Klasyczny rachunek zdań
Funkcje prawdziwościowe i algorytm zerojedynkowy

Tło historyczne. Myśl, że wnioskowanie, podstawowy przedmiot logiki, można ująć w formie rachunku, pojawiła się w 17. wieku m.in. u Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646-1716), który skonstruowawszy maszynę arytmetyczną, snuł też projekty maszyny logicznej. Tego projektu Leibniza nie dało się urzeczywistnić za pomocą tradycyjnej logiki wywodzącej się z dzieła Arystotelesa *Analityki* z połowy 4. wieku przed Chr., od którego datujemy rozwój logiki. Dopiero w połowie 19. wieku pojawiły się pojęcia algebraiczne torujące drogę matematycznej, a więc wykonalnej też dla maszyny, postaci logiki, która w wykończonej postaci pojawiła się po raz pierwszy w dziele Gottloba Fregego [1879].

Frege, a także Bertrand Russell (1872–1970) w Anglii i Giuseppe Peano (1858–1932) we Włoszech, tworzyli logikę z myślą o dostarczeniu precyzyjnego języka matematyce. Stąd, jej gramatyka odpowiada składni języka matematycznego. Z tego powodu, a także dlatego, że jest to rachunek, nowa teoria była zrazu nazywana logiką matematyczną. Jest ona jednak w zastosowaniach tak uniwersalna, że z czasem poniechano tej ograniczającej przydawki (określenie ‘matematyczna’ odnosimy dziś do tych działów logiki, które w sposób zmatematyzowany traktują o strukturze i własnościach teorii matematycznych).

Gałąź logiki będąca przedmiotem tego rozdziału została określona w tytule jako klasyczny rachunek zdań. Jest to podstawowa część logiki klasycznej, do której należy ponadto nadbudowany nad nią rachunek predykatów, omawiany w następnych rozdziałach. Przymiotnik ‘klasyczny’ (rachunek) lub ‘klasyczna’ (logika) jest stosowany z tego względu, że określa on powszechnie będące w użyciu i niekwestionowane ujęcie logiki; inne ujęcia są rodzajem prób, do których różni autorzy mają różny stosunek.

W celu zdefiniowania zwrotu ‘klasyczny rachunek zdań’ trzeba się posłużyć terminami **prawda** (prawdziwość) i **fałsz** (fałszywość), o których zakładamy, że za sprawą powszechnego używania są dla każdego zrozumiałe i dzięki temu nie wymagają definicji.[1]

Prawda i fałsz są cechami zdań dotyczącymi ich stosunku do rzeczywistości. Mianowicie, zdanie nazywamy prawdziwym, gdy jest zgodne z opisywanym przez nie stanem rzeczywistości, a fałszywym, gdy jest niezgodne. Do wielu celów poznawczych wystarczy przyjąć, że wchodzą w grę tylko te dwa stosunki, zgodność lub niezgodność i wtedy ma zastosowanie logika klasyczna. Żeby móc podsumować te wyjaśnienia krótką definicją, przydatne jest następujące pojęcie wartości logicznej. [Df:] wyrażenie ma **wartość logiczną** wtedy, gdy *wyrażenie to jest prawdziwe lub fałszywe*.

Definicja ta jest z rozmysłem zbudowana za pomocą spójnika ‘wtedy, gdy’ z pominięciem innego, często spotykanego w definicjach, spójnika ‘tylko wtedy, gdy’ (stąd zaliczamy ją do cząstkowych, nie do zupełnych). Nie chcemy bowiem przesądzać, czy te dwa obiekty, prawda i

---

[1] Czcionka wytłuszczona służy tu do wyróżnienia ważnych terminów technicznych, zarówno definiowanych, jak i pierwotnych czyli nie mających definicji. Temu drugiemu jej zastosowaniu towarzyszy w tekście uwaga wskazująca na pierwotność danego terminu.

Terminy, o których jest mowa w tekście są wskazane za pomocą pojedynczych cudzysłowów (podwójne sa zarezerwowane dla cytatów i tytułów). Cudzysłowy opuszcza się, gdy dany temin został już wyróżniony innym sposobem, np. przez wytłuszczenie lub kursywę; to uproszczenie typograficzne pociąga pewną wieloznaczność, ale łatwo jej zapobiega dany kontekst.

fałsz, wyczerpują zbiór wszystkich wartości logicznych. W rozważaniach filozoficznych nad stosunkiem naszej myśli i języka do rzeczywistości zauważa się, że o pewnych zdaniach nie da się z sensem powiedzieć, że są zgodne lub niezgodne z rzeczywistością. Należałoby wtedy powiedzieć, że są one pod tym względem nieokreślone i uznać taką nieokreśloność za osobną wartość logiczną. Wtedy wartości logicznych będzie conajmniej trzy, a możliwe są rozważania prowadzące do jeszcze większej ich liczby. Racje przemawiające za trzecią wartością, związane są zwykle z jakimś stanowiskiem filozoficznym. Jednym z przykładów jest spór teologów, czy zdania o ludzkich przyszłych uczynkach będących wynikiem wolnej woli mają wartość prawdy lub fałszu, czy może ową trzecią wartość nieokreśloności (powstaje jednak problem, czy jej przyjęcie nie implikuje ograniczenia Boskiej wszechwiedzy). Inne racje biorą się z pewnych rozważań w filozofii matematyki, jeszcze inne z refleksji metodologicznej nad fizyką kwantową. Pierwze systemy logiki wielowartosciowej stworzyli około roku 1920 polski filozof Jan Łukasiewicz i amerykański matematyk polskiego pochodzenia Emil Post.

Logika klasyczna, abstrahując od wspomnianych kwestii filozoficznych, ogranicza liczbę wartości logicznych do dwóch; łączy się to z takim rozumieniem negacji (wyrażanej przez zwrot przeczący ‘nie jest tak, że’ lub krótkie ‘nie’), że negacja zdania prawdziwego daje zdanie fałszywe, a negacja fałszywego daje zdanie prawdziwe. Podsumujmy to, jak następuje. [Df:]: rachunek zdań jest **klasyczny** wtedy i tylko wtedy, gdy *prawda i fałsz są w nim jedynymi wartościami logicznymi*. Tym sposobem określamy, co to znaczy, że teoria logiczna jest klasyczna. A co znaczy, że jest rachunkiem zadń, o tym traktuje reszta obecnego rozdziału.

Konstrukcja rozdziału. Pierwsza część omawia pojęcie funkcji prawdziwościowej, druga funkcje prawdziwościowe najbliższe językowi naturalnemu, tj. negację i koniunkcję, a część trzecia pozostałe funkcje potrzebne do analizy rozumowań w języku naturalnym. Część ostatnia dostarcza środków do takiej analizy, którymi są algorytm zerojedynkowy i pojęcie wynikania logicznego.

1. Pojęcie funkcji prawdziwościowej

1.1. Funkcje, czyli operacje, jako rodzaj relacji. Na każdym kroku mamy do czynienia z relacjami, które noszą też nazwę stosunków (terminy te są używane zamiennie). Zauważając np., że z dwóch ludzi jeden jest wyższy od drugiego, spostrzegamy stosunek większości. Relację orzeka się o conajmniej dwóch przedmiotach, i wtedy nazywa się ona dwuczłonowa, a w przypadku większej liczby przedmiotów — trójczłonowa, czwórczłonowa itd. Gdy coś się orzeka o jednym tylko przedmiocie, to można mówić o relacji jednoczłonowej; utożsamiamy ją z cechą czyli własnością.

Teoria relacji stanowi osobny dział logiki (można go umieścić w logice predykatów), ale ponieważ jedno pojęcie z tej teorii jest nam potrzebne, żeby z należytą dokładnością przedstawić rachunek zdań, zostanie ono omówione z wyprzedzeniem. Jest to pojęcie funkcji, ktore jest wszechobecne a matematyce, a w logice jest określone jako jeden z rodzajów relacji, mianowicie jako relacja jednoznaczna (definicja jest podana po omówieniu przykładów, przy końcu obecnego ustępu 1.1).

Istnieją takie stosunki, że gdy po jednej stronie jest wiele przedmiotów, to po drugiej tylko jeden. Np. każdy ma tylko jedną matkę (choć ta sama matka może mieć wiele dzieci), stąd relacja mieć-matkę należy do jednoznacznych czyli do funkcji. Gdy w kraju rządzi jeden król, jednoznaczna jest relacja być-poddanym-króla, ale nie odwrotna do niej relacja królowania (chyba, że w jakimś osobliwym świecie, gdzie nie wolno mieć królowi więcej poddanych niż jednego).

Inny przykład. W dobrze funkcjonującej maszynie, określonemu posunięciu operatora maszyny odpowiada jedno i tylko jedno jej zachowanie: gdy skręcę kierownicę w prawo, samochód skręci na prawo, a nigdy nie skręci w lewo ani nie odmówi skrętu; co więcej, określonemu kątowi przesunięcia kierownicy odpowiada (w danej maszynie) określony i zawsze taki sam (w tych samych warunkach) skręt kół. Powiemy przeto, że relacja przyporządkowująca ruchy kierownicy ruchom kół jest stosunkiem jednoznacznym.

