Zbigniew Król

Zakład Teorii Poznania i Filozofii Nauki
oraz
Zespół Badań Nad Filozofią Antyczną i Historią Ontologii
Instytut Filozofii i Socjologii P.A.N.
Warszawa

School of Knowledge Science
Japan Advanced Institute of Science and Technology,
Nomi, Ishikawa, Japan[1]

Rozwój pojęcia zbioru.

I. Odkrycie pojęcia zbioru.

Użycie pewnych podstawowych pojęć matematycznych takich jak, pojęcie zbioru, nieskończoności, nieskończonej przestrzeni euklidesowej, których zastosowanie w czasach dzisiejszych jest czymś całkowicie oczywistym, wyłoniło się w wyniku bardzo długiego i skomplikowanego procesu historycznego. Możliwa jest racjonalna rekonstrukcja etapów tego procesu uzyskana za pomocą tzw. metody rekonstrukcji horyzontu hermeneutycznego. Poniżej pragnę przedstawić kilka nowych rezultatów wynikających z takiej rekonstrukcji.

Platon był historycznie pierwszym myślicielem, który w świadomy i metodyczny sposób utworzył i używał pojęcie zbioru. Pojęcie to pojawiło się w starożytności przy okazji próby podania definicji pojęcia liczby.

Platon posługuje się specyficznym pojęciem liczby. W starożytnej Grecji istniały trzy sposoby pojmowania liczby. Najstarszym, używanym jeszcze w Egipcie i Babilonii, było pojęcie liczby jako miary. Pojęcie liczby jako miary jest pojęciem hermeneutycznym, tzn. nie było ono nigdzie zdefiniowane *explicite*, lecz używane, a jego rekonstrukcja wyjaśnia podstawowe cechy i różnice w arytmetyce egipskiej, babilońskiej i greckiej.

Liczba jako miara to traktowanie dowolnej (w tym ciągłej) wielkości lub przedmiotu: odcinka w geometrii lub pewnej ilości wody, wina lub oliwy albo stada owiec, jako *jedności*. Ta jedność podlega dalszym operacjom, na przykład podziałom na określoną liczbę porcji. Jak wiemy ze źródeł, w Egipcie zajmowano się obliczeniami jak podzielić określoną ilość żywności pomiędzy pewną ilość robotników, aby wyżywić ich przez określoną liczbę dni.

W matematyce egipskiej, w przeciwieństwie do greckiej, znano ułamki i liczono głównie na nich. W zasadzie wszystkie ułamki w Egipcie były ułamkami o liczniku równym jedności. Odpowiadało to „traktowaniu jako jedności” wyjściowej wielkości do podziału. Zwróćmy uwagę, że za każdym razem *co innego* było tą jednością. Dlatego koncepcja ta była związana z pojęciem tzw. liczby zmysłowej u Platona. Podaję tu tylko ogólną charakterystykę pojęcia liczby jako miary i opuszczam cały – w zasadzie najbardziej istotny - kontekst pojęcia miary;

[1] The grant from the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS), as well as the resulting opportunity created by Prof. Yoshiteru Nakamori to do my work on mathematical intuition and rational foundations of knowledge creation in the Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST) are gratefully acknowledged.

por. Z. Król *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona*, Wyd. Rolewski, Toruń 2005.

Tymczasem, zdaniem Platona i wszystkich matematyków greckich, matematyka powinna być oparta na niezmiennej, zawsze takiej samej jedności. Matematyka kupców, rzemieślników i żołnierzy, czyli matematyka stosowana, nie jest właściwą matematyką. Dlatego greccy matematycy definiowali *explicite* pojęcie liczby. Dla większości z nich – i tak liczba jest definiowana w VII księdze *Elementów* (por. def. 1 i 2) i u Arystotelesa – liczba była *wielością* złożoną z identycznych jednostek-monad. Ale nie dla Platona. Dla Platona liczba jest pewną *jednością* złożoną z identycznych jednostek-monad.

Różnica jest pozornie bez większego znaczenia. Dlatego zapewne nikt nie zauważył jej fundamentalnych konsekwencji, a przede wszystkim tego, że kwestii czy liczba jest wielością, czy „jednością nad wielością" poświęcona jest w istocie dyskusja Arystotelesa z teorią idei Platona, zwłaszcza w *Metafizyce*.

