Przypomnienie podstawowych pojęć

Mówimy, że formuła F jest **spełnialna**, jeśli istnieje taka dziedzina („możliwy świat”), że gdy pewne indywidua z tej dziedziny są wartościami zmiennych w F. a pewne relacje są tym, co oznaczają predykaty w F, to F jest w tej dziedzinie spełniona (co intuicyjnie można oddać powiedzeniem, że jest prawdziwa).

> Formuła $\forall_x \forall_z \exists_y (yRx \wedge zRy)$ jest spełnialna dziedzinie liczb ułamkowych ponieważ jest w niej spełniona przez nieskończenie wiele trójek liczb, gdy predykat „R” oznacza relację większości, np. przez trójkę liczb 3/5, 2/5, 4/5 będących, odpowiednio, wartościami zmiennych $y,\ x,\ z$. Nie jest natomiast spełnialna w dziedzinie liczb całkowitych, bo nie dla każdych dwóch liczb w tej dziedzinie istnieje między nimi liczba pośrednia co do wielkości; nie ma jej dla pary 1 i 2, pary 2 i 3 itd. W dziedzinie tej do spełnialnych należy formuła: $\exists_x \exists_z \exists_y (yRx \wedge zRy)$ przy tej samej jaki wyżej intepretacji predykatu „R” (podaj przykłady indywiduów, które ją spełniają).

Formuła jest **prawem logiki** czyli **tautologią** wtedy i tylko wtedy, gdy jej negacja nie jest spełnialna w żadnej dziedzinie.

> Tautologie nazywa się też **formułami uniwersalnie ważnymi**. Ten zwrot, utworzony na wzór niemieckiego *allgemeingültig* i angielskiego *universally valid*, mniej się przyjął w terminologii polskiej; warto jednak o nim pamietać, bo jego treść najlepiej oddaje istotę tautologiczności.

Stąd wniosek, że *gdy w jakiejś dziedzinie formuła nie jest spełnialna, to nie jest tautologią*.

Zadania zaliczeniowe

Zbadaj, które z poniższych formuł są takie, że ich negacje nie są spełnialne w żadnej dziedzinie, a które takie, że ich negacje są w jakiejś dziedzinie spełnialne.

[1] $\forall_x Px \Rightarrow Pa$ [2] $\Leftarrow$

[3] $Pa \Rightarrow \exists_x Px$ [4] $\Leftarrow$

[5] $\forall_x Px \Rightarrow \exists_x Px$ [6] $\Leftarrow$

[7] $\neg\forall_x Px \Rightarrow \exists_x \neg Px$ [8] $\Leftarrow$

[9] $\neg\exists_x Px \Rightarrow \forall_x \neg Px$ [10] $\Leftarrow$

[11] $\forall_x (Px \wedge \forall_x Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \wedge \forall_x Qx)$ [12] $\Leftarrow$

[13] $\exists_x (Px \wedge \forall_x Qx) \Rightarrow (\exists_x Px \wedge \exists_x Qx)$ [14] $\Leftarrow$

[15] $\forall_x (Px \vee \forall_x Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \vee \forall_x Qx)$ [16] $\Leftarrow$

[17] $\exists_x (Px \vee \forall_x Qx) \Rightarrow (\exists_x Px \vee \exists_x Qx)$ [18] $\Leftarrow$

[19] $\forall_x (Px \Rightarrow \forall_x Qx) \Rightarrow (\forall_x Px \Rightarrow \forall_x Qx)$ [20] $\Leftarrow$

[21] $\forall_x (Px \Rightarrow \forall_x Qx) \Rightarrow \neg\exists_x (Px \wedge \neg Qx)$ [22] $\Leftarrow$

[23] $\exists_x (Px \wedge \neg Qx) \Rightarrow \neg\forall_x (Px \Rightarrow Qx)$ [24] $\Leftarrow$

[25] $(Pa \wedge \neg Qa) \Rightarrow \neg\forall_x (Px \Rightarrow Qx)$ [26] $\Leftarrow$

[27] $\forall_x (Px \Rightarrow \forall_x Qx) \Rightarrow \forall_x (Px \wedge Sx \Rightarrow Qx)$ [28] $\Leftarrow$

[29] $\forall_x \forall_y Rxy \Rightarrow \forall_y \forall_x Rxy$

[30] $\exists_x \exists_y Rxy \Rightarrow \exists_y \exists_x Rxy$

[31] $\exists_y \forall_x Ryx \Rightarrow \forall_x \exists_y Rxy$ [32] $\Leftarrow$