Znanym przykładem funkcji są działania arytmetyczne zachodzące w zbiorze liczb całkowitych. Np. mnożenie przyporządkowuje każdej parze liczb dokładnie jedną liczbę. Toteż mnożenie zaliczamy do funkcji. Nazywamy też funkcje działaniami lub operacjami. Na przykład, operacja dzielenia przyporządkowuje każdej parze ze zbioru liczb całkowitych (jeśli pominiemy 0) dokładnie jedną liczbę ze zbioru ułamkowych, przy czym ta sama liczba ułamkowa jest przyporządkowana nieskończenie wielu parom liczb całkowitych, np. ułamek $\frac{1}{2}$ jest przyporządkowany parom 1 i 2, 2 i 4, 3 i 6 itd. Widać na tym przykładzie, że przyporządkowanie jednoznaczne nie musi zachodzić w obie strony; gdy zachodzi, mówimy wtedy o **relacji wzajemnie jednoznacznej**.

Podsumujmy te przykłady zwięzłą definicją, gdzie litera F oznacza dowolną relację, a litery po obu jej stronach wskazują na pozostające w tej relacji przedmioty. [Df:] F jest **relacją jednoznaczną** czyli **funkcją** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych przedmiotów (z rozważanych zbiorów) $x,\ y,\ z$ spełniony jest następujący warunek.[2]

$$\textit{jeśli} \;\; xFy \;\; \text{i} \;\; xFz, \;\; \textit{to} \;\; y = z.$$

Tę samą zależność wyrażamy wzorem $y = F(x)$, gdzie y reprezentuje ten jedyny przedmiot, który funkcja F przyporządkowuje przedmiotom reprezentowanym przez x. Zapis ten oddaje sposób obliczania wartości funkcji. Żeby obliczyć y, trzeba na przedmiocie x wykonać operację F. W obecnym kontekście dogodnie jest funkcję nazywać operacją, gdyż treść tego terminu naprowadza na zrozumienie następujących wyrażeń potrzebnych do mówienia o funkcjach. [Df:] **Argument funkcji** (argument operacji) jest to *obiekt (lub więcej obiektów w przypadku funkcji wieloargumentowej), na którym (których) wykonywana jest operacja*. [Df:] **Wartość funkcji** (wartość operacji) jest to *przedmiot powstający w wyniku dokonania operacji na jej argumencie (argumentach)*.

Początki pojęcia funkcji przypadają na wiek 18. W 1749 Leonard Euler określił funkcję jako *wielkość zmienną, która jest zależna od innej wielkości zmiennej*. Przypomnijmy podany wyżej przykład kierowania pojazdem, gdzie czynnik zmienny, którym jest wielkość skrętu pojazdu jest *zależny* od wielkości skrętu kierownicy. To pojęcie funkcji zakłada, że członami relacji są jakieś wyrażalne liczbowo wielkości. We współczesnej logice nadano idei Eulera większą ogólność przez opuszczenie warunku, który ograniczał funkcje do stosunków między wielkościami — zachowując tę istotną własność, że przyporządkowanie czegoś do czegoś jest zawsze jednoznaczne.

1.2. Funkcje w zbiorze wartości logicznych. Żeby przejść do funkcji występujących w logice, zacznijmy od faktu, że istnieją zdania prawdziwe i zdania fałszywe. Cechę prawdziwości oznaczamy symbolem ‘1’, a cechę fałszywości symbolem ‘0’. Cechy te to abstrakcyjne obiekty, na których są wykonywane operacje logiczne.

Obiekty 1 i 0 tworzą dwuelementowy zbiór, który nazywamy zbiorem wartości logicznych. Przypomnimy (por. ustęp „Tło historyczne”), że w logice klasycznej jedynymi wartościami logicznymi są prawda i fałsz oraz że rzyjmujemy tu oba terminy za pierwotne (Alfred Tarski [1933] dał precyzyjną definicję pojęcia prawdy, ale jej wprowadzenie wymaga tylu przygotowań pojęciowych, że nie jest to możliwe w obecnym kontekście).

Na tych elementach można wykonywać pewne operacje, co znaczy, mówiąc inaczej, że zachodzą między nimi relacje będące funkcjami. Zarówno argumenty jak i wartości funkcji należą tu do tego samego zbioru złożonego z dwóch elementów, fałszu i prawdy, stąd funkcje te nazywamy prawdziwościowymi, a oznaczające je symbole (negacji, koniunkcji etc.) nazywamy funktorami prawdziwościowymi. Oto określenia tych pojęć.

[2] Znak równości w poniższej formule jest środkiem do wyrażenia myśli, że przedmiot przyporządkowany x-owi przez R jest jedyny; Np. każdemu poddanemu x w pewnej monarchii stosunek poddaństwa przyporządkowuje dokładnie jednego władcę, który, powiedzmy, występuje pod kilkoma tytułami, np. ‘król Polski’ i ‘wielki książę Litwy’. Ktoś (nie wiedzący nawet o tych dwóch nazwach) gdy się dowie tyle, że Wołodyjowski (x) jest poddanym króla Polski (y) i poddanym wielkiego księcia Litwy (z), na podstawie definicji poddaństwa jako relacji jednoznacznej wywnioskuje, że ten król i ten książę to jedna i ta sama osoba.

[Df:] Funkcja jest **prawdziwościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno wartości jej argumentów jak i wartości funkcji należą do zbioru wartości logicznych.

[Df:] Symbol jest **funktorem prawdziwościowym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest symbolem funkcji prawdziwościowej.

Jak widać z porównania ostatnich dwu defincji, nie należy mylić funkcji z ich symbolami. Funkcja jest pewnym obiektem abstrakcyjnym (podobnie jak liczba) zaś oznaczający funkcję symbol jest wyrażeniem języka logicznego (podobnie jak oznaczająca liczbę cyfra jest wyrażeniem języka arytmetycznego, np. cyfra „9" jest wyrażeniem oznaczającym liczbę 9). Symbol stosowany do zapisania funkcji prawdziwościowej nazywamy **funktorem prawdziwościowym**.

2. Koniunkcja i negacja

2.1. Tabele dla negacji i koniunkcji. Systematyczny przegląd funkcji prawdziwościowych odłożymy do następnego odcinka. Tutaj rozważymy przykładowo dwie spośród nich, najlepiej nadające się do porównania z ich odpowiednikami w języku polskim.

Rozważymy dwa funktory prawdziwościowe, jeden zwany 'negacją' lub 'przeczeniem' drugi 'koniunkcją'. Oba są obecne w języku polskim: negacja jako zwrot 'nie jest prawdą, że' (lub jakiś z nim równoznaczny), koniunkcja zaś jako spójnik 'i' (lub jakiś z nim równoznaczny, np. 'oraz'). Oto ich definicje.

Negacja ma tę własność, że kiedy jej funktorem poprzedzi się zdanie prawdziwe, to przemienia on je w zdanie fałszwe, a gdy poprzedzi się nim fałszywe, to nastąpi przemiana w prawdziwe.

Koniunkcja ma tę własność, że aby była prawdziwa, oba zdania składowe połączone jej funktorem powinny być prawdziwe. W każdym innym przypadku, a więc gdy fałszywy jest jeden ze składników lub oba, koniunkcja jest fałszywa.

Definicje te dadzą się przejrzyście zapisać w tabelkach, w których argumenty zdaniowe funkcji są reprezentowane literami 'p' i 'q', symbolem zdania prawdziwego jest '1', fałszywego '0', zaś funktorami negacji i koniunkcji są, odpowiednio, symbole '$\neg$' i '$\wedge$'.

W tabelce TN, tj. dla negacji, pierwsza kolumna podaje wartości argumentu a druga wartości funkcji (przy danej wartości argumentu). W tabelce TK, tj. dla koniunkcji, pierwsze dwie kolumny podają wartości argumentów, a trzecia wartości funkcji.

TN

p	$\neg p$
1	0
0	1

TK

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2.2. Negacja i koniunkcja a logika naturalna. Z powyższych tabelek można wyprowadzić ważną naukę w kwestii stosunku pomiędzy teorią logiczną, w tym przypadku rachunkiem zdań, oraz **logiką naturalną**, to jest tą wrodzoną każdemu z nas, a przejawiającą się w językach etnicznych, np. w polskim; zamiast zwrotu w liczbie mnogiej 'języki etniczne' dogodnie będzie posługiwać się zwrotem '**język naturalny**', rozumiejąc pod nim ogół języków etnicznych (tj. właściwych grupom narodowym).

