Zbigniew Król

Zakład Teorii Poznania i Filozofii Nauki
oraz
Zespół Badań Nad Filozofią Antyczną i Historią Ontologii
Instytut Filozofii i Socjologii P.A.N.
Warszawa

School of Knowledge Science
Japan Advanced Institute of Science and Technology,
Nomi, Ishikawa, Japonia[1]

Rozwój pojęcia zbioru.

Niestety nie mogę uczestniczyć osobiście w dzisiejszej sesji, dlatego też – za uprzejmą zgodą Organizatorów - zdecydowałem się dostarczyć dwa teksty na jej potrzeby. Jeden dłuższy, w którym omawiam istotne punkty dotyczące historycznego procesu tworzenia się pojęcia zbioru i drugi, przeznaczony do odczytania i zawierający uzupełniające wyjaśnienia, które tłumaczą, gdzie w rozwoju pojęcia zbioru ujawniają się czynniki kulturowe. Być może w ten sposób będę mógł wziąć udział w dyskusji, gdyż obydwa teksty dostarczają odpowiedzi na pewne wątpliwości, które moim zdaniem mogą powstać u słuchaczy. Wystarczającym warunkiem takiej dyskusji jest jednak uprzednia znajomość obydwu tekstów.

Na początku wyjaśnię w skrócie moje stanowisko odnośnie do kulturowych uwarunkowań rozwoju pojęć logiczno-matematycznych. Przede wszystkim, pomimo istnienia takich uwarunkowań, nie jestem w najmniejszym nawet stopniu „kulturowym wariabilistą” w tej kwestii. Przez „kulturowy wariabilizm” rozumiem taką formę historyzmu, która twierdzi, że pojęcia matematyczne albo w ogóle nie istnieją, albo *anything goes* odnośnie ich zawartości, tj. że nie posiadają one żadnej „sztywnej istoty”, ich treść może być całkowicie dowolnie określona – jak w przypadku fikcyjnych postaci czy zdarzeń literackich – oraz, że konkretna ich zawartość jest rezultatem *jedynie* zewnętrznych uwarunkowań historyczno-kulturowych. Brak posiadania „sztywnej istoty” mogę roboczo wyjaśnić używając terminologii R. Ingardena, w której tego typu twory nazywane są „przedmiotami czysto intencjonalnymi” i są przeciwstawiane „ideom”, które posiadają „logiczną” istotę.

Moim zdaniem, nawet jeśli nie istnieje wspomniana „sztywna istota” pojęć matematycznych, przez co rozumiem, że zawartość takich pojęć może być określana w dużym stopniu konwencjonalnie, to jednak, jeśli już została ona określona i pomyślana, to istnieje (idealna) możliwość pomyślenia jej („uchwycenia”, „ujęcia”, intelektualnego odtworzenia) w dokładnie *tym samym sensie* przez dany podmiot świadomy (osobę) w „innym czasie” oraz przez inne podmioty świadome. Możliwość uchwycenia „tego samego sensu” jest warunkiem jakiegokolwiek rozumienia. Bez tej możliwości, która realizuje się także w dowolnej pracy intelektualnej jednej i tej samej osoby – nie istnieje nie tylko nauka, ale także kultura. Bez tej możliwości nie bylibyśmy w stanie kontynuować naszych wcześniejszych „myśli”, na przykład dotyczących wyników pracy z dnia wczorajszego lub sformułowanych choćby tylko przed chwilą. Podobnego zdania byli Gottlob Frege i Edmund Husserl.

[1] The grant from the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS), as well as the resulting opportunity created by Prof. Yoshiteru Nakamori to do my work on mathematical intuition and rational foundations of knowledge creation in the Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST) are gratefully acknowledged.

Możliwość uchwycenia tego samego sensu dokonuje się prawie automatycznie w danej epoce historycznej lub pomiędzy ludźmi z tego samego kręgu kulturowego. Inaczej jest natomiast z rozumieniem i uchwyceniem sensu dzieł z dawnych, minionych epok, na przykład *Elementów* Euklidesa. Okazuje się, że wtedy potrzebna jest rekonstrukcja takiego sensu. W wyniku rekonstrukcji odsłaniają się nieuświadomione determinanty uchwycenia „tego samego sensu" pojęć. Tworzą one zwartą strukturę, która nie pozwala na traktowanie poszczególnych pojęć w oderwaniu, czyli jako zamkniętych w sobie, idealnych całości znaczeniowych. Strukturę taką nazywam „horyzontem hermeneutycznym".