Arystoteles twierdził, że do danej wielości (np. do trzech koni) nie dochodzi żadne *jedno* nad nimi. Liczba 3 jest zawsze związana z pewną dyskretną wielością niepołączonych i nieciągłych przedmiotów. Dlatego jest wielością złożoną z jednostek i wielością mierzoną przez jedność. Platon natomiast widział jedność liczby: jeśli liczba byłaby luźną wielością monad, to nie można powiedzieć czy w matematyce mamy do czynienia z liczbą 5, czy z dwoma liczbami: 2 i 3.

Matematyka współczesna przyznała rację Platonowi. Jego pojęcie liczby jest pewnym (nieekstensjonalnym) pojęciem zbioru. Dopiero G. Cantor, prawie 2500 lat później pokazał, że samo pomyślenie pewnej wielości jako jedności umożliwia ukonstytuowanie się pojęcia zbioru. Zbiór pojawia się tylko wtedy, gdy pewną wielość elementów potraktujemy jako jedność. Uświadomienie sobie tego faktu spowodowało powstanie współczesnej teorii mnogości.

Grecy systematycznie badali używanie pojęć o nieskończonych zakresach. Wyróżnili kilka rodzajów całości: całości (I) o określonej i skończonej ilości „elementów" pod pojęciem „jedność nad wielością określoną", całości (II) złożone z takich elementów, że na podstawie ściśle określonych procedur, tj. metod konstruowania, zawsze można wygenerować dla nich następny element (należały tu na przykład liczby, figury geometryczne i ogólnie: te rzeczy, o których orzekamy „poprzedzanie i następstwo"), oraz całości (III) złożone z aktualnie nieskończonej („gotowej") ilości elementów. Pierwszymi matematycznymi przykładami całości z rodzaju (II) były arytmetyczne pojęcia „parzystości" i „nieparzystości". W geometrii pierwszym przykładem użycia w naukowy sposób pojęć o nieskończonych zakresach typu (II) była klasyfikacja linii z X księgi *Elementów*, stworzona przez Teajteta.

Do czasów Teajteta i Platona nie operowano całościami typu (III) w matematyce. Dlatego właśnie Grecy nie rozważyli problemu zamiany odcinka jednostkowego w geometrii. Z naszego, współczesnego punktu widzenia, problem ten jest dobrze określony i można go badać. Pokazałem[2], że przy zamianie linii podstawowej inne linie klasyfikacji Teajteta zachowują się w ściśle określony sposób, chociaż czasem wypadają poza nią. Twierdzenia jakie podałem, dają się udowodnić tylko, jeśli operujemy całościami typu (III), na przykład całość drugiego rzędu „wszystkich linii *medial*".

[2] Por. *Platon i podstawy matematyki współczesnej …*, op. cit., część II.

Brak rozważenia problemu zamiany linii jednostkowej wskazuje, że Grecy nie mieli oczywistości w operowaniu całościami Cantora o aktualnie nieskończonych zakresach. Dla nas natomiast, jest oczywiste, że „bierzemy zbiór *N*" i wykonujemy na nim różne operacje, traktując go jako dobrze określony *przedmiot* matematyczny. Podobnie operujemy kwantyfikatorami ogólnymi o nieskończonych zakresach.

Geometria starożytna przedstawiona w *Elementach* Euklidesa, z powodu braku oczywistości w operowaniu całościami typu (III), była tworzona bez odniesień do pojęć infinitarnych: nieskończonej przestrzeni, prostej, płaszczyzny, asymptoty itp.[3] Była także nie tyle dedukcyjnym systemem aksjomatycznym, co geometrią konstruktywną. Chodzi tam nie o aksjomaty, ścisłe dedukcje i dowody twierdzeń lecz o pokazanie, co da się zbudować z danych elementów, np. z jednego danego w początku badania odcinka, „linii podstawowej" za pomocą określonych metod konstrukcji. Cały czas w dowodach z *Elementów* następuje odwoływanie się do własności innych niż stwierdzone w aksjomatach. O wiele bardziej rygorystycznie przestrzegana jest natomiast zamknięta lista dozwolonych konstrukcji. Wiemy, że taką listę wymyślił Platon. Dlaczego? Wyjaśniam to jako rezultat odkrycia niewspółmierności.