Tabelki pokazują naocznie, że klasyczny (tj. z klasycznego rachunku zdań) funktor negacji '$\neg$', jak i klasyczny funktor koniunkcji '$\wedge$', są symbolami funkcyjnymi w dokładnie takim samym sensie, jak są nimi np. symbole działań arytmetycznych. To jest fakt niewątpliwy. Żeby wyciągnąć z tabelek zapowiedzianą naukę, to prócz tego faktu trzeba jeszcze uznać, że zwrot 'nie jest prawdą, że' oraz spójnik 'i' mają w pewnych zastosowaniach, to samo znaczenie, które przysługuje, odpowiednio, logicznym funktorom negacji i koniunkcji. Jeśli to się potwierdzi, to będziemy mieli dowód, że precyzyjne pojęcia logiczne mają odpowiedniki w mniej precyzyjnych, ale przydatnych praktycznie, pojęciach wrodzonych, które znajdują swój wyraz w języku naturalnym. Czy się potwierdzi?

Na to pytanie autor nie musi dawać odpowiedzi, a nawet nie powinien, ponieważ Czytelnik jest tu całkowicie kompetentny, a lepiej jeśli jego reakcja na postawione pytanie będzie wolna od sugestii autora. Trzeba tylko podkreślić klauzulę *przynajmniej w niektórych zastosowaniach*, ponieważ językowi naturalnemu właściwa jest tego rodzaju ekonomia, że nieraz to samo wyrażenie ma kilka znaczeń, które dadzą się rozróżniać za sprawą kontekstu, czy to tekstowego czy nawet sytuacyjnego (tj. okoliczności spoza języka towarzyszących tekstowi).

Ekonomia polega na tym, że słownik danego języka nie rozrasta się ponad jakieś niezbędne minimum. Oto na przykład, gdyby przełożyć jednoznaczność nad ekonomiczność, to oprócz spójnika ‘i’ łączącego zdania trzeba by mieć osobne słowo dla takich kontekstów jak „Jaś i Małgosia są parą”, z których tego ‘i’ międzynazwowego nie da się wyeliminować na rzecz konstrukcji spójnikowej w rodzaju „Jaś jest parą i Małgosia jest parą”. Różnych znaczeń ‘i’ jest jeszcze więcej, tak więc odpowiedź na postawione wyżej pytanie musi być ograniczona do jednego ze znaczeń. Pytanie zatem brzmi, czy istnieją w języku naturalnym (egzemplifikowanym tu przez polski) takie konteksty, w których zwrot ‘nie jest prawdą, że’ oraz spójnik ‘i’ odpowiadają co do swej roli klasycznym funktorom negacji i koniunkcji. Odpowiedź twierdząca jest tym, co uzasadnia stosowanie klasycznego rachunku zdań do analizy i oceny wnioskowań przeprowadzanych w języku naturalnym. Autor więc tej książki — przez sam fakt jej napisania — podpisał się pod odpowiedzią twierdzącą. Prawem Czytelnika jest proponować rozwiązanie konkurencyjne.

Zostało już zasygnalizowane, że ten sam (co do brzmienia) funktor języka naturalnego może mieć w danym języku więcej niż jedno znaczenie. Z drugiej strony, należy zauważyć, że to samo znaczenie może być podkładane pod różne funktory albo też, co jest rzeczą bardziej skomplikowaną, wchodzić jako jeden z elementów w skład znaczenia różnych funktorów. Oto przykłady.

Ze słówkiem ‘i’ równoznaczne jest ‘oraz’, a w staropolskim mieliśmy jeszcze ‘tudzież’. Sens koniunkcji występuje jako składnik w znaczeniu spójnika ‘a’ oprócz drugiego składnika znaczeniowego, który służy jakiemuś przeciwstawieniu. W zdaniu „Magda jest grzeczna a Jaś niegrzeczny” (i) stwierdza się współzachodzenie dwóch faktów, a więc współprawdziwość opisujących je zdań, do czego służy funktor koniunkcji, a ponadto (ii) wyraża się przekonanie, że te fakty są sobie jakoś przeciwstawne. Jeśli takie zdanie wystąpi w rozumowaniu, którego poprawność zechcemy ocenić w świetle logiki, to weźmiemy pod uwagę jedynie składnik pierwszy, a drugi zignorujemy jako nieistotny z punktu widzenia poprawności wnioskowania.[3] Przykładem na nieszkodliwość takiego ignorowania w procesie analizy logicznej może być to, że zarówno ze zdania o budowie p *i* q jak i ze zdania o budowie p *a* q wynikają zdania o budowie p, o budowie q, dalej q *i* p (przemienność członów koniunkcji), i tak dalej, wedle tych samych reguł klasycznego rachunku. Słówko ‘a’ ma swoje bliskoznaczniki, do których się odnoszą te same konstatacje; są to np. ‘ale’, ‘lecz’, ‘jednak’, ‘natomiast’.[4] Ten składnik znaczenia wyrażenia, który pokrywa się ze znaczeniem jakiegoś funktora prawdziwościowego będziemy określać jako **trzon prawdziwościowy** danego wyrażenia.

Także negację wyrażamy po polsku na różne sposoby. Można poprzedzić zdanie zwrotem ‘nie jest tak, że’, zwrotem ‘nie ma miejsca fakt, że’ itp. Zwroty tego rodzaju brzmią nieraz sztucznie, toteż dobra stylistyka wymaga ograniczenia ich zastosowań do określonych sytuacji, na przykład

[3] Zdanie zaopatrzone w niniejszy przypis jest także przykładem na porównanie roli ‘a’ z rolą ‘i’; zamiast powiedzieć „a drugi zignorujemy” można powiedzieć „i drugi zignorujemy”, ale wtedy autor nie dałby wyrazu swej świadomości, że zachodzi przeciwieństwo między ignorowaniem i braniem pod uwagę.

[4] Ostatnie z wymienionych służy do najsilniejszego kontrastowania stąd trzeba uważać, czy istotnie o tak duży kontrast nam chodzi. Gdy spiker powie „Kończymy nasz program i za chwilę będzie następny”, to jest w porządku; nie jest też źle, gdy powie „Kończymy nasz program, a za chwilę będzie następny”. Jest natomiast błędem językowym, gdy powie (jak to się coraz częściej zdarza) „Kończymy nasz program, natomiast za chwilę będzie następny”.

gdy pada zarzut mówienia nieprawdy: „Nie jest tak, że [domyślne ‘jak twierdzisz’] ty pamiętasz o moich urodzinach”. Najprostszym i najczęstszym sposobem zaprzeczania właściwym językowi naturalnemu jest poprzedzenie orzeczenia słowem (w przypadku polskiego) ‘nie’, jak w zdaniu „Ty nie pamiętasz o moich urodzinach”. W języku polskim to ‘nie’ przed orzeczeniem obowiązuje także wtedy, gdy nastąpiło zaprzeczenie podmiotu; takie dwie negacje nie likwidują się wzajemnie (jak czynią w łacinie, angielskim, niemieckim i in.), stąd powiedzenie „Nikt nie woła”, podczas gdy po łacinie powiedziałoby się „Nemo vocat”, a po angielsku „Nobody cries” („Nobody does not cry” byłoby błędem gramatycznym, bo negacja jest już zawarta w ‘nobody’).

Podobne komentarze będą potrzebne w odniesieniu do innych funktorów klasycznego rachunku zdań oraz ich odpowiedników w języku naturalnym, dla których będziemy w każdym przypadku poszukiwać ich trzonu prawdziwościowego. Zajmiemy się obecnie trzema innymi funkcjami spośród tych pięciu, które (razem z omówionymi) występują w większości ujęć klasycznego rachunku zdań.

3. Alternatywa, implikacja, równoważność

3.1. Alternatywa. Rozważmy obecnie taką funkcję, która przybiera wartość prawdy, gdy przynajmniej jeden z jej argumentów jest prawdą, a więc ma ona wartość fałszu wtedy i tylko wtedy, gdy oba argumenty są fałszem. Funkcja ta nazywa się **alternatywą**. Charakteryzuje ją następująca tabela.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

TA

Założenie, że zachodzi conajmniej jedno z dwojga, bądź *p* bądź *q* (takich członów może być więcej) pojawia się często we wnioskowaniach, na przykład w eliminowaniu hipotez. Mianowicie, gdy dysponujemy zbiorem hipotez, o którym wiemy, że przynajmniej jedna z hipotez musi być prawdziwa, nie wiemy jednak która, to wyjściową przesłanką wnioskowania jest alternatywa owych hipotez. Potem, jak to czyni np. detektyw w toku śledztwa, eliminujemy poszczególne człony jako sprzeczne z poznanymi w międzyczasie faktami, i wtedy ostatni, który pozostał zasługuje na uznanie go za prawdę.

Występujący w tym rozumowaniu zwrot ‘przynajmniej jedno z’ dobrze oddaje treść przesłanki, ale jest na tyle niewygodny, że warto znaleźć krótsze słowo o charakterze spójnika, który by łączył argumenty alternatywy w jedno zdanie. W języku polskim stosunkowo dobrze nadaje się do tej roli spójnik ‘lub’. Nie będzie tu doskonałej odpowiedniości, ponieważ typowe w polskim użycie ‘lub’ służy też do wyrażenia, że mówiący nie wie, który z członów jest prawdziwy; wie tylko, że przynajmniej jeden. Tego składnika znaczeniowego nie ma w funktorze prawdziwościowym ‘$\vee$’. Ale skoro poprawność wnioskowań zawierających ‘lub’ nie zależy od tego, co przy ich okazji wyraża się o stanie własnej wiedzy, nie ma przeszkody by z logicznego punktu widzenia interpretować ‘lub’ jako funktor alternatywy.