Jest zdumiewającym faktem, ciekawym nawet jako jedynie teoretyczna możliwość, że tekst *Elementów* Euklidesa może być rozumiany w całkowicie różnych „modelach intuicyjnych". W dzisiejszych czasach, większość czytelników, zarówno zawodowych historyków matematyki i matematyków, jak i uczniów w szkole podstawowej, czytając *Elementy* będzie rozumiała i dowodziła podane tam twierdzenia w całkowicie innym zestawie wyobrażeń i intuicji niż te, których zapewne używał Euklides. Na przykład, w nieuświadomiony sposób – nieuświadomiony w tym sensie, że nie widać innej możliwości, nieświadomy jest więc mimowolny wybór („rozdwojenia", o których mówię w tekście pierwszym) – dla otrzymania naturalnej „bazy intuicyjnej" dla rozumienia tekstu, umieszczamy całość rozważań w nieskończonej przestrzeni „euklidesowej". Proste i płaszczyzny także uznamy za nieskończone, a odcinki i figury za posiadające liczbowo wyrażalne długości i pola. Dodatkowym elementem będzie intuicyjnie domniemana ciągłość „przestrzeni", rozumiana jednak jako ciągłość zbioru złożonego z punktów. Na przyjęcie tego wszystkiego pozwala stosowanie współczesnych pojęć matematycznych (takich jak liczba rzeczywista, pojęcie pierwiastka, etc.) i współczesnej notacji algebraicznej do wyjaśniania „archaicznych" dowodów Euklidesa, jak to czynią wszyscy znani mi badacze i historycy matematyki. Pomijam fakt, że możliwość przeprowadzenia tego wszystkiego zakłada ponadto kumulatywny model rozwoju wiedzy matematycznej.

Jeśli gdzieś pojawiają się ewidentne trudności w zrozumieniu tekstu, tłumaczy się to jego uszkodzeniem, „archaicznością" lub naiwnością autora. Spróbujmy jednak sami podać definicję „punktu", „prostej" czy „przestrzeni" nie odwołując się do żadnych istniejących teorii matematycznych, lecz starając się tylko wyjaśnić, co faktycznie jest domniemane w naszej intuicji intelektualnej w zawartości tych pojęć. Przekonamy się wtedy, że starożytne definicje (np. „punktem jest to, co nie ma części") nie są naiwne ani prymitywne.

Przedstawione w *Elementach* teorie matematyczne, nie są także bynajmniej *jedną* teorią, lecz stanowią konglomerat szeregu, często całkowicie różnych i różnego autorstwa teorii, które starają się podać rozwiązania kilku podstawowych trudności matematycznych, przed jakimi stała matematyka starożytna, powstałymi głównie w wyniku odkrycia przez pitagorejczyków niewspółmierności. Tylko odtworzenie i zrekonstruowanie tych problemów i wyraźne określenie podstawowych środków dostępnych dla matematyka starożytnego wraz z ustaleniem tego, co było dla niego „automatycznie oczywiste", a więc „postawienie się" w jego sytuacji kulturowej i intelektualnej, pozwala zrozumieć istotę jego zamiarów i sposób ich realizacji.

Po świadomej i metodycznej rekonstrukcji starożytnego horyzontu hermeneutycznego dla ówczesnej matematyki, możemy uprawiać matematykę starożytną, tak jak uprawialiby ją Euklides, Teajtet czy Apoloniusz. Podałem przykład takiej teorii, stanowiącej drugą „niespisaną" przez Euklidesa część X księgi *Elementów.* W analogiczny sposób człowiek współczesny, nawet uczeń, może odkrywać twierdzenia geometryczne, na przykład, że średnica dzieli okrąg na połowy (najstarsze znane nam udowodnione przez Talesa twierdzenie geometryczne) lub własności trójkątów, bez żadnej świadomości, że Euklides podał identyczne dowody. Horyzont hermeneutyczny nie jest teoretyczną konstrukcją, lecz możemy doświadczyć jego działania w najprostszych aktach intelektualnych. Jest to struktura ontologiczno-fenomenologiczna.