Mechanizm zamiany linii podstawowej na inną nie został rozważony w *Elementach*. Stąd i z faktu, że klasyfikacja linii niewspółmiernych Teajteta (głównego autora X księgi) nie jest inwariantna względem operacji zmiany linii podstawowej wynika, że geometria w centralnych księgach *Elementów* jest tworzona przez budowę geometrycznych tworów z wybranej w punkcie wyjścia, jednej linii podstawowej, jakby „najwyższej miary" w geometrii. Ta linia podstawowa jest ukrytym założeniem, które nazywam horyzontalnym. Takie założenia nie stanowią jakichś „logicznych detali", lecz zmieniają utrwalony przez wielowiekową tradycję sposób rozumienia *Elementów*. Przykładowo, uznawane za zwieńczenie matematyki Euklidesa twierdzenie, że „w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej" jest co najwyżej pięć wielościanów foremnych, dowodzi w rzeczywistości, że z jednej linii podstawowej da się skonstruować co najwyżej pięć wielościanów foremnych.

Mówię o modelach intuicyjnych geometrii euklidesowej, gdyż nieuświadomiona zmiana sposobu postrzegania geometrii *Elementów* i zanurzenie jej w niekonstruktywnym, infinitarnym środowisku była podstawowym warunkiem powstania nauki nowożytnej; por. Z. Król *The Emergencje of New Concepts in Science*, oraz *Intuicja matematyczna i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu*; 2006. Twórcy nauki nowożytnej i rachunku różniczkowego (Descartes, Newton, częściowo Leibniz) pisali dzieła poświęcone matematyce *Elementów* traktując jako rzecz samooczywistą to, że rozgrywa się ona w nieskończonej, ciągłej przestrzeni. Nie dostrzegali, że starożytna geometria jest inna. Ukonstytuowanie się nowego modelu intuicyjnego geometrii jednakże pozwoliło jej uwolnić się z ciasnych ram paradygmatu „cyrkla i linijki", rozwinąć geometrię analityczną, rachunek fluksji i w efekcie nową fizykę Newtona, gdzie wszystko odbywa się w absolutnej przestrzeni i czasie. Rozwój platonizmu jako metody badania doprowadził do powstania nauki nowożytnej.

Tradycyjnie uważa się, że geometria euklidesowa rozwijała się do początku XIX w. w stosunkowo niezmiennym infinitarnym modelu intuicyjnym. Mówi się nawet o tzw. micie Euklidesowym. Prawdziwą rewolucją i wręcz wstrząsem, było odkrycie geometrii

[3] Grecy znali pojęcia nieskończonej linii, płaszczyzny itd., ale te pojęcia typu (III) zostały w świadomy sposób usunięte z matematyki jako niejasne. Obiekty geometryczne nie są dla nich zbiorami punktów.

nieeuklidesowych, które pokazały nieapodyktyczność piątego postulatu Euklidesa. Tymczasem nowe ustalenia pokazują, że geometria starożytna była pomyślana jako projekt konstruktywny, obywający się bez pojęć infinitarnych, a w tym także bez pojęcia absolutnej i nieskończonej przestrzeni „euklidesowej". Właściwą i pierwszą rewolucją było ukonstytuowanie się – platońskiego w sensie stosowanych metod – infinitarnego i niekonstruktywnego środowiska dla uprawiania geometrii. [4] (Kontinuum starożytnych, linie, figury nie były złożone z punktów. Punkty pojawiają się w wyniku konstrukcji, na przykład jako miejsce przecięcia się dwóch linii.)

Centralna rolę w filozofii Platona odgrywa struktura „jeden nad wielością" (termin pochodzi od Platona). Każda idea jest „jednością nad wielością" uczestniczących w niej przedmiotów. Jeśli nie ma wielości nie ma też idei. Dlatego nie ma idei pojedynczych przedmiotów, np. Sokratesa. Jedynka nie była liczbą dla Greków, lecz zasadą liczb. Najmniejszą liczbą była „elementarna wielość", czyli liczba 2.

