistyczny racjonalizm* jako postawę życiową (z włączeniem do tej postawy akceptowanej perspektywy epistemologicznej), to uważamy, że ***logika powinna dostarczać radości***.

Zakładamy, że pojęcia dotyczące drzew (np.: gałąź, korzeń, liść, itp.) oraz reprezentacji formuł w postaci drzew są Czytelnikowi znane.

> Gałąź drzewa nazywamy ***zamkniętą***, jeśli występuje na niej para formuł postaci A, $\neg A$. W przeciwnym przypadku gałąź nazywamy ***otwartą***. Drzewo, którego wszystkie gałęzie są zamknięte, nazywamy drzewem ***zamkniętym.***

Umowa notacyjna 1. Gałąź zamkniętą drzewa kończyć będziemy liściem z symbolem × opatrzonym indeksami wskazującymi numery formuł z tej gałęzi, które pozwalają ją zamknąć, tj. które są wzajem sprzeczne.

Gałęzie otwarte drzew zaznaczać będziemy liściem z symbolem ∘. W niektórych przypadkach używać też będziemy symbolu ∘ z indeksami, lub specjalnie dobranych symboli (np. ♣, ♠, itp.) gdy będzie to przydatne w odwoływaniu się do takiej gałęzi w tekście. □

Gdy wszystkie gałęzie drzewa semantycznego formuły A są zamknięte, to nie istnieje interpretacja, w której formuła ta jest spełniona. Gdy któraś gałąź drzewa semantycznego formuły A jest otwarta, to gałąź taka odpowiada interpretacjom, w których A jest spełniona, tj. biorąc pod uwagę wszystkie formuły (atomowe) występujące na tej gałęzi można podać interpretacje, w której wszystkie formuły tej gałęzi (a więc także formuła stanowiąca korzeń drzewa) są prawdziwe.

Formuły, które są tautologiami KRP mają skończone drzewa semantyczne.[13]

Metoda sprawdzania przy pomocy drzew semantycznych, czy dana formuła języka KRP jest tautologią KRP, ma charakter *apagogiczny* — wykluczenie możliwości, że $\neg A$ jest prawdziwa w jakiejś interpretacji (a więc zamknięcie wszystkich gałęzi drzewa semantycznego formuły $\neg A$) pozwala stwierdzić, że formuła A jest tautologią KRP.

Gdy formuła A nie jest tautologią KRP, to drzewo semantyczne dla $\neg A$ może być nieskończone.[14] W takim przypadku omawiana metoda uzupełniona może być pewnymi regułami heurystycznymi.

Drzewa semantyczne budujemy także dla skończonych zbiorów formuł.[15] Na przykład pytanie, czy zbiór formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest semantycznie niesprzeczny (spełnialny) sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy istnieje co najmniej jedna interpretacja, w której wszystkie te formuły są jednocześnie prawdziwe; gdy tak jest, to zbiór ów jest semantycznie niesprzeczny, a gdy nie istnieje interpretacja, w której $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ są wszystkie prawdziwe, to zbiór ten jest semantycznie sprzeczny (niespełnialny). Gdy więc rozpoczniemy budowę drzewa semantycznego od pnia[16] złożonego z formuł $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i wszystkie jego gałęzie będą zamknięte, to wykluczona zostanie możliwość, aby formuły te były prawdziwe w jakiejś wspólnej interpretacji, a to oznacza, iż $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest semantycznie sprzeczny. Gdy natomiast drzewo, w którego pniu znajdują się formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to zbiór $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest semantycznie niesprzeczny — interpretacje, w których

---

[13] To stwierdzenie wymaga oczywiście uzasadnienia. Zob. np. Smullyan 1968, Ben-Ari 2005.

[14] Także to stwierdzenie wymaga uzasadnienia. Zob. np. j.w.

[15] MDS może być też odpowiednio stosowana w przypadku przeliczalnych zbiorów formuł, ze względu na zachodzenie w KRP twierdzenia o zwartości.

[16] Pień drzewa to część wspólna wszystkich gałęzi tego drzewa.

wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są jednocześnie prawdziwe odtworzyć można z informacji zawartych na tejże właśnie otwartej gałęzi.

W przypadku badania metodą drzew semantycznych, czy ze zbioru formuł $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ wynika logicznie formuła B budujemy drzewo, w którego pniu umieszczamy wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz formułę $\neg B$. Jeśli wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte, to B wynika logicznie z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, jako iż wykluczone zostaje istnienie interpretacji, w której prawdziwe byłyby wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz formuła $\neg B$, czyli interpretacji, w której *prawdziwe* byłyby wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oraz *fałszywa* byłaby formuła B. Gdy zaś drzewo takie ma co najmniej jedną gałąź otwartą, to dostarcza ona przykładów interpretacji, w których wszystkie formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są prawdziwe, a formuła B jest fałszywa (bo $\neg B$ wtedy prawdziwa) — a to oznacza, że B nie wynika logicznie z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Poniżej, w punktach 3.1. oraz 3.2. wyliczamy reguły MDS dla KRP z identycznością. Bierzemy pod uwagę najbardziej chyba popularny zestaw stałych logicznych używanych w posłudze dydaktycznej dla Humanistek, tj. spójniki negacji, koniunkcji, implikacji materialnej, alternatywy niewykluczającej, równoważności materialnej, kwantyfikator egzystencjalny oraz kwantyfikator generalny. W KRP z identycznością predykat identyczności traktowany jest jako stała logiczna i charakteryzowany, jak wiadomo, stosownymi aksjomatami.[17]

3.1. Reguły MDS dla KRZ

Rozumienie działania reguł MDS dotyczących spójników zdaniowych, czyli reguł przedłużania gałęzi drzewa semantycznego analizowanej formuły nie powinno nastręczać trudności.

- Koniunkcja jest prawdziwa tylko w przypadku, gdy oba jej człony są prawdziwe. Dlatego też jeżeli dana formuła ma postać koniunkcji, to oba jej człony umieszczamy na tej samej gałęzi drzewa, zapisując je jeden pod drugim.

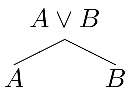
$$R(\wedge) \qquad \begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array}$$

- Jeżeli formuła jest alternatywą, to w drzewie tworzymy rozgałęzienie, a człony alternatywy umieszczamy na oddzielnych gałęziach, ponieważ alternatywa jest prawdziwa, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy.

---

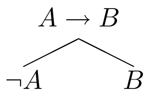
[17] We wspomnianym już *Handbook of Tableau Methods* znajdujemy przegląd różnych wersji MDS, nie tylko dla poszczególnych systemów logicznych, ale także dla systemów z pewnymi wyróżnionymi predykatami. Zob. też np. Priest 2001, Toledo 1975, McAllester-Givan 1993.

$R(\lor)$



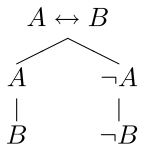
- Implikacja jest prawdziwa, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków: jej poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy. Dlatego dokonując rozkładu formuły w postaci implikacji umieszczamy negację jej poprzednika na jednej gałęzi drzewa a następnik na drugiej.

$R(\to)$



- Równoważność jest prawdziwa wtedy, gdy oba jej człony mają tę samą wartość logiczną. Zatem drzewo dla takiej formuły musi rozdzielać się na dwie gałęzie: na jednej umieszczamy oba człony równoważności bez znaku negacji (co odpowiada przypadkowi, gdy są one oba prawdziwe), na drugiej oba człony z negacją (co odpowiada przypadkowi, gdy są one oba fałszywe).

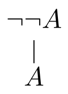
$R(\leftrightarrow)$



Reguły dla formuł języka KRZ, w których spójnikiem głównym jest negacja mają postać następującą:

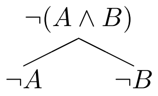
- Wartość logiczna formuły A oraz formuły $\neg\neg A$ jest taka sama, dlatego też na gałęzi zawierającej formułę postaci $\neg\neg A$ umieszczamy formułę A, co zapisujemy jako:

$R(\neg\neg)$



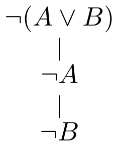
- Koniunkcja jest fałszywa wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest fałszywy, dlatego podczas rozkładu formuły będącej zaprzeczeniem koniunkcji należy umieścić negacje jej członów na oddzielnych gałęziach drzewa (co spowoduje powstanie rozgałęzienia).

$R(\neg\land)$



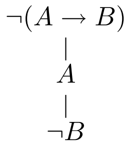
- Gdy w procesie tworzenia drzewa napotkamy na formułę będącą negacją alternatywy, to na tej samej gałęzi drzewa umieszczamy negacje obu jej członów, ponieważ alternatywa jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe.

$R(\neg\vee)$



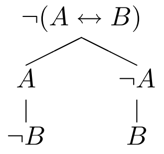
- Implikacja jest fałszywa tylko w jednym przypadku, gdy jej poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy; dlatego na jednej gałęzi umieszczamy jej poprzednik i negację następnika.

$R(\neg \rightarrow)$



- Równoważność jest fałszywa, gdy jej człony mają różne wartości logiczne. Dlatego chcąc rozłożyć formułę w postaci negacji równoważności dokonujemy rozgałęzienia i na jednej z gałęzi umieszczamy jej lewy człon i negację prawego a na drugiej negację lewego członu i człon prawy.

$R(\neg \leftrightarrow)$



W przypadku, gdy rozważamy np. KRZ w postaci implikacyjno-negacyjnej, wystarczają oczywiście tylko niektóre z powyższych reguł; zob. np. Bell-Machover 1977. W najogólniejszej postaci, stosować można też wygodne konwencje proponowane przez Smullyana (α, β, γ, δ wyrażenia — zob. np. Smullyan 1968).