W wyniku rekonstrukcji horyzontu dla matematyki starożytnej okazało się, że geometria w *Elementach* jest tworzona w innym środowisku intuicyjnym, niż to, którego doświadczamy współcześnie umiejscawiając nasze trójkąty, odcinki, proste i okręgi na scenie nieskończonych płaszczyzn i w nieskończonej przestrzeni. Jeśli więc dzisiaj, rozumiemy pojęcia geometryczne w inny sposób i taki inny sposób ich rozumienia istnieje choćby tylko jako możliwość teoretyczna, oznacza to, że wybór takiego modelu intuicyjnego jest uwarunkowany nie tylko matematycznie.

Domyślam się, że koncepcja horyzontu hermeneutycznego, jego „tajemniczej" ewolucji wraz z rozważaniami o ilości pojęć intuicyjnych zbioru, może być traktowana jako niepotrzebny i nieścisły wymysł. Dlatego, dla potrzeb tego wystąpienia muszę dodać kilku słów wyjaśnienia jak odbywa się rekonstrukcja horyzontu dla matematyki starożytnej.

Najpierw, z dostępnych źródeł historycznych można uzyskać listę podstawowych intuicji, wyobrażeń i dozwolonych intuicyjnych operacji. Dla matematyki sprawa jest o tyle ułatwiona, że matematyka sama – zwłaszcza starożytna - jest analizą horyzontu hermeneutycznego w danej epoce. Wspomniana lista obejmuje więc, na przykład, możliwość połączenia dowolnych punktów linią prostą, możliwość wykreślenia okręgu w dowolnym punkcie i dowolnym odcinkiem, możliwość przedłużania odcinka w jedną lub w dwie strony, możliwość dzielenia odcinka itp. Jeśli w *Elementach* nie ma pojęcia przestrzeni, nieskończonej prostej i płaszczyzny, to nie znajdą się one na liście. Szybko okaże się, że istnieją różne listy dla matematyki starożytnej charakterystyczne dla różnych źródeł, oraz że, na przykład, pojęcia nieskończone lub metryczne mogą występować w czasach przed Euklidesem i po Euklidesie. Pojęcie „listy" zbytnio upraszcza sprawę i, oczywiście, nie jest jedyną stosowaną w rekonstrukcji metodą, ale nie mogę wchodzić tu w szczegóły. Dodam jedynie, że kolejną metodą jest poszukiwanie „miejsc niedookreślenia" danych teorii (należą tu m.in. ukryte założenia) oraz znajdowanie nowych i dobrze określonych problemów matematycznych, których nie dostrzegają i nie rozwiązują istniejące w źródłach teorie.

Przykładem tego jest rozważenie problemu zamiany linii podstawowej w X i XIII księdze *Elementów*. Okazuje się, że jest to dobrze określony problem matematyczny i można udowodnić cały szereg nowych twierdzeń, które uzupełniają starożytne księgi. Uzyskuje się także twierdzenia „brakujące" w tych księgach. Pojawia się wtedy możliwość rozważenia, dlaczego żaden matematyk starożytny nie zajął się tym interesującym problemem matematycznym. Poszukując odpowiedzi posługujemy się tylko metodami zgodnymi z naszą listą. Widać wtedy wyraźnie, że zarówno do sformułowania jak i dowodzenia nowych twierdzeń konieczne jest użycie Cantorowskich całości o nieskończonych aktualnie zakresach, których brak na liście. Z innych twierdzeń wynika, że pewna grupa linii jest wyróżniona w *Elementach*, gdyż klasyfikacja nie jest niezmiennicza względem zamiany linii. Systematycznie, wraz z dowodami, przedstawiam to w swojej książce *Platon i podstawy matematyki współczesnej: pojęcie liczby u Platona*. W wyniku rekonstrukcji pojawia się szereg nowych pytań. Odpowiedź na nie doprowadza do zmiany zastanego obrazu matematyki starożytnej i umożliwia wykrycie *rzeczywistych* problemów z jakimi zmagał się matematyk starożytny; por. moja rekonstrukcję starożytnych teorii proporcji przedstawioną we *Wstępie do starożytnych teorii proporcji*.

Następnie, jedność horyzontu i wynikająca z niej *jedyność* pewnych pojęć intuicyjnych nie jest teoretycznym postulatem, lecz jest warunkiem możliwości utworzenia takich teorii pomostowych jak wspomniana teoria zamiany linii podstawowej, które *rzeczywiście* pozwalają porównać historyczne zmiany dokonujące się w matematyce, zachowując jednocześnie odrębność pojęciową zmieniających się teorii.