Trafność tej interpretacji potwierdza się, gdy weźmie się pod uwagę stosunek zdania alternatywnego do równoważnego mu zdania zapisanego za pomocą koniunkcji z negacją. Okazuje się, gdy sięgniemy do odpowiednich tabelek, że formuła:

(3.1). 1 $\quad p \vee q$

przybiera dla każdego z podstawień za *p* i *q* tę samą wartość, co formuła:

(3.1). 2 $\quad \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Znaczy to, że tę samą treść można wypowiedzieć za pomocą zdania w formie 1 i za pomocą zdania w formie 2, o ile w miejscach p i q znajdą się te same zdania składowe.

Po to, by po przejściu do porównań z językiem polskim mieć do czynienia z formułą prostszą niż 2, przekształćmy obie w ten sposób, że każdą z nich zanegujemy. Jeśli bowiem obie wyrażają to samo, to zaprzeczenie jednej wyraża to samo, co zaprzeczenie drugiej; możemy więc równie dobrze dokonywać porównań z językiem polskim, biorąc pod uwagę owe zaprzeczenia. Ponieważ wyrażenie 2 stanowi negację formuły $\neg p \wedge \neg q$, to po jeszcze jednym zanegowaniu, otrzymamy z 2 znów tę formułę (zgodnie z prawem podwójnego przeczenia). Mamy więc do porównania formuły:

(3.1). 3 $\neg(p \vee q)$

(3.1). 4 $\neg p \wedge \neg q$.

Aby dostrzec, że są one zamienne, czyli równoważne, wsłuchajmy się w następujący dialog. Ktoś zadaje pytanie, gdzie studiowała pani Margaret Thatcher, na co odpowiadają, każda inaczej, dwie osoby: A i B.

A: Studiowała w Londynie lub w Edynburgu.
B: Nieprawda.
A: Skąd wiesz?
B: Bo sprawdziłem, że nie studiowała w Londynie i nie studiowała w Edynburgu.
A: Jeśli tak, to istotnie, pomyliłem się.

Osoby dialogu są tu posłuszne prawu logiki, które funkcjonuje — jak widać — także w języku naturalnym, mianowicie prawu, że koniunkcja zaprzeczeń dwóch zdań da się zastąpić alternatywą tychże zdań. Mianowicie:

(3.1). 5 „$\neg(p \vee q)$” można zastąpić przez „$(\neg p \wedge \neg q)$”.

Zachodzi także związek w pewien sposób symetryczny względem powyższego, mianowicie:

(3.1). 6 „$\neg(p \wedge q)$” można zastąpić przez „$(\neg p \vee \neg q)$”.

Zdania 5 i 6, gdy się je zapisze w pełni symbolicznie, tj. wyrazi sie zastępowalność symbolem „$\Leftrightarrow$”, o którym mowa dalej, w 3.2),[B nazywają się prawami de Morgana dla logiki zdań (od nazwiska angielskiego logika z 19go wieku; analogiczne prawa występują w logice predykatów i w teorii zbiorów). Pokazują one, że sens funktora alternatywy z rachunku zdań pokrywa się, w zastosowaniue do wnioskowań, z sensem spójnika ‘lub’ w polszczyźnie. Jeśli bowiem zgodziliśmy się (o czym była mowa w 2.2), że funktory negacji i koniunkcji pokrywają się znaczeniem, odpowiednio, ze zwrotem przeczącym ‘nieprawda, że’ i spójnikiem ‘i’, a teraz okazuje się, że za pomocą negacji z koniunkcją można wyrazić zarówno alternatywę rachunku zdań (tj. formułę z ‘$\vee$’), jak i alternatywę języka polskiego (z ‘lub’), to spójnik ‘lub’ stanowi adekwatny logicznie przekład funktora ‘$\vee$’.

3.2. Implikacja i równoważność. Podobnie jak w poprzednim odcinku postąpiliśmy z alternatywą, postąpimy obecnie z kolejną funkcją rachunku zdań, która nosi nazwę implikacji. Mianowicie, znajdziemy równoważną implikacji formułę skonstruowaną z negacji i koniunkcji, a następnie pokażemy, że ta równoważność zachodzi też dla odpowiednich konstrukcji w języku polskim.

Implikacja jest to funkcja prawdziwościowa, która przybiera wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwszy argument ma wartość 1, a drugi wartość 0; w każdym innym przypadku implikacja ma wartość 1. Przedstawia to następująca tabelka.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

`TI`

Porównajmy ją z tabelką `TI*`, która podaje wyniki obliczenia, jakie wartości przybiera funkcja $\neg(p \wedge \neg q)$ dla kolejnych podstawień.

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

`TI*`

Tabelki te mają identyczną zawartość, co znaczy, że charakteryzowane przez nie funkcje są identyczne, a różnią się jedynie sposobem wysłowienia.[5] Różnica w sposobie wysłowienia polega na tym, że co wyraża się w jednej strzałką implikacji, w drugiej wyraża się za pomocą pewnego układu funktorów koniunkcji i negacji.

Podobnie, jak w przypadku alternatywy, powstaje pytanie, czy analogiczna odpowiedniość w języku polskim zachodzi dla tego spójnika, który wybierzemy jako odpowiednik funktora implikacji. Do roli tej, jak zobaczymy, nadaje się spójnik służący do budowy **zdań warunkowych**, mianowicie:

jeśli *p* to *q*.

Zamiennie z nim można używać zwrotów:

gdy *p*, to *q*
zawsze, gdy *p*, to *q*
o ile *p*, to *q*
to, że *p* pociąga to, że *q*

i tym podobnych.

Istotnie, łatwo tu o przykłady potocznych polskich odpowiedników tej równoważności, która zachodzi między funkcją $p \Rightarrow q$ z tabelki `TI` a funkcją $\neg(p \wedge \neg q)$ z tabelki `TI*`. Można znaleźć sporo takich, które dobrze wpadają w ucho jako obiegowe przysłowia. *Nie ma róży bez kolców* podpada pod koniunkcyjną formę `TI*`, a nikt nie ma wątpliwości, że znaczy dokładnie to samo, co powiedzenie w formie implikacyjnej *jeśli jest róża, to są (w niej) kolce*. Podobnie zachowuje się fraza *nie ma dymu bez ognia*.

Ten stosunek zachodzący między formą implikacyjną a formą negacyjno-koniunkcyjną dostarcza metody obalania twierdzeń mających formę zdania warunkowego czyli implikacji. Aby zaprzeczyć poglądowi *która krowa dużo ryczy, mało mleka daje* (tzn., jeśli ryczy, to daje mało mleka), trzeba pokazać krowę, która dużo ryczy, ale daje też dużo mleka. Inny przykład. Pewien ostrożny kupiec kieruje się ściśle zasadą, by nie zaciągać kredytów, a uzasadnia to poglądem, że branie kredytów niechybnie pociąga bankructwo. Co, oczywiście, równoznaczne jest z twierdzeniem, że kto zaciąga

[5] Analogiczny sposób porównywania tabelek można było zastosować w poprzednim odcinku, dotyczącym alternatywy; użyto tam jednak do tego celu metody bardziej opisowej niż rachunkowej, by tym sposobem pokazać różne możliwe metody analizy sensu funktorów.

kredyty, ten bankrutuje. Jak go przekonać, że nie jest to prawdą? Trzeba wskazać na przypadki, w których wzięto kredyt, a nie nastąpiło bankructwo.[6]

Jest jeszcze jeden, ważny dla analizy rozumowań, sposób formułowania zdania warunkowego. Zgodnie z przydawką, zdanie takie mówi o tym, jak pewien stan rzeczy warunkuje inny. Aby to zadawalająco opisać, nazwijmy pierwszy człon implikacji jej **poprzednikiem**, a drugi **następnikiem**. Każdy z tych członów mówi coś o warunkowaniu drugiego, w każdym jednak przypadku chodzi o inny rodzaj warunku (warunkowane są, właściwie, stany rzeczy, których dotyczą te zdania, ale dla skrótu mówimy o warunkowaniu poprzednika przez następnik i następnika przez poprzednik).