3.2. Reguły MDS dla KRP (z identycznością)

Formułę otrzymaną w wyniku podstawienia za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w formule $A(x)$ stałej idywiduowej a oznaczać będziemy przez $A(a/x)$; a gdy będzie bezdyskusyjnie jasne o jakie podstawienie chodzi, po prostu przez $A(a)$.

Przypomnijmy podstawową intuicję semantyczną:

- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznajemy zdanie postaci $\exists x A(x)$, to uznamy też za prawdziwe zdanie postaci $A(a)$, gdzie a jest stałą indywiduową, oznaczającą jakiś obiekt w uniwersum tej intepretacji.
- Gdy za prawdziwe (w ustalonej interpretacji) uznajemy zdanie postaci $\forall x A(x)$, to uznamy też za prawdziwe wszystkie zdania postaci $A(a)$, dla dowolnej stałej indywiduowej oznaczającej jakiś obiekt z uniwersum tejże interpretacji.[18]

Reguły rozkładu formuł dotyczące kwantyfikatorów mają postać następującą:

- Reguła dla formuł generalnie skwantyfikowanych:

  $$R(\forall) \qquad \begin{array}{c} \forall x\ A(x) \\ | \\ A(a/x) \end{array}$$

  dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.

- Reguła dla formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:

  $$R(\exists) \qquad \begin{array}{c} \exists x\ A(x) \\ | \\ A(a/x) \end{array}$$

  dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- Reguła dla negacji formuł generalnie skwantyfikowanych:

  $$R(\neg\forall) \qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\ A(x) \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

  dla nowej stałej indywiduowej a nie występującej dotąd na rozważanej gałęzi.

- Reguła dla negacji formuł egzystencjalnie skwantyfikowanych:

  $$R(\neg\exists) \qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\ A(x) \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

---

[18] Doświadczenia związane z nauczaniem Humanistek tarskiańskiej semantyki dla KRP bywają traumatyczne. Uniwersa Herbranda, związane z MDS, prezentować należy temu audytorium również z delikatnością.

dla każdej stałej indywiduowej a występującej na rozważanej gałęzi.

Reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$ są wzmocnione dodatkowym warunkiem: jeśli na gałęzi, której dotyczy ich zastosowanie nie ma jeszcze żadnej stałej indywiduowej, to posługujemy się jakąś z góry ustaloną stałą.
Umowa notacyjna 2. Stosować będziemy następującą umowę notacyjną w graficznych reprezentacjach drzew semantycznych:

- $^{\surd}a$ oznacza opuszczenie kwantyfikatora egzystencjalnego (bądź negacji kwantyfikatora generalnego) i wprowadzenie w formule za tym kwantyfikatorem (odpowiednio, w negacji formuły) nowej stałej indywiduowej a w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;

- $^{\star}a$ oznacza zastąpienie formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej) przez formułę bez kwantyfikatora generalnego (odpowiednio, negację formuły), ze stałą indywiduową a wstawioną w miejsce zmiennej wiązanej przez ten kwantyfikator;

- numery (z kropką) umieszczane (w górnej frakcji) po prawej stronie formuł informują o kolejności wykonywanych działań; po kropce występuje symbol spójnika (bądź negacji spójnika) do którego stosujemy stosowną regułę (z reguł budowania drzew semantycznych w KRZ) lub symbole $^{\surd}$ albo * wraz ze stałą indywiduową, których dotyczą;

- numery (w nawiasach) po lewej stronie formuł informują o wynikach wykonywanych działań; formuły z pnia drzewa, które nie powstały w wyniku stosowania żadnych reguł otrzymują domyślne (nie wypisywane bez wyraźnej potrzeby) numery 0.1, 0.2, 0.3,…; indeksy dolne przy numerach formuł w przypadkach, gdy więcej niż jedną formułę dopisujemy do gałęzi w rezultacie wykonania kroku o numerze $^{n.}$ są jednej z trzech postaci:

  a) układ (n_g), (n_d) (dla reguł nie dających rozgałęzień), b) układ (n_l), (n_p) (dla reguł dających rozgałęzienie), oraz c) układ (n_{lg}), (n_{ld}), (n_{pg}), (n_{pd}) (dla reguł dotyczących równoważności oraz zanegowanej równoważności).

Tak więc, symbol $^{\surd}$ dotyczy zastosowań reguł $R(\exists)$ oraz $R(\neg\forall)$, natomiast symbol * zastosowań reguł $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$. □

Budując drzewa semantyczne w KRP najpierw rozważamy formuły egzystencjalnie skwantyfikowane (lub negacje formuł generalnie skwantyfikowanych) i wprowadzamy nowe stałe indywiduowe, następnie dla wszystkich formuł generalnie skwantyfikowanych umieszczamy na danej gałęzi odpowiednie formuły otrzymane poprzez opuszczenie kwantyfikatora generalnego (lub negacji kwantyfikatora egzystencjalnego) i zastąpienie wiązanej przezeń zmiennej każdą stałą indywiduową występującą na tej gałęzi. Jeśli nie mamy do dyspozycji żadnej formuły egzystencjalnie skwantyfikowanej ani negacji formuły generalnie skwantyfikowanej, a mamy jakieś formuły generalnie skwantyfikowane (lub negacje egzystencjalnie skwantyfikowanych), to wprowadzamy nowe stałe indywiduowe przez rozwinięcie dowolnej formuły generalnie skwantyfikowanej (lub negacji egzystencjalnie skwantyfikowanej). Jeśli w formule dla której zaczynamy budować drzewo występują już jakieś stałe indywiduowe, to oczywiście obowiązują dla nich reguły $R(\forall)$ oraz $R(\neg\exists)$.

Reguły dotyczące predykatu identyczności w metodzie drzew semantycznych można sprowadzić do następujących dwóch:

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, A zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź drzewa zawierającą formuły A oraz $t_1 = t_2$ przedłużamy dodając formułę $A(t_2//t_1)$:

  $$R_{12}(=) \qquad \begin{array}{c} A \\ | \\ t_1 = t_2 \\ | \\ A(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $A(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z A poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

- Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, A zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź drzewa zawierającą formuły A oraz $t_2 = t_1$ przedłużamy dodając formułę $A(t_2//t_1)$:

  $$R_{21}(=) \qquad \begin{array}{c} A \\ | \\ t_2 = t_1 \\ | \\ A(t_2//t_1) \end{array}$$

  gdzie $A(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z A poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.

Umowa notacyjna 3. Zastosowanie reguły $R_{ij}(=)$ w kroku $^{n.}$ do formuły o numerze (m) z wykorzystaniem identyczności termów t_1 oraz t_2 wyrażonej w formule o numerze (k) zaznaczać będziemy umieszczonym z prawej strony formuły o numerze (m) komentarzem: $^{n.^{k,t_2//t_1}}$. □

> Regułę zamykania gałęzi w KRP z identycznością rozszerzamy w sposób następujący: gałąź uznajemy za ***zamkniętą***, jeśli występuje na niej para formuł postaci A, $\neg A$ bądź formuła postaci $\neg t = t$, gdzie t jest dowolnym termem.[19]

---

[19] W podanych niżej przykładach jedynymi rozważanymi termami będą zmienne oraz stałe indywiduowe.

4. Część artystyczna: garść przykładów ilustrujących wykorzystanie MDS

Podamy kilka przykładów ilustrujących działanie MDS. Są one prościutkie, niewyszukane, wzięte z posługi dydaktycznej dla Humanistek, którym przytrafiło się przeżyć Przygodę Edukacyjną w Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Dydaktyka logiki na tych specjalnościach kierunku *neofilologia*, na których jeszcze nie skreślono owego przedmiotu z programu studiów, ma charakter prawie wyłącznie usługowy. Próby wykładu logiki jako *dyscypliny naukowej* nie spotykają się z aplauzem ze strony ani nauczanych, ani Zwierzchności. Pozostaje więc ograniczanie się do wykładu rudymentów *logica utens*: znajdowania „przekładów" nieskomplikowanych wyrażeń języka naturalnego na formuły języka KRZ lub KRP, oceny wypreparowanych rozumowań przeprowadzanych w języku naturalnym pod względem ich poprawności dedukcyjnej, ustalania, czy dany tekst jest wewnętrznie sprzeczny, itp. Prosimy nie traktować poprzedniego zdania jako przejawu zarozumiałego nadmiaru ambicji. Po prostu, trochę smuci administracyjne marginalizowanie uniwersyteckiej dydaktyki logiki. W przedmowie do podręcznika Porębska-Suchoń 1991 na stronie 5 czytamy: *Osiągnięcia logiki formalnej — najważniejszego i ciągle dynamicznie rozwijającego się działu logiki — są na ogół nieznane szerokim kręgom ludzi wykształconych, zwłaszcza — humanistycznie.* A w całkiem niedawno zamieszczonym w *Tygodniku Powszechnym* liście *Logika a degradacja świata* autorstwa Panów Profesorów Andrzeja Grzegorczyka oraz Jana Woleńskiego czytamy m.in.: *Bałaganiarskie wzory postmodernistycznego myślenia, jak populistyczne (demagogiczne) argumentowanie, stanowią poważne zagrożenie dla prawdy i często przyczyniają się do zlekceważenia najcenniejszych rozumnych rozwiązań ważnych problemów. Rygorystyczna konsekwencja logicznego myślenia jest podstawą właściwego wypełniania swoich obowiązków, codziennej uczciwości, jak i np. właściwego wypełniania misji mediów, instytucji państwowych czy organizacji pozarządowych. [...] Logika nie zbawi świata, ale może uczestniczyć w przeciwdziałaniu jego degradacji.*[20]

* * *

W podanych niżej przykładach wystąpią jedynie predykaty jedno- lub dwuargumentowe.