Nie mogę w tym miejscu dokładniej omówić przedstawionej szczegółowo w moich pracach rekonstrukcji horyzontu dla matematyki starożytnej, ani omawiać szczegółów starożytnego modelu intuicyjnego dla geometrii z *Elementów*. Wspomnę tylko, że u Euklidesa nigdzie nie występuje nieskończona prosta, płaszczyzna, ani przestrzeń. W największej objętościowo (ok. 1/4 tekstu całych *Elementów*), najdoskonalszej logicznie i najbardziej tajemniczej dla komentatorów, gdyż nie wiadomo nawet po co została napisana, X-tej księdze, geometria jest budowana przy założeniu istnienia nie „gotowej" przestrzeni i punktów, ale w oparciu o istnienie jednego wyróżnionego odcinka podstawowego i przyjęcie dozwolonych operacji na nim, takich jak przedłużanie w jedną lub w dwie strony i kreślenie okręgów przy pomocy uzyskanych linii.

Świat tworów geometrycznych budowany jest z tej jednej linii podstawowej tak jak świątynie greckie były wznoszone w oparciu o jedną linię, tzw. bazę kanonu w porządku danego stylu. Nie ma tam przestrzeni lecz nieokreślona i *nieograniczona* „rozpostartość", która rozrasta się w miarę przeprowadzania kolejnych konstrukcji. *Granicami* były punkty (dla linii), linie (dla powierzchni) i powierzchnie (dla brył), więc „pierwotną rozpostartość" należy rozumieć jako nie posiadanie granicy, a tym samych nie posiadanie *konkretnej* „wielkości". Nasza intuicja zbioru otwartego nie nadaje się do wyjaśnienia istoty „pierwotnej rozpostartości", czyli odpowiadającej (tj. uczestniczącej) w tzw. Diadzie zasadzie wielości w geometrii. Miejsca jest tylko tyle, że przyjęte elementarne konstrukcje z użyciem linii podstawowej są wykonalne. Pozwala to wytłumaczyć, uznane za śmieszne (*sic!*) lub niezrozumiałe przez badaczy „poprawki" i uściślenia dowodów z pierwszej księgi *Elementów* dokonywane przez Herona, Proklosa (i innych cytowanych przez niego matematyków) polegające, na przykład, na przeniesieniu punktu, który Euklides dla potrzeb konstrukcji umieszcza na zewnątrz trójkąta, do jego wnętrza, gdyż jest błędem, przyjęcie, że „jest (tam już) jakieś miejsce dostępne na zewnątrz" (Heron).

Ktoś może powiedzieć: dobrze, ale czy rzeczywiście możemy pomyśleć w inny sposób, na przykład pojęcie kwadratu, trójkąta lub koła?

Przykłady takiej możliwości podaję w swoim artykule *Intuicja i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu*. Tutaj przywołam dodatkowo przykład trójkąta, który *współcześnie* ma cztery boki i tylko trzy kąty w starożytnym modelu intuicyjnym. Jego istnienie wynikało z odmiennej od współczesnej definicji kąta, jako ograniczonego tylko przez linie skończone oraz braku „miejsca na zewnątrz" danej figury (opis i rysunek tego trójkąta można znaleźć w *Komentarzu Proklosa do pierwszej księgi Elementów*; por. s. 328-329 w wydaniu Friedleina). Dodatkowo, dla nas kąt jest określony przez *dwie* linie, a dla większości starożytnych przez *jedną* i *skończoną*, tzw. „złamaną". „Istotę" starożytnego pojęcia trójkąta tworzyła „trójkątność". Współcześnie jest to raczej „trójboczność". Z takich drobnych, umykających historykom różnic tworzy się horyzontalna odmienność między geometriami: starożytną a nowożytną i współczesną. Odnośnie do pojęcia koła, to – na przykład - Grecy nie znali pojęć „promienia” koła ani okręgu i nie posiadali oddzielnych terminów oznaczających promień.