Oto zasada określająca ów stosunek. Poprzednik wyraża **warunek dostateczny** (zwany też *wystarczającym*) względem następnika, zaś następnik wyraża **warunek konieczny** (zwany też *niezbędnym*) względem poprzednika. Na przykład, implikacja *każda osoba prawna ma zdolność do czynności prawnych* (domyślnie: „jeśli jest się osobą prawną, to ma się zdolność ...” itd.) stwierdza, że wystarczy, czyli jest warunkiem dostatecznym, być osobą prawną, by mieć wymienioną zdolność. Nie jest to natomiast konieczne, bo tę samą zdolność mają niektóre osoby fizyczne. Z drugiej strony, dla osoby prawnej niezbędne jest posiadanie owej zdolności, bo bez niej nie byłaby ona osobą prawną; w tym sensie, cecha ta jest warunkiem koniecznym.[7]

To, że stan rzeczy A jest warunkiem wystarczającym dla B, można wyrazić (dokniej niż przez ‘jeśli’) za pomocą spójnika ‘zawsze wtedy, gdy’, powiadając *zawsze wtedy, gdy A, to B*. To zaś, że B jest warunkiem koniecznym dla A, można wyrazić za pomocą spójnika ‘tylko wtedy, gdy’, powiadając *B tylko wtedy, gdy A*. Na przykład, gdy się mówi „nie ma dymu bez ognia”, chce się powiedzieć, że dla dymu konieczny jest ogień, czyli że dym jest *tylko wtedy gdy* ogień; to zaś jest jednym ze sposobów wyrażenia implikacji „jeśli jest dym, to jest (tamże) ogień”, czyli, „*zawsze wtedy gdy* jest dym, to jest ogień”.

Gdy teraz połączymy oba te spójniki w jeden złożony, powiadając *A zawsze wtedy i tylko wtedy, gdy B* lub krócej (opuszczając ‘zawsze’ jako domyślne)

A wtedy i tylko wtedy, gdy B,

to stwierdzamy, że A jest warunkiem koniecznym i zarazem wystarczającym dla B, co oczywiście pociąga za sobą, że i B jest takim podwójnym warunkiem dla A. Zachodzi tu więc koniunkcja dwóch implikacji tym się różniących, że zdanie będące w jednej poprzednikiem w drugiej jest następnikiem i odwrotnie.

Ta funkcja prawdziwościowa jest określana jako **obustronna implikacja** czyli **równoważność**. Oznaczamy ją symbolem $\Leftrightarrow$ który swym kształtem wskazuje na zachodzenie implikacji w obu kierunkach (czego nie da się powiedzieć o symbolu „$\equiv$”, też stosowanym dla oznaczenia równoważności).

Nim zajmiemy się systematycznie, w rozdziale VI, zagadnieniami definicji, jest tu stosowne miejsce na antycypowanie punktu dotyczącego zastosowania naszego symbolu „ $\Leftrightarrow$ ” w definicjach. W zależności od kategorii składniowej (por. II.1.1) wyrażenia definiowanego, definicja ma bądź

[6] Struktura zdań podawanych wyżej jako przykłady cechuje się nie tylko tym, że są to (jawnie lub domyślnie) zdania warunkowe, ale także tym, że są to zdnia ogólne. Ma to konsekwencje, gdy idzie o sposób zaprzeczania, bo zdania ogólne obalamy za pomocą wskazania niezgodnych z nimi konkretnych przypadków. Takim doborem przykładów wykraczamy poza tematykę obecnego rozdziału i antycypujemy rozdziały następne; tłumaczy się to staraniem o to, żeby przykłady obalania implikacji nie były sztuczne, w praktyce bowiem interesuje nas prawdziwość twierdzeń ogólnych.

[7] Relacji między warunkami koniecznym i dostatecznym nie należy mylić ze stosunkiem przyczynowym, które jest o tyle bogatszy, że zawiera odniesienie do czasu, do pewnych zależności fizycznych itp. Toteż nie ma w tym nic osobliwego, że czasem warunek dostateczny następuje czasowo po koniecznym; np. jest konieczne mieć maturę, by zostać przyjętym na studia wyższe, a więc wystarcza być studentem, by posiadać maturę.

postać zdania, w którym symbol równości (lub wyrażenie o podobnej funkcji) łączy dwie nazwy, bądź postać zdania, w którym symbol równoważności łączy dwa zdania.

Przykład pierwszej postaci: „$1 =_{df}$ nast(0)” (jedność definiujemy jako następnik zera);

Przykład drugiej postaci: „$x{=}y{-}z \Leftrightarrow_{df} y{=}x{+}z$” (definicja odejmowania za pomocą symbolu dodawania).

Następujący po symbolu równości lub równoważności indeks „df” wskazuje, że dane zdanie pełni rolę definicji. Bywa, że mamy dwa zdania o tym samym kształcie, lecz tym się różniące, że jedno z nich jest w pewnej teorii definicją, a drugie, w innej teorii, funkcji tej nie pełni. Ze względu na identyczność kształtu łatwo jest je pomylić, za co płaci się pogmatwaniem dalszego ciągu myśli. Można jednak tej szkodzie zapobiec, jeśli ów szczególny przypadek równoważności, jakim jest równoważność definicyjna, odróżnimy od przypadku ogólnego za pomocą owego indeksu. Analogicznie odróżniamy dwie wersje symbolu równości, co ilustruje drugi z podanych wyżej przykładów, gdzie pierwsze i trzecie wystapienie symbolu równości nie ma charakteru definicyjnego, a ma je drugie, co zaznaczono dopiskiem „df”.

Wracając do tematyki rachunku zdań, zauważmy, że symbol równoważności nie jest konieczny, bo cokolwiek wyrażamy za jego pomocą, możemy równie dobrze wyrazić posługując się koniunkcją odpowiednich implikacji. Tak, na przykład, zdanie: „*grzmi* $\Leftrightarrow$ *błyska*” jest równoznaczne ze zdaniem „(*grzmi* $\Rightarrow$ *błyska* $\wedge$ (*błyska* $\Rightarrow$ *grzmi*)”. Tę zamienność równoważności na koniunkcję dwóch implikacji stwierdza następująca definicja.

$$„(p \Leftrightarrow q)” \Leftrightarrow_{df} „(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)”$$

Funktor równoważności jest wysoce przydatny, choć dysponując implikacją i koniunkcją możemy się bezeń obejść, bo nie tylko skraca on napisy, ale czyni je też przejrzystszymi.

Łatwo pokazać, że zdefiniowanie równoważności jako koniunkcji dwu implikacji pociąga za sobą charakterystykę równoważności przez następującą tabelkę.

TR

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pożytecznym treningiem w korzystaniu z tabelek, przygotowującym do zagadnień z następnych odcinków, będzie wyprowadzenie definicji równoważności z wziętych łącznie tabel `TK, TI, TR`.

3.3. Algebraiczne podstawy rachunku zdań. Funkcja prawdziwościowa — przypomnijmy — jest to funkcja, której wartości, jak i argumenty czerpane są z dwuelementowego zbioru wartości logicznych. Każda z poznanych dotychczas funkcji w swoisty, sobie właściwy sposób, przyporządkowuje wartościom argumentów wartości funkcji, np. równoważność argumentom o wartościach 1 i 1 przyporządkowuje wartość 1, argumentom o wartościach 0 i 1 wartość 0, itd.

Powstaje pytanie, skąd bierzemy nasz repertuar funkcji prawdziwościowych. Czy jest to przypadek, że braliśmy ich dotąd pod uwagę pięć, czy jest w tym jakaś metoda? Podjęcie tego pytania rzuci światło na pewne metody postępowania w nauce, toteż jego doniosłość wykracza poza wewnętrzne zagadnienia rachunku zdań; jednocześnie zaś ujawni się powód, dla którego obecną teorię nazywamy rachunkiem.

Zrozumienie istoty rachunku zdań oraz metody prowadzącej do wyboru naszych funkcji prawdziwościowych wymaga odwołania się do ważnego rozdziału z dziejów nauki, jakim było powstanie algebry abstrakcyjnej. Początki algebry sięgają 16go i 17go wieku (wielkie zasługi dla jej rozwoju położył Kartezjusz), ale jej postać abstrakcyjna, ściśle związana z powstaniem współczesnej logiki, ukształtowała się w wieku 19tym. Abstrakcyjność jej polega na tym, że operacje (inaczej, funkcje) algebraiczne nie są ograniczone do liczb (jak to czyniono we wcześniejszej algebrze), lecz są definiowane dla obiektów dowolnego rodzaju; o tych obiektach wiemy tylko tyle, ile zostało podane w definicjach operacji; są to, mianowicie, te i tylko te przedmioty, na których owe operacje dają się wykonać. W zależności od tego, jak zdefiniujemy operacje, czyli jakie przypiszemy im własności, powstają różne teorie algebraiczne.

Jedna z takich teorii znajduje się u podstaw rachunku zdań. Nazywa się ona algebrą Boole'a od jej twórcy, którym był matematyk brytyjski George Boole (1815–1864). Przyjmuje się w niej, że zbiór przedmiotów, na których wykonalme są operacje jest dwuelementowy, niczego nie zakładając (zgodnie z abstrakcyjną naturą algebry) o tym, co to są za przedmioty. Jako operacje wykonalne na jej elementach przyjmuje się takie, które odpowiadają przedstawionym wyżej tabelom `TN, TK` i `TA`, ale — pamiętajmy — na tym wyjściowym etapie, nie są to tabele mówiące o wartościach logicznych i działaniach na tych wartościach.[8]

Tak więc, dwuelementowy zbiór i trzy wymienione operacje charakteryzują jednoznacznie algebrę Boole'a, stąd nazywa się je operacjami boolowskimi.[9] Łatwo zauważyć, że tego rodzaju operacji da się zdefiniować więcej. Np. wśród operacji jednoargumentowych można sobie wyobrazić jeszcze taką, która zachowuje ten sam obiekt, czyli 1 „przekształca" w 1, zaś 0 w 0. Ile jest wszystkich funkcji, można obliczyć kombinując wszystkie możliwe zestawienia zer i jedynek. Wynik tych operacji kombinatorycznych podają poniższe tabele: `T1` dla funkcji jednoargumentowych, a `T2` dla funkcji dwuargumentowych.

x	A	B	C	D
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

`T1`

Liczba wszystkich możliwych funktorów dwu argumentowych przy dwu wartościach funkcji wynosi 16. Poniższa tabela — `T2` — nie tylko podaje ten wynik, ale pozwala też prześledzić metodę, która do niego prowadzi.