4.1. Kto się czubi...

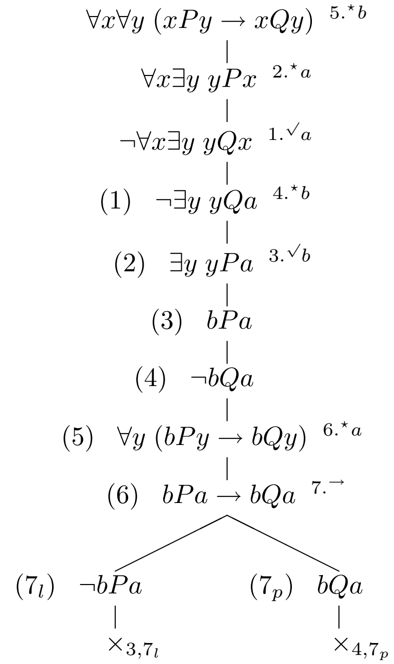
Pokażemy, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby jednocześnie następujące trzy formuły:

---

[20] http://tygodnik.onet.pl/1580,1212573,dzial.html

$$\forall x \forall y\,(xPy \rightarrow xQy)$$
$$\forall x \exists y\; yPx$$
$$\neg \forall x \exists y\; yQx$$

W pniu budowanego drzewa semantycznego umieszczamy powyższe formuły i stosujemy do nich reguły MDS:



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte, a więc badany zbiór formuł jest semantycznie sprzeczny. Nie ma interpretacji, w której te trzy formuły byłyby jednocześnie prawdziwe; nikt: ani Święte Oficjum, ani Sherlock Holmes, ani najwytrawniejsza komisja śledcza interpretacji takiej nie znajdzie.

Gdy zinterpretujemy jakoś predykaty P oraz Q, to możemy otrzymać ładny, zwięzły, absolutnie nikomu niepotrzebny, semantycznie sprzeczny tekst. Celowo, tendencyjnie wybierzmy ilustrację *kontrowersyjną*:

- xPy będzie interpretowane jako — *x lubi y*;
- xQy będzie interpretowane jako — *x czubi się z y*.

Wtedy trzy podane na początku tego przykładu formuły otrzymują następujący „przekład":

> *Kto się lubi, ten się czubi. Każdy jest przez kogoś lubiany. Nieprawda, że ze wszystkimi ktoś się czubi.*

Brzmi może i dobrze, a sensu żadnego.

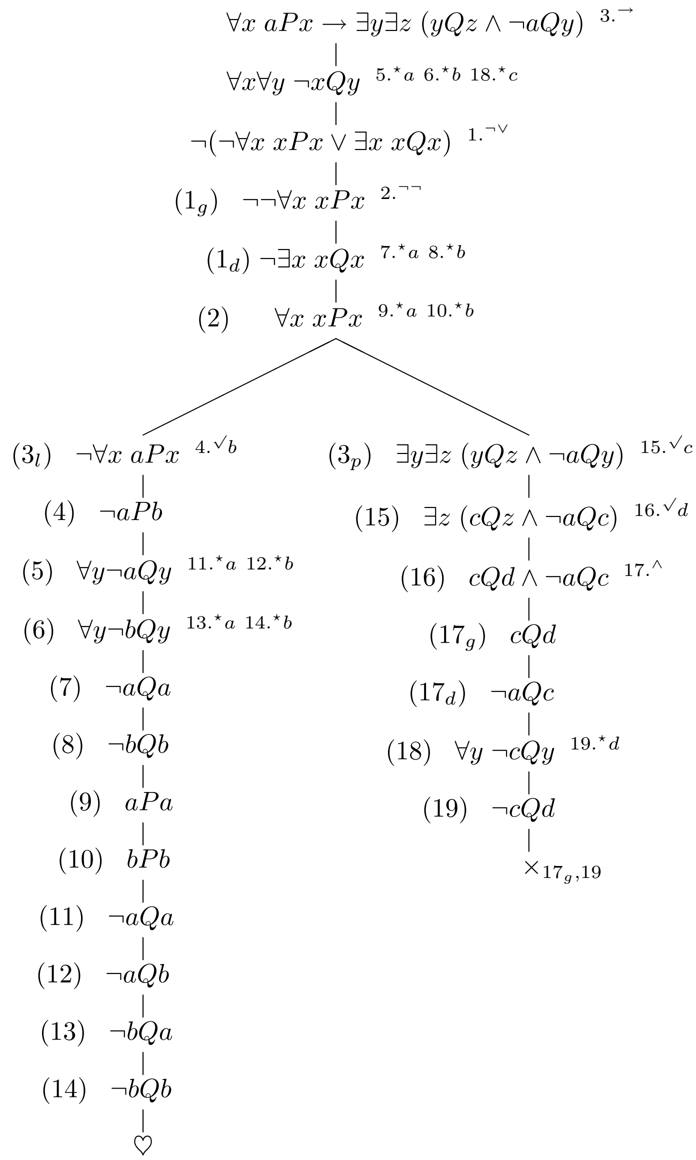
Można (słusznie!) zgłaszać przeróżne zastrzeżenia dotyczące trafności tego „przekładu”. Np., czy pasywizacja w języku naturalnym odpowiada braniu konwersu relacji w KRP? Czy w przypadku „przekładu” (z powrotem) trzech powyższych zdań polskich na język KRP otrzymamy dokładnie formuły wymienione na początku tego przykładu? W szczególności, czy *czubić się* oddane miałoby zostać jako predykat dwuargumentowy, w jednym zdaniu, czy też wymagane byłoby zaznaczenie symetryczności rozważanej relacji? A może *sytuacja polegająca na tym, że np. Agata czubi się z Beatą* nie jest reprezentowana przez jedno zdanie atomowe, lecz raczej w jakiś bardziej złożony sposób? Jaki jest najbardziej właściwy szyk wyrażeń negacji i kwantyfikacji w polskim? Od jakich informacji gramatycznych (a więc obligatoryjnych w wypowiedzi) można w takich „przekładach” abstrahować; dlaczego przyjmuje się taki, a nie inny wybór np. liczby gramatycznej, rodzaju gramatycznego, itp.? Prawie w każdym przypadku igraszek ze znajdowaniem „przekładów” między wyrażeniami języków naturalnych a formułami języków logiki napotykamy, jak wiadomo, na wiele podobnych problemów.

4.2. Troska i zaufanie

Przyjrzyjmy się następującej regule wnioskowania, w której występują predykaty dwuargumentowe P oraz Q, a także stała indywiduowa a:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\, aPx \rightarrow \exists y \exists z\, (yQz \wedge \neg aQy) \\ \forall x \forall y\, \neg xQy\end{array}}{\neg \forall x\, xPx \vee \exists x\, xQx}$$

A teraz zbudujmy drzewo o pniu złożonym z obu przesłanek reguły oraz jej zaprzeczonego wniosku. Jeśli drzewo to będzie miało gałąź otwartą, to rozważana reguła jest zawodna: z takiej gałęzi otwartej odtworzymy interpretacje, w których zarówno przesłanki reguły, jak i zaprzeczenie jej wniosku będą prawdziwe. A w takich interpretacjach przesłanki reguły są prawdziwe, zaś jej wniosek fałszywy, więc istnienie co najmniej jednej takowej interpretacji świadczy o zawodności reguły.



Drzewo zawiera gałąź otwartą, zakończoną liściem ♡, a więc reguła jest zawodna, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Informacja zawarta na tej gałęzi otwartej pozwala na skonstruowanie takiej interpretacji, w której przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Konstrukcja ta polega na podaniu uniwersum oraz denotacji w nim predykatów P oraz Q. Potrzebne uniwersum jest dwuelementowe (złożone z denotacji stałych indywiduowych a oraz b), relacje będące denotacjami predykatów podane są w poniższych tabelkach; znak + na przecięciu danego wiersza i danej kolumny oznacza, że relacja zachodzi między elementem z tego wiersza a elementem z tej kolumny, znak $-$, że nie zachodzi. Jeśli informacja, czy relacja zachodzi, czy nie zachodzi między danymi elementami nie znalazła się w rozważanej gałęzi otwartej, to na przecięciu stosownego wiersza i kolumny umieszczamy znak ? (oznacza to, że może w takim miejscu wystąpić zarówno $+$, jak i $-$). Zatem dokładniej rzecz ujmując, informacja zawarta w gałęzi zakończonej liściem $\heartsuit$ wyznacza *dwie* interpretacje: w jednej z nich prawdziwe jest bPa, a w drugiej prawdziwe jest $\neg bPa$ (i w obu tych interpretacjach wartość logiczna wszystkich pozostałych zdań atomowych jest ustalona zgodnie z poniższymi tabelkami).[21]

P	a	b
a	$+$	$-$
b	?	$+$

Q	a	b
a	$-$	$-$
b	$-$	$-$

Zauważmy jeszcze, że pracę na prawej gałęzi (formuła o numerze (3_p) i formuły pod nią) udało się zakończyć dość sprawnie, zamykając tę gałąź. W MDS mamy do dyspozycji różne, nie tylko czysto heurystyczne, techniki pozwalające na takie usprawnienia.

Oto przykład (zawodnego!) wnioskowania zbudowanego wedle powyższej reguły przy następującej interpretacji predykatów P oraz Q i stałej indywiduowej a:

- xPy interpretujemy jako — *x z troską przejmuje się losem y*;
- xQy interpretujemy jako — *x ufa y*;
- stała indywiduowa a denotuje *Józefa Stalina.*[22]

> *Jeśli Józef Stalin z troską przejmuje się losem wszystkich, to pewnemu obywatelowi, który komuś ufa, towarzysz Stalin nie ufa, oj nie ufa. Tak naprawdę, to nikt nikomu nie ufa. Zatem nie każdy przejmuje się z troską własnym losem lub co najmniej jeden obywatel ufa samemu sobie.*

„Przekład” jest, jak widać, zgrzebny stylistycznie. Słowo *obywatel* interpretujmy życzliwie jako odpowiadające predykatowi uniwersalnemu. Prosimy jeszcze zauważyć, że na mocy znanego prawa KRZ wniosek powyższy jest równoważny stwierdzeniu: *Jeśli każdy z troską przejmuje się swoim losem, to ktoś ufa sobie samemu.*

---

[21] W niektórych wersjach MDS otrzymalibyśmy w analizie tego przykładu dwie gałęzie otwarte, odpowiadające właśnie tym interpretacjom.