Różnice tego typu nie sprowadzają się jedynie do umownych różnic definicyjnych, lecz dotyczą bardziej fundamentalnych spraw. Przykładowo, Dedekind stwierdza, że jedynym aksjomatem jakiego – jego zdaniem – brakuje w V księdze *Elementów*, zawierającej teorię proporcji Eudoksosa, tak, aby była identyczna z jego teorią liczb niewymiernych jest aksjomat ciągłości. Dedekind uznaje to za formalny brak ścisłości i nie przychodzi mu nawet do głowy myśl, że może w *Elementach* aksjomat ten nie mógł być sformułowany, gdyż byłby sprzeczny z innymi cechami geometrii starożytnej, takimi jak fakt, że nie ma tam przestrzeni, a punkty nie są „tworzywem”, z którego powstają figury i linie. Weźmy dla przykładu wypowiedzi Arystotelesa, że „Nic co jest ciągłe nie może być złożone z [rzeczy] niepodzielnych; na przykład linia nie może być złożona z punktów, [gdyż] linia jest ciągła a punkt jest niepodzielny” (*Fizyka)*, „Punkty nie mogą wytworzyć nic ciągłego jak na przykład linia, gdyż punkt nie może być ciągły z punktem” (*O powstawaniu i ginięciu*). Ciągłość tak zwanych „wielkości” oznaczała jedynie potencjalną nieskończoną możliwość dzielenia danej wielkości (geometrycznej, czasu). Grecy nie potrzebowali na to oddzielnego aksjomatu, gdyż nieskończona podzielność była dla nich własnością dowodliwą i wynikała z faktu niewspółmierności. (Pisze o tym wprost Proklos.) Gdyby bowiem wielkości nie były podzielne „w nieskończoność”, to istniałaby jedna wspólna miara dla nich. Punkty w takim kontinuum pojawiają się jako rezultat każdego podziału, a nie „tkwią tam” już uprzednio. Z każdego odcinka możemy zatem wybrać dowolnie wiele punktów, ale w każdym konkretnym wypadku jest ich tylko skończona ilość. Te intuicje są zdecydowanie bardziej bliskie koncepcji Brouwera, niż Newtona, Cantora i Dedekinda.

Kolejnym przykładem, jest użycie współczesnych pojęć liczby rzeczywistej i pierwiastka do analizy geometrii starożytnej. Pojawia się wtedy problem jak rozumieć znaczenie konstrukcji w matematyce starożytnej. Znany jest pogląd H. G. Zeutena, poparty tekstem *Komentarza* Proklosa, że konstrukcje spełniały rolę dowodów istnienia danego przedmiotu. Tymczasem inne i *rzeczywiste* powody ujawniają się, gdy uświadomimy sobie, że Grecy nie byli w stanie „obliczyć” długości danego odcinka średniego, bo nie były to dla nich żadne „liczby”. Mogli jedynie *skonstruować* odpowiedni odcinek. Dlatego konstrukcje były podstawowym narzędziem badawczym w przypadku badania „wielkości” (*megethos*).

Powtórzę raz jeszcze: z takich drobnych i przeoczonych różnic konstytuuje się horyzontalna odmienność między geometriami: starożytną a nowożytną i współczesną. W czasach dzisiejszych matematyk „mimowolnie” zacznie budować aksjomatyczne systemy sformalizowane sądząc, że jest to wynik dojrzałości teoretycznej oraz, że w zasadzie „nie ma innej rozsądnej możliwości”. Różnice horyzontalne pozwalają określić „styl” matematyki w danej epoce, który także jest częścią kultury. Inna sprawa, że kultura wcale nie musi być przeciwstawiona apriorycznej racjonalności, tak jak to się odbywa we współczesnym ewolucyjno-naturalistycznym horyzoncie, a czynniki kulturowe nie muszą być rozumiane wyłącznie jako jakieś „pozaracjonalne determinanty rozwojowe”. Moim zdaniem istnieje hierarchia takich czynników, w której czynniki racjonalne są najistotniejsze. Wiele zależy od wyjaśnienia istoty kultury.

Możliwe jest podanie formalnej aksjomatyzacji starożytnej geometrii, ale będzie ona od współczesnych, pochodzących od Hilberta i Tarskiego.

W drugim tekście zajmuję się, między innymi, sprawą istnienia jednego *vs.* wielu intuicyjnych pojęć zbioru. Jest to związane właśnie z kulturowymi determinantami rozwoju tego pojęcia, gdyż dane pojęcie ewoluuje w wyniku tzw. procesu intuicyjnej analizy pojęcia. Jeśli pojęć intuicyjnych jest wiele oznacza to, że mamy wielość niewspółmiernych ze sobą (w sensie zbliżonym do używanego przez Kuhna-Lakatosa) horyzontów. Przeczy to takim oczywistościom jak fakt istnienia „jednej matematyki" w dziejach, która jednak dana jest w wielu historycznych postaciach.