$x\ y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1 0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0 0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

W tym punkcie widać swobodę, jaką mamy przy tworzeniu systemu logicznego. Po pierwsze, nadajemy nic nie mówiącym symbolom taką lub inną interpretację. Dla celów np. techniki elektronicznej oraz informatyki interpretuje się funkcje opisane w powyższych

[8] Odniesienie do wartości logicznych zachodzi dopiero na etapie zastosowań, od którego *de facto* zaczęliśmy nasze rozważania, ale który *de iure* (czyli z racji powinności) jest późniejszy w porządku teoretycznym.

[9] Zrobiły one karierę nie tylko w logice, lecz także w informatyce, gdzie znajdują zastosowanie zarówno w projektowaniu układów w sieciach elektrycznych, jak i strukturze języków programowania.

tabelach jako schematy połączeń sieciowych, dla celów neurofizjologii jako schematy w sieciach nerwowych, a dla celów klasycznego rachunku zdań — jako funkcje do obliczania wartości logicznych zdań złożonych. Widać z tego, dzięki czemu rozważana obecnie teoria zasługuje na miano rachunku zdań (dlaczego nazywa się rachunkiem klasycznym, była mowa w odcinku "Tło historyczne").

Jeśli nawet nie każda z dwudziestu powyższych funkcji może być wykorzystana w naszym rachunku (są takie, którym trudno nadać intuicyjne znaczenie), to niektóre z nich na pewno się do tego nadają, a jest ich więcej niż to uwzględniono w obecnych rozważaniach. Na przykład, funkcja scharakteryzowana w kolumnie 15 odpowiada spójnikowi 'ani ... ani ...' i mogłaby się przydać do zdefiniowania koniunkcji i negacji, ponieważ obie w sobie zawiera. Istotnie, są systemy (np. W. V. O. Quine'a), które posługują się tym funktorem (a raczej jego symbolicznym odpowiednikiem), ponieważ są po temu pewne racje teoretyczne. Jeśli natomiast tworzy się system logiki bardziej dla celów praktycznych niż teoretycznych, należy wybrać te funkcje, które najczęściej się pojawiają w rozumowaniach, o ile tylko inne dadzą się, w razie potrzeby, zdefiniować za ich pomocą.

W przyjętym tu zestawie pięciu funkcji, najbardziej dla naszych celów praktycznym, są takie pary, że za ich pomocą można zdefiniować pozostałe. Było już pokazane, jak przez koniunkcję z negacją można wyrazić alternatywę i jak implikację; z kolei, równoważność da się zdefiniować przez koniunkcję z implikacją. Można pokazać, że koniunkcja z negacją wystarczają do zdefiniowania nie tylko tych wybranych tu funkcji, ale także i pozostałych wyliczonych w T2. Tę samą zdolność mają pary (z naszego zestawu): alternatywa z negacją oraz implikacja z negacją; można np. zdefiniować za pomocą każdej z nich koniunkcję, można zdefiniować implikację za pomocą alternatywy z negacją, itd. Są to związki, które rzucają wiele światła na sens odpowiadających danym funktorom spójników języka naturalnego. Także na tej drodze teoria logiczna rozwija naszą samoświadomość co do potencjału logicznego ludzkiego umysłu, zwłaszcza gdy jest on wyposażony w należycie rozwinięty język.

4. Algorytmiczne kryterium niezawodności wnioskowania

4.1. Algorytm zerojedynkowy dla praw logiki. Pojęcie algorytmu, choć etymologią sięga arabskiego średniowiecza, objawiło swą doniosłość dzięki współczesnej logice (dodajmy, na jej styku z matematyką). Jej historycznym osiągnięciem jest udowodnienie, że nie wszystkie zagadnienia są rozstrzygalne, nawet gdy idzie o zagadnienia matematyczne; tym bardziej należy to odnieść do problemów nauk empirycznych, a w szczególności humanistyki. Mówimy o jakimś zagadnieniu, że jest **nierozstrzygalne**, gdy nie istnieje dlań metoda rozwiązania zwana algorytmem.

Algorytm jest to zbiór przepisów określających czynności natury mechanicznej, które należy w podanej kolejności wykonać, żeby w skończonej liczbie kroków rozwiązać należący do określonej klasy problem.[10] Algorytm ustala precyzyjnie obiekty, na których

---

[10] Czynnością natury mechanicznej jest wykonanie poleceń takich, jak:
— wpisz symbol o takim a takim kształcie (np. „0") w to a to (oznaczone numerem) miejsce;
— wymaż symbol będący w tym a tym miejscu.
Tego rodzaju polecenia, precyzyjnie określone przez Alana Turinga, wykonuje komputer cyfrowy. Z pomocą wymazywania i wpisywania dokonujemy przekształacania jednych napisów w inne, a na takich przekształceniach polega mechaniczne rachowanie czy mechaniczne dowodzenie twierdzeń. I tak, algorytm na mechaniczne (jak mówią dzieci „w słupkach") dodawanie służy do rozwiązywania nieskończenie wielkiej klasy prolemów podpadających pod schemat: $x + y = ?$. Algorytm zerojedynkowy dotyczy klasy problemów: czy formuła f jest tautologią?

mają być wykonywane działania oraz określa wyniki tych działań; wyniki są przyporządkowane jednoznacznie do obiektów działania czyli jego argumentów, mamy tu więc do czynienia z funkcjami (w sensie określonym wyżej, odc. 1.1; więcej na temat algorytmu – zob. ELF rozdz. XXI).

Autorzy próbujący uprzystępnić to pojęcie zwykli wskazywać na przepisy kulinarne jako na przykłady algorytmów. Istotnie, niektóre wskazówki, gdy są ujęte ilościowo (przygotować 1 kg. węgorza, jedną cytrynę itd.) lub gdy wymieniają bardzo konkretne czynności (zdjąć skórę, pokrajać na kawałki 6–8cm.), przypominają algorytmy obiektywnością i precyzją opisu. Ale gdy przepis kończy się zaleceniem „dodać soli i pieprzu do smaku” to mamy tu typowy przypadek problemu, który nie jest podatny na obiektywne rozstrzygnięcie (zresztą, sztuka kulinarna nie byłaby sztuką, gdyby wszystko załatwiały w niej algorytmy). Rozwiązanie otrzymane na drodze intuicyjnej, np. owego smaku, może być trafne (co pokazuje się nieraz po wyniku), ale pożądane jest, by tam gdzie to możliwe dysponować jakimś algorytmem. Eliminuje to bowiem ryzyko błędu i zarazem odciąża siły twórcze, które można wtedy lepiej skoncentrować na wymagającym tego odcinku. Dobrze jest więc, gdy w jakimś postępowaniu, na tyle skomplikowanym, że nie obejdzie się bez pomysłowości czy intuicji, pewne partie mogą być wykonane na podstawie algorytmów. Tak właśnie jest ze sztuką kulinarną. I tak ze sztuką rozumowania. Gdy idzie o tę drugą, zajmiemy się obecnie jej częścią algorytmiczną.

Algorytm zwany **zerojedynkowym** bierze tę nazwę od obiektów, na których jest wykonywany, owych zer i jedynek z tabel prawdziwościowych. Klasa problemów, do których rozwiązywania został stworzony wyraża się pytaniem: *czy dana formuła rachunku zdań jest prawem logiki?* Być **prawem logicznym rachunku zdań** — to być taką formułą zbudowaną ze zmiennych zdaniowych i funktorów prawdziwościowych, która jest prawdziwa przy każdym podstawieniu za zmienne.

Weźmy możliwie najprostszy przykład: formuła ‘$p \Rightarrow p$’ daje zdanie prawdziwe, cokolwiek by nie podstawić za ‘p’, czy będzie to prawda czy fałsz, np. ‘$x = x$’ lub ‘$x \neq x$’. Podobnie widać z miejsca, że każde podstawienie musi zaowocować zdaniem prawdziwym, gdy idzie o formuły takie ‘$p \vee \neg p$’ czy ’$\neg(q \wedge \neg q)$’. Z drugiej strony, jest oczywiste, że np. koniunkcja ‘$p \wedge q$’ nie jest prawem logicznym, bo z samej definicji (tj. z tabelki dla koniunkcji) widać, że istnieją podstawienia falsyfikujące, czyli czyniące formułę zdaniem fałszywym.