[22] Mamy szczęście żyć w świecie, w którym denotacja tej stałej jest już truchłem. Nie każdy zdążył to o sobie powiedzieć.

Interpretacje wyznaczone przez gałąź otwartą powyższego drzewa (wskazujące, iż rozważana reguła wnioskowania jest zawodna) mają uniwersum złożone z Józefa Stalina oraz pewnego innego obywatela, którego denotuje stała indywiduowa b i w których:

- po pierwsze, *nikt nikomu nie ufa*;
- po drugie, każdy z troską przejmuje się *swoim własnym* losem;
- po trzecie, towarzysz Stalin bynajmniej nie wykazuje troski o los obywatela oznaczanego przez b;
- po czwarte, jest dokładnie obojętne, czy ów skromny obywatel ukrywający się pod nazwą b troszczy się o los Wielkiego Językoznawcy, czy też nie.

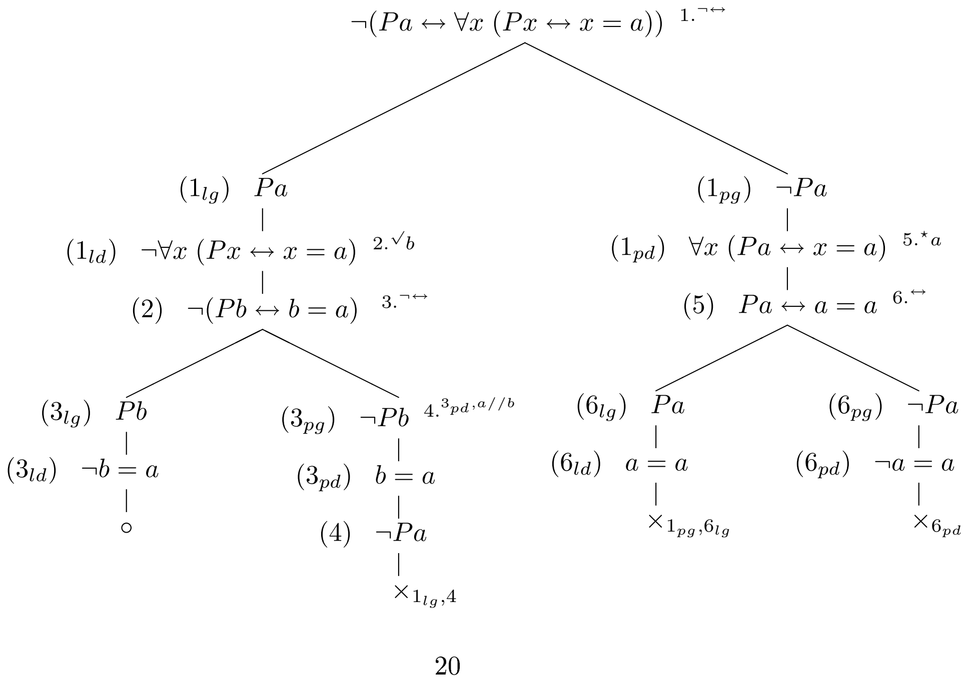
Towarzysz Lenin ponoć mawiał dobrotliwie mniej więcej tak: *Ufać dobrze, kontrolować lepiej.* Nie wiemy, czy myśl tę kończył jakimś superlatywem.

4.3. Lustereczko, powiedz...

Pokażemy, że następująca formuła nie jest tautologią rachunku predykatów z identycznością:

$$Pa \leftrightarrow \forall x\,(Px \leftrightarrow x = a).$$

Budujemy drzewo semantyczne dla negacji tej formuły:



Drzewo ma jedną gałąź otwartą (i do żadnej z formuł na tej gałęzi nie można już zastosować żadnej z reguł), a zatem formuła umieszczona w jego korzeniu jest prawdziwa w co najmniej jednej interpretacji. Stąd, rozważana na początku tego przykładu formuła jest w tejże interpretacji fałszywa, a więc jako fałszywa w co najmniej jednej interpretacji nie jest tautologią rachunku predykatów z identycznością.

Z budowy tego drzewa widać, że implikacja:

$$\forall x\ (Px \leftrightarrow x = a) \rightarrow Pa$$

jest tautologią, natomiast implikacja:

$$Pa \rightarrow \forall x\ (Px \leftrightarrow x = a)$$

tautologią nie jest.

Następująca, *ad hoc* wymyślona interpretacja predykatu P oraz stałej indywiduowej a:

- Px interpretujemy jako x *jest warta grzechu*;
- stała indywiduowa a denotuje… no tak, jest tu pewien problem natury estetycznej; ale niech będzie — z gustami się nie dyskutuje — niech a denotuje *Miss Podkarpacia 2000*

pozwala odczytać implikację:

$$Pa \rightarrow \forall x\ (Px \leftrightarrow x = a)$$

np. tak:

> *Jeśli Miss Podkarpacia 2000 jest warta grzechu, to dokładnie tylko ona jest warta grzechu.*

Służymy **licznymi** przykładami ukazującymi, iż następnik tej implikacji jest fałszywy, choć jej poprzednik pozostaje (!) prawdziwy.[23] Wierzymy zresztą, że każda z uroczych Czytelniczek tego tekstu, od Tatr do Bałtyku i od *Freundschaftsgrenze* na Odrze do granic wschodnich chwilowo zjednoczonej Europy, sama gotowa jest, za pomocą zwykłego lustereczka, przekonać się o powyższym.

---

[23] Powtórzmy, *modulo* gusta. Być może, za, powiedzmy, 15, 115 lub 1115 lat życzliwy Czytelnik uaktualni wybór denotacji dla tej stałej. Moich (JP) prochów to już nie ucieszy, ale nic-to. Ciekawym problemem pozalogicznym jest, czy kogokolwiek będzie się wtedy jeszcze uczyć logiki. Czyje będzie Podkarpacie nie jest — dla mnie (JP) — tak ciekawe. Daję wiarę Księdzu Profesorowi Józefowi Tischnerowi, który w jednym ze swych felietonów pisze: *A Bartek Koszarek z Bukowiny, co na Gęsiej Syi był i sytkiego wysłuchoł, jakimsi takim wirem porwany, wstoł na nogi, przeciągnón sie, coby kościska wyprościć, i zawnioskowoł: „Świat jest boski, a dziewczęta nase." I poseł dołu na Małe Ciche.*

4.4. Drzewa nieskończone

Klasyczny rachunek predykatów jest, jak prawie wszystkim wiadomo, nierozstrzygalny. Jest jednak półrozstrzygalny, co ustalić można m.in. za pomocą MDS (oraz pamiętając o poprawności tej metody). Jeśli jakaś formuła języka KRP jest tautologią KRP, to drzewo semantyczne jej negacji jest zamknięte. Jeśli zaś formuła A tautologią KRP nie jest, to budowa drzewa semantycznego jej negacji może być w skończonej liczbie kroków niewykonalna.

4.4.1. Czy wykraczanie poza FOL zmusza do logicznego agnostycyzmu?

Dzień bez odrobiny mistycyzmu to dla Humanistki dzień szary, nijaki, nie warty przeżycia, coś w rodzaju 32 grudnia. Zobligowani czujemy się więc — aby dydaktyka logiki odbierana była przez Humanistki jako *nie-bez-duszna* — do ubogacania jej, na dostępne nam sposoby. Prosimy np. przenieść się w (przepastnej u Humanistek) wyobraźni z pomieszczeń wykładowych w dawnej fabryce czołgów HCP Cegielski[24] do $\aleph_0$-gwiazdkowego Hotelu Hilberta i epatujemy dziewczęta próbą semantycznej analizy powiedzmy następującego zdania:

> *O ile za każdą liczbą naturalną następuje niemniejsza od niej liczba naturalna, to Jedyna Tajna Liczba Naturalna Kodująca Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH jest niemniejsza od wszystkich liczb naturalnych.*

Powinniśmy pominąć w tym miejscu szereg szczerych, spontanicznych wypowiedzi Humanistek w reakcji na wysłuchanie tego zdania (np.: wyrażanie sympatii dla liczb 36 oraz 69, a chłodu emocjonalnego dla liczb 96 oraz 666). Rozważmy natomiast formułę języka KRP odpowiadającą mu składniowo:

$$(*) \qquad \forall x \exists y\, yRx \rightarrow \forall x\, aRx$$

(predykat R nazywa tu relację *niemniejszości*, a stała indywiduowa a jest skromnym symbolem dla *Jedynej*[25] *Tajnej Liczby Naturalnej Kodującej Niepoznawalne Imię Dobrego Pana Naszego JHWH*; to, czy kodowanie podlega regułom znanym Cadykowi z Leżajska, Jego Świątobliwości Dalajlamie, słynnemu ze swojej dociekliwości Ignacemu Loyoli, czy jakiemukolwiek głodnemu sławy Prałatowi, nie ma tu oczywiście znaczenia).

Profesor Witold Marciszewski wykorzystał formułę o takiej budowie składniowej jak formuła powyższa w artykule *On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study.* (Marciszewski 2002) dla

---

[24] UAM dzierżawi tam pomieszczenia, miejmy nadzieję, że bez strat dla potęgi militarnej Rzeczpospolitej Polskiej. Zresztą, oszukaliśmy: HCP produkowała silniczki do łódeczek.

