Odpowiedzi na pytania egzaminacyjne

Odpowiedzi na pytania z działów 1, 2 i częściowo 4 (np. punkt 4.1) należy szukać w notatkach z wykładów. Odpowiedzi na pytania 4 – w studiowanym na wykładzie artykule Turinga [1950], a na pytania działu 5 – w rozdziale 1 książki W. Marciszewskiego *Sztuczna inteligencja* udostępnionym w „Lectorium".

Odpowiedzi na pytania z działu 3 zawarte są w pliku "Szkic uzasadnienia twierdzenia Gödla [...]" mającym link na stronie www.calculemus.org/lect w części dotyczącej filozofii umysłu. Ponieważ jest to materiał trudniejszy i najnowszy (w kolejności wykładów), dla ułatwienia podaje się niżej streszczenie w formie odpowiedzi na pytania egzaminacyjne. Dzieli się ono na trzy części, stosownie do stopnia trudności; do uzyskania z tego działu oceny na „3", wystarczy opanować stopień pierwszy (3.1-3.3). W dalszych miejscach droga robi się coraz bardziej stroma. Ale nawet, gdy się z niej zrezygnuje, taka świadomość trudności terenu będzie odróżniać ludzi wykształconych i krytycznych od tych prostodusznych, którzy nie wiedzą, jak wiele nie wiedzą.

3.1. Jeśli arytmetyka liczb naturalnych jest niesprzeczna, to istnieją w niej zdania prawdziwe niezależne od aksjomatów, tzn. takie, że ani dane zdanie ani jego negacja nie da się dowieść formalnie (algorytmicznie) na podstawie aksjomatów (krócej: istnieją prawdziwe zdania niedowodliwe). Potrzeba zastrzeżenia o niesprzeczności: jeśliby aksjomaty arytmetyki były między sobą sprzeczne, nie mogłoby być zdań niedowodliwych, gdyż ze sprzeczności wynika wszystko.

3.2. Jest to zapis postępowania, które polega na przekształcaniu formy (kształtu) przesłanek, aż do otrzymania z nich wniosku, czynione za pomocą logicznych reguł wnioskowania uwzględniających jedynie strukturę formuł, tj. kształt i położenie (miejsce w kolejności) symboli, bez uwzględniania znaczenia. Takie postępowanie jest wykonalne także dla komputera, podczas gdy dowodzenie uwzględniające znaczenie właściwe jest tylko umysłowi. Przykłady reguł dowodu formalnego: odrywanie, opuszczanie stałych logicznych, dołączanie stałych logicznych.

3.3. [GM] *Niniejsze zdanie nie jest dowodliwe formalnie w arytmetyce liczb naturalnych.*
GM jest skrótem od: zdanie Gödlowskie Metalogiczne.

3.4. Gdyby GM nie było prawdą, znaczyłoby to, że jest dowodliwe, a jeśli jest dowodliwe na podstawie prawdziwych przesłanek (jakimi są aksjomaty arytmetyki), to musi być prawdziwe. Gdy prawdziwość jakiegoś zdania wynika z założenia („na próbę") o jego fałszywości, to jest ono z konieczności prawdziwe: $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

3.5. W układach fizycznych: obraz w lustrze, ślad stopy w piasku, fotografia. Między układem fizycznym a konwencjonalnym układem znaków: mapa terenu. Między układami abstrakcyjnymi: wzajemne odwzorowanie algebry i geometrii w układzie współrzędnych badane w geometrii analitycznej, która punktom przyporządkowuje liczby rzeczywiste.

3.6. Zdania metalogiczne są odwzorowywane w zdaniach dotyczących arytmetyki (a wyrażanych w języku logiki). Pozwala to z prawdziwości zdania metalogicznego wnosić o prawdziwości będącego jego odwzorowaniem zdania arytmetycznego. [Metoda kodowania opisana jest przykładowo w udostępnionej kserokopii fragmentu książki: E. Nagel i J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN 1966.]