Rozwój danego pojęcia matematycznego jest podporządkowany pewnym zmianom w horyzoncie hermeneutycznym, które najczęściej wywoływane są przez czynniki kulturowe, chociaż czynniki kulturowe nie są odpowiedzialne za konkretną zawartość (sens, znaczenie) danego pojęcia. Schemat i prawidłowości rozwoju pojęcia intuicyjnego w ramach horyzontu hermeneutycznego przedstawiłem w pracach *The Emergencje of New Concepts in Science* oraz *Intuicja matematyczna i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu.*

W tym miejscu przytoczę tylko wypracowane tam pojęcie „zmiany horyzontalnej". W przypadku geometrii euklidesowej zmiana taką było wyłonienie się i zastosowanie w geometrii platońskiej koncepcji nieskończonej przestrzeni złożonej z punktów. Zmiana ta była wywołana przez czynniki kulturowe takie jak izolacja nauki średniowiecznej od oryginalnych źródeł greckich i pośrednictwo matematyki arabskiej w przekazie wiedzy matematycznej. Jednakże sama aprioryczna możliwość utworzenia i pomyślenia nieskończonej przestrzeni i innych tworów jako zanurzonych w niej, jest właśnie możliwością aprioryczną, a nie jedynie faktem kulturowym. Newton pisząc dzieła matematyczne poświęcone geometrii *Elementów* Euklidesa z punktu widzenia nieskończonej przestrzeni, nie był świadomy faktu, że jest to coś nowego, gdyż Euklides – znając pojęcie nieskończonej przestrzeni – świadomie i metodycznie wyeliminował je z geometrii! Jeśli zauważymy, że ciało na które nie działa żadna siła musi poruszać się ruchem jednostajnym i prostoliniowym, natychmiast spostrzeżemy, dlaczego nieskończone pojęcia geometryczne (a więc pewne *zbiory* aktualnie nieskończone) stały się *potrzebne*. Nie potrzebna natomiast stała się fizyczna realność „sfer niebieskich": epicykli, ekscentryków itp., które wcześniej musiały pośredniczyć w wywoływaniu i podtrzymywaniu ruchu i *dlatego* przyjmowano ich realne istnienie, (a nie dlatego, ze Grecy mieli „bujną wyobraźnię").

Jednym z powodów powstania fizyki Newtona i nauki nowożytnej było nieuświadomione ukonstytuowanie się nowego modelu intuicyjnego dla geometrii. Co ciekawe, model ten był znany już w starożytności; por. rewolucyjne i alternatywne do finityzmu Euklidesa definicje Apoloniusza nieskończonych powierzchni stożkowych (*Conica*) lub uwagi Proklosa o nieskończoności prostych równoległych. Model ten jednak zaniknął wskutek wspomnianej wcześniej izolacji nauki europejskiej i używania przez matematyków arabskich konsekwentnie tylko odcinków skończonych, o czym można przekonać się najlepiej analizując arabskie dowody V-tego postulatu Euklidesa o prostych równoległych (por. np. B. Rosenfeld *The History of Non-Euclidean Geometry*). We <u>wszystkich</u> pracach rozważa się tylko odcinki równoległe i konstruuje się ich skończone przedłużenia.

Ukształtowanie się nowego modelu intuicyjnego dla geometrii euklidesowej jest ściśle związane z ewolucją pojęcia zbioru i powstaniem współczesnej teorii zbiorów, gdyż zarówno pojęcie zbioru jak i nieskończonej przestrzeni są częścią *jednego* ewoluującego horyzontu hermeneutycznego. Przypomnę tylko, że to dopiero Cantor i Dedekind (ok. 150 lat temu) podali matematycznie doskonałe teorie pozwalające traktować linię prostą jako *zbiór* punktów i oś liczbową. Pierwszą definicję obiektów geometrycznych jako zbiorów punktów podaje B.

Bolzano w pracy *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elemetargeometrie* wydanej w Pradze w 1804 roku. Dzisiaj, nawet dziecko w szkole podstawowej potrafi intuicyjnie korzystać z tego zdumiewającego faktu. Wcześniej była to tylko horyzontalna hipoteza matematyczna.