[25] Przykład ten można na różne sposoby komplikować, m.in. wykorzystując MDS wzbogaconą o reguły dla operatora deskrypcyjnego podane np. w artykule Lis 1960.

poczynienia interesujących refleksji o naturze intuicji matematycznej. Przytoczmy najpierw, za Autorem, drzewo semantyczne dla negacji tej formuły:

$$\begin{array}{c}
\neg(\forall x \exists y\ yRx \to \forall x\ aRx)\ ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\ \forall x \exists y\ yRx\ ^{3.^\star a\ 4.^\star b\ 7.^\star c\ 8.^\star d}\ldots \\
| \\
(1_d)\ \neg\forall x\ aRx\ ^{2.\surd b} \\
| \\
(2)\ \neg aRb \\
| \\
(3)\ \exists y\ yRa\ ^{5.\surd c} \\
| \\
(4)\ \exists y\ yRb\ ^{5.\surd d} \\
| \\
(5)\ cRa \\
| \\
(6)\ dRb \\
| \\
(7)\ \exists y\ yRc\ ^{9.\surd e} \\
| \\
(8)\ \exists y\ yRd\ ^{10.\surd f} \\
| \\
\vdots
\end{array}$$

Budowy tego drzewa zakończyć nie można, co powinno być wyraźnie widoczne po prześledzeniu kilku pierwszych kroków w powyższej konstrukcji. Rozważana na początku tego przykładu formuła nie jest tautologią KRP. Algorytm MDS nie daje odpowiedzi w skończonej liczbie kroków. Możemy podać interpretacje, w których formuła $(*)$ jest prawdziwa (drzewo semantyczne dla $(*)$ jest skończone i ma dwie gałęzie otwarte, jak łatwo sprawdzić) — interpretacją taką jest np. uniwersum jednoelementowe złożone z denotacji stałej indywiduowej a, gdy relacja denotowana przez R zachodzi między tym jedynym elementem a nim samym. Możemy też jednak, zauważając regularność w konstruowaniu coraz to większych fragmentów drzewa semantycznego dla negacji formuły $(*)$, podać interpretację nieskończoną, w której negacja $(*)$ jest prawdziwa. Nie upoważnia nas do tego sam algorytm — kierujemy się zatem *intuicjami* (wychodzącymi poza logikę pierwszego rzędu).

Witold Marciszewski sytuację tę komentuje następująco:

> This situation will be interpreted in different ways by a computionalist and by someone believing that in some cases human intuition alone is able to solve a problem unsolvable for algorithms. Let the latter be called *intuitionist* (in a special, ad hoc coined, meaning).
>
> The intuitionist's comment runs as follows. The process will never stop, hence the problem is unsolvable for the algorithm, while in-

> tuitively we can be certain of two things. First, that the formula is not valid, since there is a lot of counterexamples supplied by our knowledge, both mathematical and empirical. Second, that the process never stops. The latter judgment derives from the observation that the loops must infinitely be generated by the structure of the formulas in question. When a new individual is being introduced by the lastly occurring existential quantifier, the universal formula has to be once more tested against the existence of that individual, and according to the same formula, its existence generates the next individual, and so on in infinity. The clause 'and so on, in infinity' is what no algorithm can arrive at, while with humans it expresses a simple observation of regular recurrence for which there is no reason to halt.
>
> The computionalist, on the other hand, would argue as follows. The observation concerning the infinite series of recurring loops may be wrong. We cannot be sure of it, because only an algorithm can grant us certainty. Should it be true, it would result from a hidden algorithm of which the person reasoning is not aware of. Such an algorithm is, presumably, encoded in a language of neural system.
>
> Marciszewski 2002, 2–3

Marciszewski podaje także przykład interpretacji skończonej (czteroelementowego zbioru uporządkowanego liniowo przez jakąś relację R), w której fałszywa jest formuła

$$(**) \qquad \forall x \exists y\, xNy \rightarrow \exists y \forall x\, xNy$$

gdzie N jest predykatem denotującym relację zachodzącą między x oraz y wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych elementów jest bezpośrednim R-poprzednikiem lub bezpośrednim R-następnikiem drugiego. Jeśli xNy, to mówmy, że x oraz y *są sąsiadami.* Autor zauważa, że np. zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4\}$ wraz ze zwykłym porządkiem (i w wyżej podany sposób określoną relacją sąsiedztwa) jest właśnie kontrmodelem dla $(**)$. Dodajmy, że również np. zbiór postaci $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ z relacją denotującą predykat N określony następująco:

$$(x, y)N(u, v) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = u \text{ lub } y = v$$

także jest kontrmodelem dla $(**)$.

Nie jesteśmy natomiast pewni, czy dobrze rozumiemy poniższe uwagi Witolda Marciszewskiego kończące punkt 3 omawianego tekstu (konkretnie, wyróżnione przez nas kursywą zdania z poniższego cytatu):

> However, it is not necessary to mention definite objects, as numbers or other ones. The counterexample can be produced in a more abstract way — as concerned with any objects linked with one another by relations whose formal properties are defined in logical and set-theoretical terms alone.

> The relation to order the set in question is defined as transitive, asymmetric and connected in that set, while the neighbourhood relation as symmetric and non-transitive in the same set. The other assumption is to the effect that the domain consists of exactly four individuals. Its wording requires no more than the language of FOL with identity. *When defining the formal properties of relations, one has to use the concept of set and membership, hence a set-theoretical language. Since set theory can be replaced by higher-order logics, the counterexample in question may be regarded as stated in sole logical terms (without any extralogical concepts) but going beyond the limits of first-order logic.*
>
> Once having such a counterexample, we draw the metalogical conclusion that there is a domain in which the denial of CC [tj. formuły (∗∗) w przyjętych tu oznaczeniach — IBK, JP] holds, hence CC is no universally valid formula. And so the case is solved, owing to that small step towards a stronger system.
>
> Marciszewski 2002, 3–4

Zauważmy dwie rzeczy:

1) Niech R będzie relacją spójną, asymetryczną i przechodnią, N niech będzie sumą $R - R^2$ i konwersu $R - R^2$ (a więc relacją sąsiedztwa w takim rozumieniu, jak podaje wyżej Marciszewski), uniwersum niech zawiera dokładnie cztery elementy i niech zachodzi poprzednik formuły (∗∗) oraz zaprzeczenie jej następnika. Wtedy gałęzie otwarte drzewa semantycznego, w którego pniu umieścimy te wszystkie warunki są *wszystkie* nieskończone. Oto bowiem te warunki:[26]

$$\forall x \forall y\, (xRy \rightarrow \neg yRx)$$
$$\forall x \forall y \forall z\, (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$
$$\forall x \forall y\, (\neg x = y \rightarrow (xRy \vee yRx))$$
$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4\, ((\neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_3 = x_4) \wedge \forall y\, (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_4))$$
$$\forall x \forall y\, [xNy \leftrightarrow ((xRy \wedge \neg \exists z\, (xRz \wedge zRy)) \vee (yRx \wedge \neg \exists z\, (yRz \wedge zRx)))]$$
$$\forall x \exists y\, xNy$$
$$\neg \exists y \forall x\, xNy$$

Ponieważ dwa ostatnie z nich będą, po każdym zastosowaniu reguły $R(\forall)$ lub $R(\neg\exists)$ wprowadzały formuły: egzystencjalnie skwantyfikowaną oraz negację generalnie skwantyfikowanej, więc w *każdej* gałęzi otwartej budowanego drzewa rozważać należałoby coraz to nowe stałe indywiduowe, a w konsekwencji, żadna z takich gałęzi nie będzie skończona. Z konstrukcji samego drzewa nie jest więc widoczny sposób znalezienia *skończonej* interpretacji falsyfikującej (∗∗) (przy dodatkowych założeniach poczynionych o R i N). Wszystkie warunki wyrażone

---

[26] R oraz N są w nich *predykatami* denotującymi rozważane relacje; używanie w tym przypadku takich samych symboli dla predykatu i jego denotacji jest powszechnie przyjętą praktyką.

zostały w języku rachunku predykatów pierwszego rzędu — nie ma *konieczności*, gdy mówimy o własnościach relacji, odwoływania się do terminów teoriomnogościowych.

2) Jeśli udało nam się zrozumieć cytowany fragment artykułu Witolda Marciszewskiego, to przypuszczamy, że Autorowi chodziło w powyższym cytacie o wyrażenie przede wszystkim czegoś innego, jak zresztą można sądzić z uwag w części 4 omawianego artykułu. Otóż kontrmodele dla $(**)$ (a także kontrmodele dla $(*)$) wyszukujemy podróżując w klasie wszystkich możliwych interpretacji (określonej sygnatury). Jesteśmy więc na terenie metajęzyka, w nim bowiem mówimy o tych interpretacjach. W metajęzyku używamy, zgoda, pojęć teoriomnogościowych.[27] W tym sensie wspomaganie MDS obserwacjami metalogicznymi jest wychodzeniem poza FOL. Możemy mieć szczęście i odnaleźć stosowne interpretacje skończone, możemy też dopomóc szczęściu *wyobraźnią* i ekstrapolować dostrzeżone na początkowym fragmencie gałęzi nieskończonej regularności dla wskazania interpretacji nieskończonej o żądanych własnościach.