Ale przy formułach bardziej złożonych rozwiązanie wymaga namysłu. Wtedy tu przychodzi z pomocą algorytm zerojedynkowy. Prześledźmy go na przykładzie formuły:

(4.1). A $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q).$

Trzeba wykonać kolejno cztery podstawienia, bo tyle jest kombinacji tworzących różne układy z zera i jedynki. Kompletną listę takich podstawień dogodnie jest przedstawić w tabelce, której pierwsza kolumna podaje podstawienia za ‘p’, druga podstawienia za ‘q’, zaś trzecia wynik danego podstawienia (tj. z danego wiersza), który odpowiada na pytanie, jaka jest przy tych podstawieniach wartość logiczna formuły (4.1).1.

p	q	(4.1).A
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	—

Do wyników zarejestrowanych w powyższej tabelce prowadzą następujące obliczenia. Wynik w wierszu pierwszym powstaje kolejno z podstawienia wartości 1 za 'p' i 1 za 'q' (krok 1), potem równoczesnego zastosowania tabelki TI do poprzednika i TN do następnika (krok 2), potem zastosowania tabelki TI do następnika (krok 3), wreszcie zastosowania tejże tabelki do rezultatu kroku trzeciego (krok 4).

(4.1). 1 $(1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (\neg 1 \Rightarrow \neg 1)$

(4.1). 2 $1 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0)$

(4.1). 3 $1 \Rightarrow 1$

(4.1). 4 1

Procedurę tę powtarzamy dla następnych wierszy z listy dotyczącej (4.1).A, co prowadzi do wyników wpisanych w trzeciej kolumnie tej listy. Na wierszu trzecim kończymy postępowanie (co symbolizuje nie wypełniony wiersz czwarty), bo skoro istnieje choćby jedno podstawienie, przy którym formuła przybiera wartość 0, to nie jest ona prawem logiki. Mamy więc już wynik, tym razem negatywny,

Istnieje **szybki algorytm zerojedynkowy** zwany czasem skrótową metodą zerojedynkową. Stwarza on możliwość, żeby odrazu, bez pedantycznego wypełniania kolejnych wierszy, znaleźć to wartościowanie formuły implikacyjnej, przy którym, jeśli nie jest ona prawem logiki, przybiera wartość 0; nazwijmy je wartościowaniem krytycznym.[11]

Gdy formuła *nie jest* prawem logiki, wartościowanie krytyczne jest tym, które ją falsyfikuje. A jeżeli *jest* prawem logiki, to jest prawdziwa także przy wartościowaniu krytycznym; wtedy próba falsyfikacji formuły biorąca się z przyjętego (tymczasowo) założenia o jej fałszywości rodzi sprzeczność. Sprzeczność jest widoczna w tym, że w toku wartościowania trzeba którejś ze zmiennych przypisać w jednym miejscu jej występowania wartość 1, a w innym miejscu 0. Skoro założenie o istnieniu wartościowania falsyfikującego prowadzi do sprzeczności, to nie istnieje wartościowanie falsyfikujące. A to znaczy, że formuła staje się prawdziwa przy każdym wartościowaniu, a więc jest tautologią czyli prawem logiki.

[11] W sprawie pojęcia wartościowania zob. wyżej 1.2, ostatni akapit. Co do określania pewnych algorytmów jako szybkie, to jest to sposób mówienia przyjęty w wyrosłym z logiki matematycznej dziale informatyki zwanym teorią złożoności algorytmicznej (inaczej, złożoności obliczeniowej; ang. *computational complexity*). Odróżniane od nich algorytmy powolne określa się bardziej technicznie jako te, które funkcjonują w czasie wykładniczym, przy czym czas mierzy się liczbą kroków składających się na wykonanie algorytmu. Czas ten jest funkcją wykładniczą liczby danych wejściowych, którą jest w algorytmie zerojedynkowym liczba zmiennych (różniących się kształtem) w badanej formule. Podstawą potęgi jest pewna właściwa dla danego algorytmu liczba stała, która dla rachunku klasycznego wynosi dwa (ze względu na dwie wartości logiczne; inna będzie w nieklasycznych logikach wielowartościowych). I tak, dla jednej zmiennej liczba kroków (którym odpowiada liczba wierszy w tabelce) wynosi wynosi 2^1, dla dwóch zmiennych 2^2, dla trzech 2^3 itd. Istotnie, w pierwszym przypadku tabelka ma dwa wiersze (np. tabelka dla negacji), w drugim cztery, w trzecim osiem itd. Bywa, że dla pewnych technicznych zastosowań logiki liczba zmiennych wynosi kilkaset.

Zadanie znalezienia szybkiego algorytmu dla danego problemu, gdy dotychczas mamy tylko wolny, należy dziś do centralnych kwestii informatyki (za odkrycie, czy w każdym przypadku jest to możliwe, wyznaczono nagrodę miliona dolarów). Np. bezpieczeństwo danych elektronicznych (bankowych itd.) opiera się na fakcie, że nie ma dotąd szybkich algorytmów, którym udawałoby się łamać (w dostępnym czasie) kody szyfrujące. Jeśliby je kiedyś wynaleziono, powstanie problem stworzenia jeszcze mocniejszych algorytmów zabezpieczających. Wobec znaczenia tego rodzaju kwestii dla społeczeństwa informatycznego, powinny one wejść w szerokim zakresie do edukacji przyszłych socjologów. Obecny rozdział daje sposobność ukazania przynajmniej „rąbka” z tych najnowszych tajników informatyki.

Oto bardziej szczegółowy opis procesu wartościowania krytycznego na przykładzie formuły (4.1).A (dalej nazywanej A). Przyjmując założenie (które okaże się tylko tymczasowym, o ile doprowadzi do sprzeczności), że istnieje wartościowanie falsyfikujące A, wyprowadzamy z niego potrzebne nam wnioski. Takim wnioskiem jest, że A (jako fałszywa implikacja) ma prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Aby następnik był fałszywy, to — sam będąc implikacją — musi mieć prawdziwy poprzednik '$\neg p$' i fałszywy następnik '$\neg q$'. Skoro '$\neg p$' jest prawdą, to 'p' jest fałszem, a skoro '$\neg q$' jest fałszem, to 'q' jest prawdą. To samo wartościowanie, które czyni fałszywym następnik formuły A (1 za q i 0 za p) czyni prawdziwym jej poprzednik. I tak znajdujemy podstawienie falsyfikujące A.

Ta sama metoda pozwala na uzyskanie odpowiedzi pozytywnej, gdy formuła jest prawem logiki. Rozważmy formułę:

(4.1). B $\quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$

Załóżmy, że B nie jest prawem logiki. Wtedy ma prawdziwy poprzednik i fałszywy następnik. Ten z kolei, będąc fałszywą implikacją, ma prawdziwy poprzednik '$\neg q$' i fałszywy następnik '$\neg p$', z czego wynika, że 'q' jest fałszywe, a 'p' prawdziwe. Ale przy tych wartościach dla 'p' i 'q', poprzednik formuły B staje się fałszywy, co jest sprzeczne z pierwszym wnioskiem, który wysnuliśmy z naszego założenia o fałszywości B: że poprzednik jest prawdziwy.

Zdanie, z którego wynikają dwa sprzeczne między sobą wnioski musi być zdaniem fałszywym, ponieważ prowadzi do sprzeczności, a sprzeczność, będąc fałszem, nie może wynikać ze zdania prawdziwego. Zatem założenie wyjściowe jest fałszywe; a że głosi ono, iż B nie jest prawem logiki, to prawdą będzie jego zaprzeczenie, czyli to, że B jest prawem logiki. Ten rodzaj rozumowania nazywa się sprowadzeniem do sprzeczności lub (termin powszechniejszy) **sprowadzeniem do niedorzeczności**, co jest odpowiednikiem łacińskiego *reductio ad absurdum*.

Oprócz algorytmu zerojedynkowego istnieją inne metody badania, czy dana formuła jest prawem rachunku zdań. Jedna z nich, zwana sprowadzaniem do *postaci normalnej* ma także charakter algorytmiczny; omawianie jej nie mieści się w ramach obecnego tekstu, ale znając jej nazwę można znaleźć odpowiedni opis w literaturze, jak Borkowski [1970], Grzegorczyk [1981], ELF, III, 3.

Rachunek zdań można praktycznie stosować poprzestając na korzystaniu z wymienionych algorytmów, ale dla pewnych celów teoretycznych jest on konstruowany w postaci systemu aksjomatycznego (zob. np. Grzegorczyk [1981]). System aksjomatyczny jest to taki zbiór twierdzeń, w którym pewne twierdzenia przyjmuje się bez dowodu (np. na zasadzie oczywistości) i używa się ich jako przesłanek do dowodzenia wszystkich pozostałych twierdzeń. Zdania przyjęte bez dowodu nazywa się **aksjomatami** danego systemu.

Aksjomatyzując system logiki, przyjmuje się oprócz aksjomatów reguły wyprowadzania jednych twierdzeń z innych, zwane **regułami wnioskowania**, i za ich pomocą wyprowadza się z aksjomatów pozostałe prawa logiki. Przykład takiej metody, zastosowanej do innego działu logiki, rachunku predykatów, jest podany w pierwszym odcinku rozdziału czwartego, gdzie znajdzie się na ten temat więcej wiadomości.