Jeśli liczba jest „jednością nad wielością" identycznych zasad-jedności i każda idea jest „jednością nad wielością" uczestniczących w niej przedmiotów, to jest jasne, dlaczego każda idea jest dla Platona *liczbą*. Każda idea uczestniczy bowiem w strukturze idealnej „jeden nad wielością", której archetypem jest właśnie struktura liczbowa.

Odkrycie niewspółmierności doprowadziło Platona do uznania, że istnieją dwa rodzaje przedmiotów idealnych: idee uczestniczące w liczbie idealnej, czyli „jedności nad wielością określoną" i przedmioty będące „jednością nad wielością nieokreśloną".

Przykładem jedności nad wielością nieokreśloną są odcinki, figury geometryczne i ogólnie, wszelkie wielkości przestrzenne. Należą tu także (por. *Fileb*) przyjemności i wszelkie wielkości, których może być „więcej lub mniej", a więc na przykład ciepłe i zimne, uczucia, odczucia zmysłowe etc. Platon odkrył dwa rodzaje wielkości, gdy okazało się w wyniku badań Teajteta, że arytmetyka nie redukuje się do geometrii, a więc, że „nie wszystko jest liczbą".

II. Kilka uwag o współczesnych koncepcjach zbioru.

Nie jest możliwe przedstawienie w ramach tego artykułu, nawet poprzez wyliczenie, wszystkich ważniejszych współczesnych koncepcji zbioru. Muszę ograniczyć się do najbardziej ogólnych i wybranych uwag dotyczących rozwoju *intuicji zbioru* (intuicyjnego pojęcia zbioru).

Fakt istnienia nierównoważnych z ZFC aksjomatyk pojęcia zbioru oraz, wynikająca z odkrytej w 1962 r. przez Paula Cohena metody *forcingu*, niezależność lub niesprzeczność z ZFC szeregu intuicyjnie jasnych własności, jakie mogą posiadać zbiory, wydawały się potwierdzać tezę o istnieniu wielu intuicyjnych pojęć zbioru. Andrzej Mostowski w 1965 r. stwierdził: (…) *there are several essentially different notions of set which are equally*

---

[4] Istnieje wiele prac, omawiających ewolucję pojęć nieskończonej przestrzeni w astronomii, filozofii czy teologii, żadna jednak nie odpowiada ściśle na pytanie, jak i dlaczego pojęcia te pojawiają się w geometrii. Grant, na przykład, cytuje opinię H. Weyla o braku pojęcia nieskończonej przestrzeni w *Elementach*, lecz więcej do tej sprawy nie wraca; por. E. Grant *Much ado about nothing. Theories of space and vacuum from the Middle Ages to the Scientific Revolution*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney 1981.

admissible as the intuitive basis for set theory.[5] W podobnym duchu wypowiadał się Georg Kreisel.[6] Prof. Mostowski cytuje O. Beckera[7] referującego dyskusję pomiędzy G. Cantorem i R. Dedekindem jako świadectwo posługiwania się, już na samym początku rozwoju współczesnej teorii zbiorów, różnymi intuicjami związanymi z pojęciem zbioru.

Dedekind porównywał zbiory do worków zawierających nieznane przedmioty, a Cantor do „otchłani". Intuicja Cantora wydaje się jednak lepiej pasować do tzw. *non-well-founded sets*, gdzie zbiory – oprócz struktur cyklicznych typu „$x \in x$" – złożone są tylko z elementów, które same są zbiorami i posiadają elementy. Rzeczywiście, tego typu „otchłań" nie ma „dna" i nigdy się nie kończy, gdyż „dno" mogą posiadać tylko niektóre odgałęzienia takich tworów. „Otchłań" Cantora (lub „raj Cantora") otwarta jest natomiast „ku górze".[8]

W początkowym okresie rozwoju teorii zbiorów wydawało się, że własność „bycia zbiorem" da się scharakteryzować poprzez dwa aksjomaty, tworzące tzw. rachunek idealny K[9]:

Aksjomat 1 (ekstensjonalności)[10]: Dwa zbiory są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.
Aksjomat 2 (komprehensji): Dla każdej własności *P* istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które posiadają tę własność.