Witold Marciszewski powołuje się w części 4 swojego artykułu na wypowiedzi Gödla (Gödel 1936), Turinga i komentarze Hodgesa dotyczące możliwości rozstrzygania zdań nierozstrzygalnych w danym systemie logicznym w systemie odeń silniejszym (ciągi coraz mocniejszych systemów dedukcyjnych, ciągi coraz mocniejszych maszyn Turinga, itp.). Problematyka ta badana jest intensywnie od kilkudziesięciu lat, wiąże się z subtelnymi rozważaniami w teorii dowodu, uogólnieniami klasycznej teorii rekursji, itd. Nie nam maluczkim głos w tych sprawach zabierać, bo oprócz wspomnień z wykładów, nie mamy do powiedzenia nic nowego. Może zwróćmy jedynie uwagę na — ciekawy jak się zdaje — fakt z historii logiki. Otóż w latach trzydziestych XX wieku projekty *logiki infinitarnej* przedstawiał Ernst Zermelo (zob. np. Zermelo 1932, 1935; por. też np. Moore 1995, Taylor 2002). Systemy te wzorowane były na wizji świata teorii mnogości przedstawionej w artykule Zermelo 1930. Pomysły Zermela nie miały wówczas szans na precyzację i rozwój, z różnych, nie tylko *stricte* matematycznych powodów. Zainteresowanie i systematyczne badania logik infinitarnych ożywione zostały dopiero po dwóch dekadach, m.in. za sprawą prac Tarskiego, Mostowskiego, Henkina, Scotta, Karp, Nowikowa, Robinsona, i in. Nie nawiązywały one jednak do pomysłów Zermela i miały nieco inne motywacje (m.in. algebraiczne). Chyba dopiero rozwijana z inspiracji Barwise'a teoria zbiorów dopuszczalnych (i rekursji na takich zbiorach) jest precyzyjnym matematycznym odpowiednikiem pół-formalnych propozycji Zermela (zob. np. Barwise 1975). Wspominamy tu o tym m.in. dlatego, że Zermelo także rozważał hierarchie coraz to silniejszych systemów dowodowych, wierzył jednak w rozstrzygalność (w określonym sensie) wszelkich zdań matematycznych; nie trzeba dodawać, że owo Zermelowskie rozumienie rozstrzygalności nie pokrywało się z rozumieniem zwycięsko propagowanym ówcześnie przez Gödla i innych.

W podręcznikach logiki jako przykład falsyfikujący formułę o budowie skład-

---

[27] Osobną jest sprawą, jakie przyjmuje się ograniczenia metalogiczne: dlaczego np. używanie środków tak silnych, jak, powiedzmy, lemat Königa lub aksjomat wyboru w, dajmy na to, dowodzie twierdzenia o pełności, nie sprawia, że tracimy ufność w *efektywną* prawomocność samego dowodu.

niowej takiej, jak formuła $(**)$ podaje się często interpretację złożoną ze zbioru liczb naturalnych wraz z relacją niewiększości. Zadufaną pychę i łakomstwo intelektualne tych niewdzięczników, którym boski rzekomo podarunek liczb naturalnych wydaje się zbyt ubogi, zadowolą może inne interpretacje falsyfikujące formułę o budowie takiej jak formuła $(**)$. Dla przykładu, zbiory:

$$\{\aleph_n \ : \ n \in \omega\}$$

$$\{\beth_n \ : \ n \in \omega\}$$

ze stosownie określonymi porządkami, są tego typu interpretacjami.

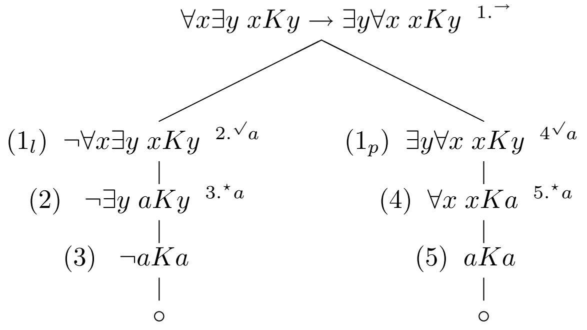
4.4.2. Uniwersalny lubieżnik

Można z łatwością wskazywać *skończone* interpretacje falsyfikujące formuły o budowie takiej, jak formuła $(**)$, co pokazujemy poniżej.

Uznajmy, że „przekładem" zdania *Jeśli każdy kogoś kocha, to ktoś jest kochany przez wszystkich* na język KRP jest następująca formuła:

$$(***) \qquad \forall x \exists y\, xKy \rightarrow \exists y \forall x\, xKy$$

Czy jest ona prawdziwa w jakiejś interpretacji? Budujemy drzewo semantyczne dla tej formuły:



Do żadnej z formuł, na żadnej z gałęzi tego drzewa, nie można już zastosować żadnej z reguł. Obie gałęzie drzewa są otwarte. Formuła ta jest zatem prawdziwa np. w świecie, w którym zażywa istnienia narcystyczny samolub, a także w świecie, w którym toczy swój żywot brzydzący się sobą niesamolub.

Wiemy, że $(***)$ nie jest tautologią KRP: jej budowa składniowa jest taka sama, jak $(**)$, a widzieliśmy, iż $(**)$ tautologią KRP nie jest (to, że predykat N definiowany był w pewien sposób w 4.4.1. nie jest przy tym istotne).

Spójrzmy jednak na drzewo semantyczne negacji formuły $(***)$. Będzie ono, podobnie jak drzewo semantyczne negacji formuły $(*)$ nieskończone. Czytelnik zauważył rzecz jasna różnice składniowe między $(*)$ oraz $(***)$. Ze względu na nie, interpretacje *nieskończone*, które *odgadujemy* ze stosownych gałęzi otwartych w drzewach negacji (∗) oraz negacji (∗∗∗) będą ***strukturalnie różne***.[28]

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x\exists y\; xKy \to \exists y\forall x\; xKy)\ \ ^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\quad \forall x\exists y\; xKy\ \ ^{2.\checkmark a\ \ 5.\star b\ \ 8.\star c} \\
| \\
(1_d)\quad \neg\exists y\forall x\; xKy\ \ ^{3.\star a\ \ 6.\star b\ \ 9.\star c} \\
| \\
(2)\quad \exists y\; aKy\ \ ^{4.\checkmark b} \\
| \\
(3)\quad \neg\forall x\; xKa \\
| \\
(4)\quad aKb \\
| \\
(5)\quad \exists y\; bKy\ \ ^{7.\checkmark c} \\
| \\
(6)\quad \neg\forall x\; xKb \\
| \\
(7)\quad bKc \\
| \\
(8)\quad \exists y\; cKy\ \ ^{10.\checkmark d} \\
| \\
(9)\quad \neg\forall x\; xKc \\
| \\
(10)\quad cKd \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Drzewo jest nieskończone, tzn. nie można zakończyć budowy tego drzewa w skończonej liczbie kroków. Na początku wprowadziliśmy nową stałą indywiduową a rozwijając zdanie generalnie skwantyfikowane o numerze (1_g) (na początku niniejszego artykułu tłumaczyliśmy, kiedy wykonujemy taki krok). Przez stosowanie reguły $R(\neg\forall)$ do formuły o numerze (1_d), dla każdej nowowprowadzonej stałej, uzyskujemy coraz to nowe zdania egzystencjalnie skwantyfikowane: (2), (5), (8). Nadto, także formuły o numerach (3), (6) oraz (9) stanowią podstawę do wprowadzania nowych stałych indywiduowych.

Skończone interpretacje, w których poprzednik rozważanej implikacji (∗ ∗ ∗) jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy podać nietrudno. Wyobraźmy sobie np., że Ludzkość składa się tylko z dwojga osobników, powiedzmy *Adama* i *Chawy*, Adam kocha Chawę, siebie samego nie kocha (bo np. ma wstręt do autoerotyzmu), a Chawa kocha tylko siebie, taka już jest. W takim świecie nie ma Istoty, która kocha wszystkich: Adama nie kocha nikt. Pozostawmy ten świat swemu losowi.

---

[28] Zachęcamy Czytelnika do zabawy w znalezienie odnośnych interpretacji.

Także np. w świecie, w którym żyją jedynie Adam i Chawa, kochający się nawzajem (i nikogo poza tym, a więc bez żadnego narcyzmu) poprzednik powyższej implikacji jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Na marginesie zauważmy, że w świecie takim nie ma miejsca dla ponętnej Lilith...

4.4.3. Drzewa i jeże

W artykule Lis 1960 analizuje się proces konstrukcji drzewa semantycznego dla formuły podanej przez Schütte'go:[29]

$$(\bigstar) \quad (x)[\sim R(x,x)\&(Ey)\{R(x,y)\&(z)[R(z,x) \supset R(z,y)]\}]$$

Lis odwołuje się do pracy Beth 1955, w której formuła ta została wymieniona. Nie jest ona tautologią KRP — drzewo semantyczne jej negacji jest skończone i zawiera gałęzie otwarte.

W artykule Lis 1960 pokazuje się, że formuła ($\bigstar$) nie jest kontrtautologią. Jej drzewo semantyczne jest nieskończone:[30]

> Stosując dla tej formuły regułę (iv), wprowadzamy element „n_{k+1}"
>
> $$+.R(n_k, n_{k+1})\&(z)[R(z, n_k) \supset R(z,y)]$$
>
> i tak dalej w nieskończoność.
>
> ***Widać stąd jasno***[31], że uniwersum modelu dla formuły Schüttego jest mocy $\aleph_0$. Natomiast relacja R zachowuje się w sposób następujący:
>
> dla każdego k $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$: $\sim R(n_k, n_k)$.
> dla każdych k, l takich, że $k > l$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$: $\sim R(n_k, n_l)$.
> dla każdych k, l takich, że $k < l$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$: $R(n_k, n_l)$.
>
> Na podstawie tych rozważań można już zbudować model, w którym spełniona będzie, wbrew przypuszczeniu, formuła Schüttego: zbiór $\{n_1, n_2, \ldots, n, \ldots\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, zaś relacja R relacją mniejszości.
>
> Lis 1960, 46.

W dalszej części swego artykułu Lis pisze, że budowanie kontrmodeli nieskończonych jest uzasadnione lematem Königa. W tym więc sensie również Lis wychodzi poza FOL w zastosowaniach MDS. Jest to jednak odwołanie się do rozważań metalogicznych, a nie do np. logik z infinitarnymi regułami wnioskowania.

---

[29] Nie objaśniamy używanej notacji, sądząc, że domyślny Czytelnik da sobie z nią radę.