4.2. Wynikanie logiczne a wnioskowanie. Poprzez pojęcie funkcji prawdziwościowej dochodzi się do pojęcia prawa logiki zdań — jako takiej funkcji, która przy każdej wartości argumentów przybiera wartość prawdy. Prawo logiki określa się też terminem **tautologia**, o tyle dogodnym, że łatwo urobić odeń termin abstrakcyjny 'tautologiczność' jako nazwę cechy charakteryzującej prawa logiki. Określeń tych używa się zamiennie, kierując się w wyborze charakterem kontekstu.

Pojęcie prawa służy z kolei do tego, by urobić pojęcie wynikania logicznego, a za jego pomocą wyrazić kryterium poprawnego wnioskowania dedukcyjnego. Wnioskowanie takie określamy (krócej) jako **niezawodne**, to jest ukształtowane według schematu, który zapewnia, że o ile przesłanki wnioskowania są prawdziwe, to i wniosek jest prawdziwy.[12]

Stosunek między prawem logiki a niezawodnym schematem wnioskowania jest następujący. Bierzemy pod uwagę te prawa logiki, które mają formę implikacji, a więc składają się z poprzednika i następnika.

Zamiast mówić, że formuła *N* jest następnikiem, a formuła *P* poprzednikiem jakiegoś prawa logiki, możemy mówić (krócej), że

N **wynika logicznie** *z P*.

Określenie to dotyczy również zdań będących podstawieniami odpowiednich formuł. Rozważmy formułę '$p \vee q$', która wynika logicznie z formuły '$p \wedge q$', ponieważ obowiązuje następujące prawo (co można sprawdzić metodą zerojedynkową):

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q).$$

Każde zdanie, które powstaje z podstawień dokonanych w następniku tego prawa wynika logicznie z odpowiednich podstawień dokonanych w jego poprzedniku. Np. ze zdania 'jestem zdrowy i jestem bogaty' wynika logicznie zdanie 'jestem zdrowy lub jestem bogaty' (wynikanie odwrotne nie zachodzi, co można sprawdzić zerojedynkowo).

Na **wnioskowanie** składają się przesłanki (jedna lub więcej) i wniosek. **Przesłanki** to te zdania, które uznajemy za prawdziwe i na ich podstawie wykazujemy prawdziwość **wniosku**. Podaną wyżej definicję wnioskowania niezawodnego, jako gwarantującego prawdziwość wniosku przy prawdziwości przesłanek, potrafimy obecnie wyposażyć w efektywne, bo oparte na algorytmie zerojedynkowym, kryterium niezawodności. Mianowicie wnioskowanie jest **niezawodne** wtedy i tylko wtedy, gdy jego *wniosek wynika logicznie z przesłanek*; to znaczy, przesłanki stanowią poprzednik, a wniosek następnik w stosownym podstawieniu jakiegoś prawa logiki.

Prześledźmy na konkretnym przykładzie, jak funkcjonuje to kryterium niezawodności wnioskowania. Niech przesłanką będzie zdanie, które wypowiedział w średniowieczu pewien filozof o innym, uczeń o swym mistrzu imieniem Robert, że ów *mistrz wiedział wszystko o Kosmosie* (zdanie *w*), gdyż *znał matematykę* (zdanie *m*) i *znał fizykę* (zdanie *f*).

Przypuśćmy, że czytając ten tekst, (brzmiący w oryginale *potuit scire omnia quia scivit mathematicam et perspectivam*), ktoś dochodzi do wniosku, że gdyby nie było prawdą, że Robert wiedział wszystko o Kosmosie to nie byłoby prawdą przynajmniej jedno z dwojga: albo to, że znał matematykę, albo to że znał fizykę. W tym wnioskowaniu przesłanka ma formę zdania warunkowego, w którym warunek wystarczający jest wyrażany przez 'ponieważ', mianowicie:

(4.2). 1 $\quad (m \wedge f) \Rightarrow w.$

Wniosek jest także implikacją (utworzoną przez spójnik 'gdyby') mianowicie:

(4.2). 2 $\quad \neg w \Rightarrow (\neg m \vee \neg f).$

Czy jest to wnioskowanie poprawne? Jest, o ile jego schemat jest niezawodny. Czy jest niezawodny? Jest, o ile wniosek wynika logicznie z przesłanek. Czy wynika? Tak! Bo jego

[12] Nie wszystkie wnioskowania uprawiane w nauce mają tę właściwość, pozbawione są jej np. wnioskowania statystyczne; nie są one jednak przedmiotem logiki formalnej, tzn. teorii, której trzon stanowią rachunek zdań i logika predykatów. W sprawie wnioskowań statystycznych zob. MEL (art. pod tym tytułem) i ELF, XLV.

przesłanka jest poprzednikiem, a wniosek jest następnikiem w odpowiednim podstawieniu prawa logiki. Zapiszmy to prawo (traktując nasze litery mnemotechniczne jako symbole formuł składowych), jak następuje:

(4.2). 3 $((m \wedge f) \Rightarrow w) \Rightarrow (\neg w \Rightarrow (\neg m \vee \neg f))$.

To, że formuła (4.2).3 jest tautologią łatwo wykazać, posługując się algorytmem zerojedynkowym; ze względu na wielość kombinacji podstawień opłacalne jest tu zastosowanie metody skrótowej (przy trzech zmiennych i podstawianiu za każdą jednej z dwóch wartości jest tych podstawień 2^3).

Schematy wnioskowania zapisujemy w ten sposób, że oddzielamy wniosek od przesłanki (przesłanek) poziomą kreską albo, pisząc w jednej linii, oddzielamy wniosek trzema kropkami. Chcąc wyrazić, że jest to schemat ogólny, nie zaś taki, który opisuje jakieś konkretne wnioskowanie, używamy specjalnych umownych oznaczeń dla formuł; niech będą to (jak się często stosuje) wybrane do tego celu litery greckie.

Oto schemat wnioskowania, którego niezawodność jest zagwarantowana tym, że formuła reprezentowana przykładowo przez (4.2).3 jest tautologią.[13]

(4.2). 4 $((\varphi \wedge \phi) \Rightarrow \psi)\ \ zatem\ \ (\neg\psi \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\phi))$.

Pod ten sam schemat wnioskowania będzie podpadać takie np. rozumowanie. *Jeśli zna się teorię wnioskowania i teorię definicji, to zna się całą logikę. A zatem, jeśli się nie zna całej logiki, to nie zna się teorii wnioskowania lub nie zna się teorii definicji.* Słowo ‘a zatem’ (lub jakiś jego synonim) stanowi w języku polskim odpowiednik symbolu wyrażającego uznanie prawdziwości wniosku na podstawie uznania prawdziwości przesłanek.

Gdy zdarzy się nam rozumować w taki sposób, który nie znajduje usprawiedliwienia w jakimś niezawodnym schemacie wnioskowania, to do wykrycia tego faktu służy to samo kryterium niezawodności. Znajdujemy najpierw schemat dla naszego wnioskowania, przekształcamy go następnie na odpowiadającą mu formułę o postaci implikacji, wreszcie badamy, czy ta formuła jest prawem logiki. Dla praw rachunku zdań skutecznie w każdym przypadku rozstrzyga kwestię algorytm zerojedynkowy.

Postawmy np. pytanie, czy poprawne będzie wnioskowanie, którego schemat odpowiada następującej formule:

(4.2). 5 $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$.

Posługując się skrótową metodą zerojedynkową, szybko wykryjemy, że formuła ta jest falsyfikowana przez podstawienie zer za p i q oraz podstawienie jedynki za r. Istnieją więc podstawienia, przy których formuła ta staje się fałszywa, a zatem nie jest ona prawem logiki. By ukonkretnić ten wynik, można rozważyć podstawienia konkretnych zdań, np. te, które się złożą na następujące wnioskowanie. *Jeśli każdy (człowiek) ma 5 metrów wzrostu i każdy waży tonę, to istnieją ciała o masie tony. A zatem jeśli nie każdy ma 5 metrów wzrostu i nie każdy waży tonę, to nie istnieją ciała o masie tony.* Tego rodzaju przykład, służący do wykazania, że dana formuła nie jest spełniona dla wszelkich podstawień określamy mianem **kontrprzykładu**.

Przedstawiony wyżej zarys klasycznego rachunku zdań ma charakter elementarny. Więcej o jego własnościach można się dowiedzieć z pozycji: Borkowski [1970], Grzegorczyk [1981], Marciszewski (red.). [1987]. Rachunek zdań nie wyczerpuje całego bogactwa wnioskowań, które występują w naukach i w myśleniu potocznym. Przegląd i analiza innych form wnioskowania jest zadaniem następnych rozdziałów.

[13] Żeby nie był to tylko przykład, a formuła we właściwym znaczeniu, trzeba by użyć zmiennych zdaniowych, np. *p, q, r*, zamiast konkretnych zdań zapisanych skrótowo jako *m, f, w*.