Zilustruję to przykładem zaczerpniętym z matematyki starożytnej i pokazującym różnicę horyzontalną ze współczesnymi post-Cantorowskimi intuicjami geometrycznymi i ich związkiem z rozwojem pojęcia zbioru. Starożytni rozważali tzw. *topoi pros epiphaneia*, czyli „miejsca" (*loci*, *topoi*) na płaszczyznach (były też *loci* na bryłach). Tak więc, *locus* punktów, które oddalone są od danego punktu tak samo jak punkty graniczne danego odcinka na „płaszczyźnie", jest okręgiem. Dla nas oznacza to, że okrąg jest *zbiorem* punktów na płaszczyźnie spełniających pewną własność. Dla matematyka greckiego twierdzenie to miało inne znaczenie. *Locus* w omawianym przypadku jest okręgiem, który sam nie jest złożonym z punktów zbiorem, a twierdzenie mówi, że jeśli skonstruujemy punkt posiadający daną własność to będzie on leżał na pewnym (także skonstruowanym) okręgu. Dodatkowo pokazywano, że także na odwrót, jeśli wybierzemy jakiś punkt leżący na *tym* (tj. skonstruowanym) okręgu, to będzie on miał rozpatrywaną własność. Jeśli okrąg byłby zbiorem punktów, to oznaczałoby to możliwość dokonania aktualnie nieskończonej ilości czynności konstrukcyjnych, na przykład podziałów. Dlatego „twory" geometryczne były dla Greków jakościowo uposażonymi, wyobrażalnymi *przedmiotami* idealnymi, a za podstawowy element przyjęto (tylko w niektórych teoriach!) „pierwotną rozciągłość skończoną", czyli linię (odcinek) podstawową. Jeśli punkt byłby budulcem, to byłby także wspólną „miarą" wszystkich linii.

Na zakończenie, poruszę jeszcze sprawę istnienia „istoty" intuicyjnych pojęć matematycznych. Z uwagi na charakter tego wystąpienia odwołam się ponownie do koncepcji Ingardena przedmiotów idealnych, znacznie ją upraszczając. Ingarden wyróżnia w ideach „stałe" i „zmienne". Na przykład idea „kwadrat" jest określona jako „kwadratowość o *jakiejś* długości boków". Ta „istota" obecna jest w każdym konkretnym kwadracie. Tak więc, oprócz zwykłych momentów definicyjnych występują tam pewne „miejsca niedookreślenia". Te miejsca są jednak *jednego rodzaju*. Moim zdaniem, takich miejsc niedookreślenia jest znacznie więcej i tradycyjne podanie istoty, na przykład poprzez definicję, nie wystarcza do intersubiektywnego określenia istoty pojęcia, co widać szczególnie wyraźnie w przypadku epok dawniejszych. Miejscami niedookreślenia dla współczesnej idei kwadratu są, m.in. „ciągłość", „płaskość", „metryczność" (por. koncepcję Ingardena jako świadectwo podane *explicite*), „sztywność", „punktowość", „geometryczność" (por. nieokreśloność intensjonalną z tekstu uzupełniającego) i cały szereg innych. Próba ich określenia powoduje natychmiast, że odwołujemy się do pewnej szerszej struktury, na przykład jakiejś „geometrii euklidesowej", topologii etc. Dlatego, istota każdego pojęcia intuicyjnego, w tym pojęcia zbioru, jest określona także *implicite* w ramach szerszej struktury horyzontu hermeneutycznego. Z uwagi na istniejące „rozdwojenia" w horyzoncie wybór konkretnego determinantu jest najczęściej uwarunkowany <u>także</u> kulturowo.

Rozdwojenia, ukryte założenia, różne modele intuicyjne, nieokreśloność intensjonalna sformalizowanych teorii zbiorów i inne sprawy, o których piszę w tekście drugim, są właśnie miejscami, gdzie czynniki kulturowe mogą ujawniać i najczęściej ujawniają swoją rolę w rozwoju pojęcia zbioru i innych pojęć logiczno-matematycznych. Koncepcja horyzontu hermeneutycznego pozwala określić i badać te uwarunkowania w sposób ścisły, bez narzucania im żadnej apriorycznej struktury kulturowej. Czynniki kulturowe, które konkretnie wpływają na rozwój danego pojęcia mogą być bardzo różnorodnej natury i trzeba badać je w historycznych *case studies*.