3.7. Istnieje liczba k kodująca (tj. odwzorowująca w wyniku kodowania) pewne prawdziwe zdanie arytmetyczne, przy czym nie ma takiej liczby x, która kodowałaby dowód zdania numer k i pozostawała do tego numeru w relacji arytmetycznej, która odwzorowuje stosunek dowodzenia między ciągiem zdań (dowodem) kodowanym przez liczbę x i zdaniem kodowanym przez liczbę k.

3.8. Opis konstrukcji rozpisany jest na kroki (1)-(5).

• (1) Przyjmuje się *regułę podstawiania* (jako jedną z reguł dowodu formalnego), która za zmienną liczbową nie związaną kwantyfikatorem pozwala wpisać inną zmienną liczbową lub jakąś cyfrę (tj. nazwę liczby) lub wyrażenie funkcyjne (jak „$s0$” czy „sx”).[1]

W szczególności, tym, co podstawiamy za zmienną, mającą np. numer 13, w zdaniu numer k może być nazwa liczby stanowiącej numer jakiegoś zdania danej teorii, np. numer m. W wyniku podstawienia powstaje zdanie mające nowy numer, powiedzmy n — zależny w sposób jednoznaczny od liczb 13, k i m, czyli będący funkcją tych liczb; oznaczmy ją symbolem „π”. Mamy więc:

$$n = \pi(k, 13, m).$$

Odtąd można zamiast cyfry „n” używać równoznacznego z nią wyrażenia funkcyjnego „$\pi(k, 13, m)$”.

• (2) Bierzemy pod uwagę taki szczególny przypadek, w którym $m = k$, to znaczy w zdaniu nr k za zmienną nr 13 podstawiamy cyfrę stanowiącą numer tej samej formuły czyli „k”. Nasza funkcja przybiera więc postać:

$$\pi(k, 13, k).$$

Przykład: przekształcenie zdania Z1 (nr k) w zdanie Z2 (nr n).

Z1. $\exists_x(x = sy)$ ..... nr k

Z2. $\exists_x(x = sk)$ ..... nr n,
gdzie liczbę k oddamy przez „$s...s(0)$”, tj. przez k wystąpień symbolu „s” poprzedzających „0”. Ten szczególny przypadek operacji podstawiania określamy jako operację *samopodstawiania*.

• (3) Zamiast zależności zachodzącej między konkretnymi liczbami jak, w powyższej funkcji π, potrzebny nam będzie pewien schemat czyli uogólnienie, gdzie zamiast takich konkretnych cyfr wystąpią reprezentujące je symbole zmienne (w tej roli stosuje się ostatnie małe litery alfabetu). Nie będzie to jednak napis w pełni schematyczny, bo dogodniej jest, dla pewnego uproszczenia, zatrzymać jedną konkretną liczbę, mianowicie numer zmiennej. Oto potrzebna w dalszym rozumowaniu postać schematyczna:[2]

$$t = \pi(v, 13, v).$$

[1] Byleby zmienna wolna nie stała się w wyniku tego zmienną związaną, jak nastąpiłoby np. w przypadku wpisania w formule „$\forall_x(x \neq y)$” litery „x” za literę „y”.

[2] Żeby mieć przykład uogólnienia czyli schematyzacji pewnej konkretnej funkcji, wyobraźmy sobie mechaniczne obliczanie (jak w szkolnych „słupkach”), gdy wykonując instrukcję „dodaj” (nazwijmy ją czynnikiem D) mamy przed oczyma, jedna nad drugą, cyfry oznaczające sześć i dwa (niech ten postrzegany układ cyfr nazywa się U); pamiętamy przy tym (nasz stan wewnętrzny S), że z przeniesienia z poprzedniej kolumny pozostała jedynka. Jak widać, rezultat R, który trzeba wpisać pod kreską jest zależny od D, U i S. Jest to zależność jednoznaczna czyli funkcja, powiedzmy ψ, co zapisujemy jako: $R = \psi(D, U, S)$. Podobnie zapisujemy konkretną zależność, np. $15 = 3^2 + 6$, stanowiącą jeden z nieskończenie wielu poszczególnych przypadków funkcji zapisanej schematycznie jako $y = x^2 + z$. Tak więc, przejście od opisu operacji na konkretnych danych do opisu schematycznego polega na wprowadzeniu zmiennych w miejsce nazw owych danych. W przykładzie z rachowaniem otrzymamy: $v = \psi(x, y, z)$. Taką rolę zmiennych dobrze oddaje potoczne określenie „dowolny”: „x” reprezentuje tu *dowolne* instrukcje, „y” – *dowolne* postrzegane układy itd.

