2. Logika samorodna w języku naturalnym

2.4. Kwantyfikatory ogólny i egzystencjalny, ich wzajemne stosunki

H • Kwantyfikator ogólny służy do tworzenia zdań ogólnych omawianych w odcinku 1.2.1, punkt D. Najprostszą odmianą zdania ogólnego jest wypowiedź o wszystkich elementach pewnego zbioru, niekiedy będącego tylko w domyśle. Np. w języku polskim słowo „każdy” w rodzaju męskim wskazuje domyślnie na zbiór ludzi, jak w zdaniu „każdy bytuje w czasie i przestrzeni” (choć takie bytowanie przysługuje nie tylko ludziom, jego odniesienie do szerszego zbioru wymaga innego zwrotu, np. „każdy obiekt”); słowo zaś „każda” wskazuje domyślnie na zbiór kobiet. Elementy takiego branego pod uwagę zbioru przyjęło się w logice symbolizować literami x, y, z, x_1, x_2 etc, które określamy terminem: **zmienne indywiduowe**.

Odpowiednikiem polskich słów wyrażających ogólność jest w logice symbol zwany kwantyfikatorem ogólnym o kształcie $\forall_{...}$, gdzie w miejscu kropek występuje jakaś zmienna indywiduowa; wskazuje to, że dany kwantyfikator odnosi się do przedmiotów, które w formule po nim następującej są reprezentowane przez zmienną o tym samym kształcie. np.

[1] $\forall_x(x\ bytuje\ w\ przestrzeni)$.

Zbiór wszystkich przedmiotów, który w jakichś rozważaniach mamy na uwadze przy stosowaniu kwantyfikatorów nazywa się zbiorem uniwersalnym lub **uniwersum** owych rozważań. Uwaga: *formuły z kwantyfikatorami mają określony sens dopiero wtedy gdy jest wiadome uniwersum*. I tak, zdanie 1 ma inny sens, gdy za uniwersum weźmiemy zbiór ludzi, a inny gdy zbiór ciał niebieskich. Przyjmuje się konwencję reprezentowania formuł literami greckimi ϕ, ψ etc. Oto, w tej konwencji, zdanie stwierdzające coś o danym uniwersum: $\forall_x \phi(x)$.

J • Kwantyfikator egzystencjalny postaci $\exists_{...}$ zwany też szczegółowym służy do stwierdzania, że istnieją przedmioty spełniające warunek określony daną formułą, mianowicie: $\exists_x \phi(x)$. W polskim używamy do tego celu zwrotów takich jak w zdaniach „istnieją szamani” lub (równoznacznie) „niektórzy są szamanami”, „pewni ludzie są szamanami” itp.

Jak kwantyfikator ogólny (i jego polskie odpowiedniki) daje skondensowaną do jednego symbolu koniunkcję (por. odc. 1.2.1, punkt D), tak kwantyfikator egzystencjalny daje skondensowaną alternatywę. Weźmy uniwersum $\{1, 2, 3, 4\}$ (stosując konwencję, że między klamrami wylicza się elementy zbioru) oraz formułę: *x jest liczbą pierwszą*, w skrócie $P(x)$. O tym uniwersum prawdą jest alternatywa:

[2] $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$

gdyż prawdziwy jest przynajmniej jeden z jej członów. Skrótowym zapisem tej alternatywy jest zdanie egzystencjalne:

[3] $\exists_x P(x)$.

Podobnie jak można, pomagając sobie negacją, zdefiniować alternatywę przez koniunkcję, zaś koniunkcję przez alternatywę (zob. odc. 1.2.2, punkt F) tak, odpowiednio, daje się zdefiniować (z pomocą negacji) kwantyfikator egzystencjalny przez ogólny, a ogólny przez egzystencjalny. Zależność ta występuje w polskim na tyle wyraziście, że ograniczymy się do jej reprezentacji w symbolice logicznej.

[4] $\exists_x \phi(x)$ można zastąpić przez: [5] $\neg\forall_x \neg\phi(x)$
(taka zastępowalność pozwala użyć wyrażenia dłuższego do zdefiniowania krótszego).

[6] $\forall_x \phi(x)$ można zastąpić przez: [7] $\neg\exists_x \neg\phi(x)$.

Uzyskujemy stąd kilka reguł wnioskowania: z 4 wolno wywnioskować 5 i odwrotnie, a z 6 wolno wywnioskować 7 i odwrotnie. Pochodne od nich będzie kilka kolejnych reguł wnioskowania.

Sens kwantyfikatorów uwidocznia się też w rozumowaniach ze zdaniami atomowymi. Przy takim uniwersum jak przyjęto wyżej dla formuły 2, prawdziwe jest zdanie: $\forall_x(x < 5)$. Wolno zeń wywnioskować zdania atomowe $1 < 5$, $2 < 5$ itd. Z każdego zaś z takich zdań wolno wywnioskować: $\exists_x(x < 5)$.