[30] Wyrysowanie początkowego fragmentu (powiedzmy, pierwszych trzech kilometrów, drobnym pismem) tego drzewa polecamy osobom odsiadującym wyroki np. za lekceważenie praw logiki — niech odłożą *gazety* ***lub*** *czasopisma* i rysują...

[31] Wyróżnienie nasze — IBK, JP.

* * *

W drzewach semantycznych budowanych w pewien określony sposób (w tzw. *systematycznych tabelach semantycznych*) formuły znajdujące się na danej gałęzi otwartej tworzą *zbiór Hintikki*. Na mocy *lematu Hintikki*, każdy taki zbiór jest spełnialny (ma model). Nie oznacza to jednak, że *algorytm systematycznego tworzenia tabel semantycznych* (zob. np. Ben-Ari 2005, 130–131) jest jednocześnie generatorem interpretacji spełniających daną formułę:

> Należy zaznaczyć, że przedstawiony algorytm *nie* jest algorytmem znajdującym interpretację spełniającą podaną formułę, gdyż pewna gałąź może być rozbudowywana w nieskończoność. Metoda tabel semantycznych dla rachunku predykatów umożliwia jedynie dowodzenie prawdziwości formuł przez wykazanie domkniętości tabeli dla negacji badanej formuły. Ponieważ w tabeli domkniętej wszystkie gałęzie są domknięte, więc kolejność stosowania reguł nie ma znaczenia. Systematyczne tworzenie tabeli jest niezbędne do uzyskania pełności.
>
> Ben-Ari 2005, 131

Smullyan zwraca uwagę na pewną szczególną klasę formuł, wysoce „odpornych" na zastosowania MDS:

> We thus see how tableaux not only can be used to show certain formulas to be unsatisfiable (or equivalently to show certain formulas to be valid), but also can sometimes be used to show certain formulas to be satisfiable (when these formulas happen to be satisfiable in a finite domain). The real "mystery class" consists of those formulas which are neither unsatisfiable nor satisfiable in any finite domain. If we construct a tableau — even a systematic one — for any such formula, the tableau will run on infinitely, and at no finite stage will we ever know that the formula is or is not satisfiable. There are formulas which are satisfiable but not in any finite domain (cf. exercise below). However, the demonstration of their satisfiability cannot be accomplished within the framework of analytic tableaux.
>
> Smullyan 1968, 63

Przykłady formuł, o których wspomina Smullyan w przedostatnim z cytowanych zdań nietrudno podać: taka jest np. formuła (★), a także formuła języka KRP z identycznością i symbolem funkcyjnym, powiedzmy f, wyrażająca fakt, że f denotuje injekcję, która nie jest surjekcją.

Drzewo semantyczne formuły (★) ma gałęzie nieskończone, ale drzewo negacji (★) jest skończone. Czy istnieje formuła taka, że zarówno jej drzewo semantyczne, jak i drzewo jej negacji mają gałęzie nieskończone? Oczywiście tak; aby podać przykład wystarczy np. podsłuchać następującą rozmowę w jakimś polskim barze:[32]

---

[32] *Rozmowa stylizowana.* Wulgaryzmy zastąpiono wykropkowaniem w nawiasach kwadratowych.

> ***Zenek:*** *Sam [. . .] widzisz, Wacek, jak to u nas [. . .] jest: nie dość, że mamy [. . .] bezrobocie, to [. . .] każdy jest u kogoś [. . .] zadłużony.*
>
> ***Wacek:*** *Szkoda [. . .] gadać, Zenek, złodziej [. . .] na złodzieju i złodziejem [. . .] pogania! Ale jeśli każdy jest przez kogoś [. . .] okradany, to ten [. . .] [. . .] [. . .] Balcerowicz wszystkich nas [. . .] okrada. Mnie, ciebie, naszą uroczą Pannę Jadzię, wszystkich, [. . .]. To co, jeszcze po jednym? Panno Jadziu, Królewno nasza! Jeszcze dwa prosimy!*

Struktura składniowa wypowiedzi Zenka odpowiada formule ψ:

$$\exists x\ Bx \wedge \forall x \exists y\ xZy.$$

Formuła ϕ, odpowiadająca strukturze składniowej wypowiedzi Wacka, jest zbudowana tak samo, jak rozważana wcześniej formuła $(*)$:

$$\forall x \exists y\ yOx \rightarrow \forall x\ aOx.$$

Występujące tu predykaty czytamy:

Bx — x jest bezrobotny;

xZy — x jest zadłużony u y;

xOy — x okrada y.

Stała indywiduowa a denotuje Profesora Leszka Balcerowicza. Urocza Panna Jadwiga pozostaje poza analizą logiczną.

Formuły $\neg\psi$ oraz ϕ mają drzewa skończone, natomiast formuły ψ oraz $\neg\phi$ mają drzewa nieskończone. W konsekwencji, zarówno alternatywa $\psi \vee \phi$ jak i jej negacja, tj. $\neg(\psi \vee \phi)$ mają drzewa nieskończone. Jednak zarówno drzewo tej alternatywy, jak i drzewo jej negacji zawierają także skończenie wiele *skończonych* gałęzi otwartych.

Innym (z nieskończenie wielu) tego typu przykładów jest formuła

$$\forall x\ (\exists y\ yRx \vee xRx) \rightarrow \forall y\ \exists x\ yRx.$$

Jej drzewo semantyczne ma skończoną gałąź otwartą oraz gałąź nieskończoną. Natomiast drzewo semantyczne jej negacji ma nieskończenie wiele skończonych gałęzi otwartych (odpowiadających modelom skończonym o coraz większej liczbie elementów) oraz gałąź nieskończoną.

W podręczniku Hedman 2004 znajdujemy na stronie 94 ćwiczenie 2.15. (a), polegające na podaniu przykładu formuły φ takiej, że zarówno φ, jak i $\neg\varphi$ mają modele skończone dowolnie dużych mocy, a przy tym φ jest prawdziwa w każdym grafie spójnym. Zauważmy, że na mocy twierdzenia o zwartości dla KRP, zarówno φ, jak i $\neg\varphi$ muszą mieć wtedy także modele nieskończone, a zatem drzewa semantyczne φ oraz $\neg\varphi$ mają nieskończenie wiele skończonych gałęzi otwartych, a także gałęzie nieskończone.

Z MDS związanych jest wiele wyników z klasycznej teorii modeli, a także np. z intensywnie rozwijanej od pewnego czasu teorii modeli skończonych (zob. np. Ebbinghaus, Flum 1999).

* * *

Na koniec powyższych, być może bardzo naiwnych, uwag o nieskończonych drzewach semantycznych podajmy jeszcze jeden przykład:

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \forall x\ a_1 Rx \wedge \forall x\ \exists y\ (a_1 Rx \rightarrow a_1 Ry).$$

Początkowy fragment drzewa semantycznego tej formuły wygląda następująco:

$$\begin{array}{c}
\forall x\; a_1Rx \wedge \forall x\; \exists y\; (a_1Rx \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{1.\wedge} \\
| \\
(1_g)\ \ \forall x\; a_1Rx\ \ ^{2.\star a_1\ 5.\star a_2\ 8.\star a_3\ 11.\star a_4\ 14.\star a_5} \\
| \\
(1_d)\ \ \forall x\; \exists y\; (a_1Rx \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{3.\star a_1\ 6.\star a_2\ 9.\star a_3\ 12.\star a_4\ 15.\star a_5} \\
| \\
(2)\ \ a_1Ra_1 \\
| \\
(3)\ \ \exists y\; (a_1Ra_1 \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{4.\checkmark a_2} \\
| \\
(4)\ \ a_1Ra_1 \rightarrow a_1Ra_2 \\
| \\
(5)\ \ a_1Ra_2 \\
| \\
(6)\ \ \exists y\; (a_1Ra_2 \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{7.\checkmark a_3} \\
| \\
(7)\ \ a_1Ra_2 \rightarrow a_1Ra_3 \\
| \\
(8)\ \ a_1Ra_3 \\
| \\
(9)\ \ \exists y\; (a_1Ra_3 \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{10.\checkmark a_4} \\
| \\
(10)\ \ a_1Ra_3 \rightarrow a_1Ra_4 \\
| \\
(11)\ \ a_1Ra_4 \\
| \\
(12)\ \ \exists y\; (a_1Ra_4 \rightarrow a_1Ry)\ \ ^{13.\checkmark a_5} \\
| \\
(13)\ \ a_1Ra_4 \rightarrow a_1Ra_5 \\
| \\
(14)\ \ a_1Ra_5 \\
| \\
(15)\ \ \exists y\; (a_1Ra_5 \rightarrow a_1Ry) \\
| \\
\vdots
\end{array}$$

To drzewo ma nieskończenie wiele gałęzi zamkniętych oraz gałąź nieskończoną. Na podstawie informacji zawartej w gałęzi nieskończonej tego drzewa budujemy nieskończony model dla formuły (★★) tak oto:

1) uniwersum stanowi nieskończony zbiór $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

2) relacja R_∞ denotująca predykat R określona jest na tym zbiorze warunkiem: $a_1R_\infty a_i$ dla $i \geqslant 1$.

Czytelnik zechce wyobrazić sobie nieskończonego $\aleph_0$-jeża odpowiadającego tej interpretacji. To skromne Zwierzę odpowiedzialne jest za tytuł niniejszego artykułu. Uważamy za interesujące, z dydaktycznego punktu widzenia, także takie zadania wykorzystujące MDS, w których dla *z góry zadanej* struktury relacyjnej (np. grafu określonej postaci) znaleźć trzeba formuły, dla których gałęzie otwarte ich drzew semantycznych niosą informację o wybranej strukturze. Formuła (★★) została poczęta w ten właśnie sposób przez powyższego jeża.