Symbol „t” jest zmienną reprezentującą dowolny numer zdania w arytmetyce – byle byłaby to liczba, do której doszło się w ten sposób, że w jakimś wcześniej wprowadzonym zdaniu podstawiło się za zmienną numer 13 cyfrę numerującą to właśnie zdanie. Oczywiście, zamiast pojedynczego symbolu „t” można użyć jego równoważnika z drugiej strony równości, w którym odnotowana jest jakby historia dojścia do tej liczby.

• (4) O numerze $\pi(v, 13, v)$ można z sensem (nawet jeśli nie będzie to prawdą) powiedzieć, że jest schematycznym numerem zdania, które nie ma dowodu, czyli zdania takiego, że nie istnieje dlań liczba, która byłaby numerem jego dowodu. Ponieważ mowa tu jest o numerach wyrażeń, a więc o liczbach, nie zaś o numerowanych nimi zdaniach, zamiast predykatu oznaczającego logiczny stosunek dowodzenia zachodzący między zdaniami (D) pojawi się jego arytmetyczny odpowiednik (A_D) oznaczający jakąś arytmetyczną relację między odpowiednimi numerami. Niech zdanie orzekające tę relację między jakimś numerem dowodu x i naszym numerem $\pi(v, 13, v)$ ma za numer liczbę λ. Mamy więc (wg oznakowania z odcinka 6.3 w tekście wykładu):

$[ND_{A2}]$ $\neg\exists_x(A_D(x, \pi(v, 13, v))$ ..... nr λ.

• (5) Ostatni i decydujący krok, dający w wyniku zdanie gödlowskie G, na tym polega, że do zdania ND_{A2} stosujemy operację samopodstawiania. Otrzymane w jej wyniku zdanie mieć będzie numer:

$$\pi(\lambda, 13, \lambda).$$

A samo zdanie, po dokonaniu samopodstawienia w ND_{A2}, ma postać następującą:

[G] $\neg\exists_x(A_D(x, \pi(\lambda, 13, \lambda))$ ..... nr $\pi(\lambda, 13, \lambda)$, w skrócie $\pi(...)$.

Ma ono za temat liczbę $\pi(...)$, stwierdzając, że nie istnieje numer x zbioru zdań, który to zbiór byłby dowodem zdania numerowanego tą liczbą. A że samo nosi ono ów numer, stwierdza o sobie samym brak relacji arytmetycznej między liczbami x i $\pi(...)$. Skoro tak, to brak jest również relacji logicznej D odwzorowanej przez relację arytmetyczną A_D, czyli relacji dowodliwości. Zatem zdanie G jest niedowodliwe. A że jest prawdziwe jako odwzorowanie prawdziwego zdania metalogicznego GM (por. wyżej krok 3.3), mamy do czynienia z prawdziwym i zarazem niedowodliwym zdaniem arytmetycznym.

Powyższe postępowanie nie dostarcza takiego zdania w gotowej postaci, gdzie byłaby mowa o określonych liczbach. Daje natomiast przepis postępowania, którego wynik stanowiłoby takie zdanie, gdyby dało się praktycznie wykonać wszystkie obliczenia. Wobec astronomicznych rozmiarów wchodzących w grę liczb kodujących zdania, nie warto się kusić o taką konkretyzację. Żeby uzasadnić, że istnieje niedowodliwe a prawdziwe zdanie w arytmetyce, wystarczy podać ów przepis. Podobnie, jak mając przepis na placek drożdżowy oraz potrzebny do tego surowiec, możemy zawsze upiec placek.