Aksjomat 2 jest jednak sprzeczny. Mówi on o każdej własności, rozważmy więc własność *P* „bycia zbiorem, który nie zawiera siebie samego jako jeden ze swych elementów." Możemy teraz zapytać, czy zbiór odpowiadający tej własności, który istnieje na mocy aksjomatu 2, jest swoim własnym elementem. Jeśli jest swoim własnym elementem, to posiada własność *P* „niebycia swoim elementem". A jeśli nie jest swoim elementem, to musi posiadać własność nie-*P* „bycia swoim elementem". W obydwu przypadkach otrzymujemy sprzeczność.

---

[5] Por. *Problems In the Philosophy of Mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, volume I*. I. Lakatos ed. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967, s. 82.
[6] G. Kreisel *Informal rigour and completeness proofs*, s. 78-94, w: J. Hintikka ed., *Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, London 1969. Kreisel wyróżnia: 1. skończone zbiory indywiduów, tj. obiektów nie posiadających elementów, 2. zbiory złożone z "czegoś", (np. zbiory liczb, punktów) i 3. własności (intensje), gdzie nie możemy „z góry" określić ich ekstensji.
[7] Por. O. Becker *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwickelung*, München 1954, s. 316.
[8] Powszechnie znane są także odróżnienia pojęć zbioru w sensie kumulatywnym i dystrybutywnym; por. np. analizy S. Leśniewskiego. Por. także analizy D. Mirimanoff'a (*Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et de la problème fondamental de la théorie des ensembles*, L'Enseignement Mathématique 19, 1917, s. 37-52.
[9] Nazwa pochodzi od Hermesa i Scholz'a; por. H. Hermes, H. Scholz *Mathematische Logik*, w: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, B. G. Teubner, neubearb. 1952, Band I.
[10] Aksjomat ten sformułował Dedekind w 1888r.: „Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge a, b, c, ... aus irgend einer Veranlassung einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, dass sie ein System S bilden; sie sind enthalten in S; umgekehrt besteht S aus diesen Elementen. Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesammtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding; es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht. Das System S daher dasselbe wie das System T, in Zeichen S = T, wenn jedes Element von S auch Element von T, und jedes Element von T auch Element von S ist. F{\"u}r die Gleichfőrmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß ein System S aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element a besteht, d.h. dass das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten."; por. R. Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?*, vierte Aufsgabe, Friedrich Vieweg and Sohn, Braunschweig 1917, s. 1-2.

Jak powszechnie wiadomo, powstanie aksjomatycznych teorii mnogości jest próbą z jednej strony uniknięcia powyższej antynomii, a z drugiej zachowania jak największej ilości obiektów odpowiadających własnościom wyrażonym przy pomocy pojęć „zbiór”, „element” i „relacja należenia elementu do zbioru”.

Równie zaskakującą jak antynomiczność aksjomatu komprehensji okazała się możliwość sformułowania aksjomatyki pojęcia zbioru **bez** użycia pojęcia elementu i relacji należenia.[11] Oczywiście musimy wtedy posłużyć się innymi pojęciami, definiowalnymi w języku teorii kategorii, na przykład pojęciem toposu. Zbiór w takiej teorii jest obiektem posiadającym pewne, określone „z zewnątrz” własności, tzn. punktowy (nie posiadający struktury wewnętrznej) obiekt okazuje się być zbiorem, jeśli podlega pewnym relacjom z innymi punktowymi obiektami. Relacja „należenia do zbioru” jest modelowana poprzez funkcje z innymi obiektami: „elementy” mogą być „na zewnątrz” zbioru. Zamiast mówić o elementach i ich należeniu do zbioru, charakteryzujemy najogólniejsze własności wszystkich możliwych funkcji pomiędzy zbiorami.[12] Funkcje takie (morfizmy w kategorii) w przypadku funkcji pomiędzy zbiorami mają specyficzne własności: z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedna taka kategoria. Dodatkowo: dla pewnych typów toposów, opisanych w języku pierwszego rzędu, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy tranzytywnymi modelami ZFC, a modelami w toposach (pewnych) elementarnych teorii toposów.[13] Wydaje się więc, że nasze *intensjonalne* pojęcia, intuicje i wyobrażenia są bez znaczenia dla charakterystyki *logicznego rdzenia* pewnych struktur matematycznych, a w tym pojęcia zbioru.