* * *

Gdy wychodzimy poza klasyczny rachunek logiczny (poza FOL), to możemy liczyć na przygody zarówno miłe, jak i niemiłe (z *pragmatycznego* punktu widzenia). Z jednej strony, możemy uzyskać większą moc wyrażania (np. charakteryzować pojęcie nieskończoności formułą języka przedmiotowego, wyrazić zasadę domknięcia, uzyskiwać kategoryczne opisy badanych struktur matematycznych, itd.). Z drugiej strony, możemy utracić pewne własności metalogiczne, do których jesteśmy nie tylko przywiązani tradycją, ale których gotowi jesteśmy dogmatycznie (?) *bronić jak . . . racjonalizmu* — chyba jest tak z np. pełnością używanego systemu logiki.[33] W pewnym sensie, największymi dokonaniami logicznymi ubiegłego stulecia były te rezultaty, które pozwoliły na uświadomienie sobie niemożliwości osiągnięcia ***jednocześnie*** pewnych, pożądanych każdy z osobna, ideałów metodologicznych (np. kategoryczności i pełności). Dopiero po uzyskaniu tej świadomości metodologicznej dyskusja na temat samej natury logiki (np. spory wokół *Tezy Pierwszego Rzędu*) nabrała nowego, pełniejszego znaczenia (zob. np.: Barwise-Feferman 1985, Shapiro 1996, Tennant 2000).

Pozostawiamy decyzji Czytelnika, kogo z dwóch niżej wymienionych byłby skłonny nazywać *agnostykiem logicznym*:

- kogoś, kto wyklucza możliwość, aby używany przezeń system logiki pozbawiony był *pełności*, godząc się jednocześnie z tym, że nie może w tym systemie w sposób *kategoryczny* opisać struktur, które bada;
- kogoś, kto woli dysponować systemem logicznym na tyle bogatym (w środki wyrażania), aby można w nim było w sposób *kategoryczny* opisywać interpretacje, ale kto wtedy wyraża zgodę na to, że używana aparatura inferencyjna nie daje gwarancji dotarcia do wszystkich tautologii stosowanej logiki.

Bodaj większość współczesnych logików uznaje, że to właśnie cecha *pełności* jest fundamentalna dla badanych systemów. *Kategoryczność* (we wszelakich jej odmianach) to cecha przynależna bardziej sferze badań matematycznych niż logicznych.

Zacytujmy jeszcze dwa zdania kończące przywoływany już wyżej artykuł Marciszewski 2002; myśl zawarta w drugim z nich ma, z pewnością nie tylko w naszej opinii, niezwykle głęboki sens filozoficzny:

> A computing machine can solve very complex problems owing to some software and data based on strong assumptions due to the

---

[33] Nadrzędną cechą *metalogiczną* jest *niesprzeczność*. Można z sukcesem rozwijać różne systemy *logik parakonsystentnych*, ale ***parakonsystentna metalogika*** wydaje się być postmodernistyczną fantasmagorią.

> bold Platonian approach. To opt for such an approach, going very far beyond the mundane realm of first-order logic, it is a human affair and human responsibility.
>
> Marciszewski 2002, 5

5. Kilka uwag końcowych

Na zakończenie parę słów o treści przygotowywanego podręcznika. Jak już wspomniano, nie jest to wykład logiki, a jedynie prezentacja jednej z metod, a mianowicie MDS. Pokazujemy, w kilkudziesięciu zanalizowanych przykładach, jej działanie w KRZ oraz KRP. Przytaczamy dowód poprawności metody. Podajemy twierdzenia metalogiczne, z którymi jest związana MDS. Informujemy o historii MDS (na szerszym tle historii rozwoju metalogiki) oraz o pewnych jej zastosowaniach, np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń oraz w badaniu poprawności programów. Zadania zamieszczone w podręczniku pogrupowane są w zestawy jednorodne tematycznie; większość zadań zaopatrzona jest w rozwiązania bądź wskazówki. Kompozycja tekstu umożliwia przeprowadzenie na jego podstawie dwóch typów zajęć: 1) propedeutycznego wykładu dla Humanistek oraz 2) uzupełniającego wykładu dla studentów matematyki i informatyki.

Podaż podręczników logiki znacznie przewyższa w Rzeczpospolitej Polskiej popyt na nie, co może dobrze świadczy o talentach dydaktycznych środowiska akademickiego i jakoś tam świadczy o rzeszach obywatelek i obywateli, którzy raczej skąpo dają zarobić autorom podręczników.

Przystępny, przyjazny dla Czytelnika podręcznik, jak wiadomo, musi spełniać wiele warunków, np.:

- nie może szkodzić — zawierać informacji fałszywych, bałamutnych pseudowyjaśnień, niewykonalnych poleceń, itp.
- nie może odstręczać od przedmiotu — a więc (jeśli adresowany jest do szerszego grona, to) nie powinien być chyba wysoce zaawansowanym, monograficznym ujęciem dyscypliny; w żadnym wypadku nie może być nudny;
- powinien być w miarę nowoczesny, uwzględniać choć odrobinę więcej, niż zawiera tradycja Arystotelesa i Stoików;
- powinien nie tylko zachęcać do dalszych lektur, ale również chyba drażnić intelektualnie — wprowadzanie napięcia poznawczego to przecie jeden z podstawowych celów posługi dydaktycznej;
- itd., itd.

Mnożyć dobre rady jest o wiele łatwiej niż dobry (lub chociaż nieszkodliwy) podręcznik napisać.

W doborze treści, twierdzeń, metod, przykładów, zadań, itd. przygotowywanego podręcznika staramy się m.in. o realizację następujących celów:

- uświadomienie różnic pomiędzy wnioskowaniami ugruntowanymi na wynikaniu logicznym, a różnego typu uzasadnieniami akceptowanymi w języku naturalnym; ci z Czytelników, którzy mieli przykrość obcować z ludźmi poważnie fundującymi swoje przekonania o świecie na np. przysłowiach, metaforach, *logice uznaniowej*, itp. wiedzą, o co chodzi;
- nie stronienie od przykładów wykorzystujących perswazję i manipulację, z pokazaniem, gdzie kończą się zastosowania logiki elementarnej;
- analiza, z wyczerpującym komentarzem, przykładów mniej lub bardziej „drażliwych" dla logiki elementarnej: np. presupozycje, implikatury, oddzielanie zależności prawdziwościowych od pozostałych (np. uwarunkowanych kontekstowo), wskazywanie na różnice typologiczne języków naturalnych i ich wpływ na ew. „przekłady" na język KRP;
- wyprowadzanie Humanistek z ociężałej homeostazy intelektualnej poprzez, m.in., niepoprawność polityczną, wykorzystywanie (w miarę możności z subtelnością) tego, co nam wydaje się komiczne, przykłady prowokacyjne semantycznie i pragmatycznie (w granicach prawa Rzeczpospolitej Polskiej oraz Unii Europejskiej, a także z uszanowaniem kulturowych norm judeochrześcijańskich i euroatlantyckich).

Kierujemy się mottem, które przyjęliśmy od Pana Profesora Piotra Wojtylaka: PO PROSTU RÓB. NAJWYŻEJ SIĘ NIE UDA.

Odnośniki bibliograficzne

Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Barwise, J., Feferman, S. (Eds.) 1985. *Model-Theoretic Logics.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Ben-Ari, M. 2005. *Logika matematyczna w informatyce.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Beth, E.W. 1995. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Boolos, G. 1987. A Curious Inference. *Journal of Philosophical Logic*, **16**, 1–12.

Ebbinghaus, H-D., Flum, J. 1999. *Finite Model Theory.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Gödel, K. 1936. Über Länge der Beweisen. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft **7**, Franz Deuticke, Leipzig und Wien. Przedruk w: Kurt Gödel *Collected Works* Volume I, Publications 1929–1936, (Edited by Solomon Feferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, Jean van Heijenoort), Oxford University Press, New York; Clarendon Press, Oxford, 1986, 396–399.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic. An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Oxford University Press.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Lorenzen, P. 1960. Logik und Agon. *Atti del XII Congresso Internationale di Filosofia* vol. **IV**, Firenze.

Marciszewski, W. (red.) 1987. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Marciszewski, W. (red.) 1988^2. *Mała Encyklopedia Logiki.* Zakład Narodowy imienia Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław Warszawa Kraków Gdańsk Łódź.

Marciszewski, W. 2002. On going beyond the first-order logic in testing the validity of its formulas. A case study. *Mathesis Universalis*, nr **11**: *On the Decidability of First Order Logic.*

www.calculemus.org/MathUniversalis/NS/11/Beyond.pdf

Marciszewski, W. 2004–2005. *Logika 2004/2005.* Teksty wykładów zamieszczone na stronie:

www.calculemus.org/lect/logika04-05/index.html

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

McAllester, D., Givan, R. 1993. Taxonomic Syntax for First Order Languages. *JACM* vol. **40**, no. **2**.

McCawley, J. 1981. *Everything that Linguists have always Wanted to Know about Logic* (*but were ashamed to ask).* Basil Blackwell, Oxford.

Moore, G.H. 1995. The prehistory of infinitary logic: 1885–1955. W: Maria Luisa Dalla Chiara, Kees Doets, Daniele Mundici, Johan van Benthem (eds.) *Structures and norms in science.* Volume two of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995, Kluwer Academic Publishers, 105–123.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Taylor, R.G. 2002. Zermelo's Cantorian theory of systems of infinitely long propositions. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **8**, Number **4**, 478–515.

Tennant, N. 2000. Deductive versus Expressive Power: a Pre-Gödelian Predicament. *Journal of Philosophy*, **97**, 257–277.

Toledo, S. 1975. *Tableau Systems for First Order Number Theory and Certain Higher Order Theories. Lecture Notes in Mathematics* vol. **447**, Springer Verlag, Berlin.

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.

Zermelo, E. 1930. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae* **16**, 29–47.

Zermelo, E. 1932. Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **41**, 85–92.

Zermelo, E. 1935. Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme (Erste Mitteilung). *Fundamenta Mathematicae* **25**, 135–146.