Na przykład wiemy, że własność „dobrego uporządkowania elementów” nie podaje istotnej charakterystyki pojęcia zbioru, chociaż wydaje się dość oczywiste, że możemy z dowolnego „worka” lub „otchłani” zawierającej nieznane przedmioty, „wyciągać” je kolejno, aż do wyczerpania. Oczywiście, zawsze jakiś przedmiot będzie wyjęty jako pierwszy, inny jako drugi, itd. Intuicje te przyświecały pierwotnym dowodom (Cantor, Zermelo) twierdzenia, że *każdy* zbiór można dobrze uporządkować. Obecnie wiemy, że procedura taka oparta jest na aksjomacie wyboru, który jest niezależny od innych aksjomatów ZF oraz, że istnieją struktury będące w intuicyjnym sensie zbiorami, których nie da się dobrze uporządkować.

---

[11] F. W. Lawvere *An elementary theory of the category of sets*, Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A 52, 1964, s. 1506-1511.

[12] J. von Neumann chyba jako pierwszy (1925 r.), podał aksjomatykę pojęcia zbioru, gdzie pojęciem pierwotnym jest „funkcja”, a nie „zbiór”; por. J. von Neumann *An axiomatization of set theory*, w: J. van Heijenoort ed. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1951*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1967, s. 393-413.

[13] Por. np. G. Osius *Categorical set theory: a characterization of the category of sets*, Journal of Pure and Applied Algebra 4, 1974, s. 79-119. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasycznymi (teoriomnogościowymi) modelami systemu Z i dobrze-punktowymi, częściowo tranzytywnymi toposami. Z = ZF + Reg + TA + ATR: Z = system logiki pierwszego rzędu z identycznością + aksjomaty ekstensjonalności, zbioru potęgowego, pustego, pary, jedności i ograniczonej separacji. Reg = aksjomat regularności, TA = aksjomat tranzytywności, ATR = aksjomat tranzytywnej reprezentowalności. ZF = Z + inf + Reg + Rep, gdzie inf = aksjomat nieskończoności, Rep = aksjomat zastępowania. Aby skonstruować model w toposach wystarczy już system Z. Można przekształcić każdy model systemu Z w dobrze-punktowy topos. Równoważność modeli klasycznych i w toposach systemu Z, może być przekształcona w równoważność modeli dla systemu ZF (Zermelo-Fraenkela). Co więcej, istnieje też wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość modeli klasycznych ZC (Z + aksjomat wyboru) i dobrze-punktowych toposów spełniających ES (”epics splits” = kategorialna wersja AC; por. P. Freyd *The axiom of choice*, Journal of Pure and Applied Algebra 19, 1980, s. 103-125.

Czy rzeczywiście mamy wiele różnych *intuicyjnych* pojęć zbioru? A jeśli nie, to cóż *wspólnego* przysługuje wszystkim tym *formalnie różnym* koncepcjom zbioru, skoro nie jest to nawet własność posiadania elementów „wewnątrz” zbioru?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, nie możemy posłużyć się metodą Poincaré, której użył w dowodzie hipotezy Eulera. Po ponad 100 latach daremnych prób[14] podania definicji obejmującej wszystkie przypadki *intuicyjnego* pojęcia wielościanu, zdefiniował on wielościan jako dowolny twór, który jest określony przez trzy zbiory: zbiór wierzchołków, zbiór krawędzi i zbiór ścian, bez wnikania we wzajemne relacje pomiędzy nimi. Oczywiście, na mocy tego typu „definicji” wśród wielościanów pojawiają się też obiekty nie będące, z intuicyjnego punktu, widzenia wielościanami, jak na przykład dwa oddzielne kwadraty, czy odcinek. Jednakże, każdy *intuicyjny* wielościan znajduje się wśród zdefiniowanych przez Poincaré „wielościanów”.

Powyższa metoda jest zawodna w przypadku pojęcia zbioru, gdyż definicja zbioru, jako czegoś, co jest określone przez *zbiór* elementów, nie wystarczy.

Dodatkowym problemem jest brak modelu standardowego dla ZFC. Wskutek tego istnieje wiele różnych, intuicyjnych koncepcji zbioru, które mogą kierować budowaniem określonej klasy modeli. Są to, na przykład, modele tranzytywne (gdzie wymagamy, żeby razem z danym zbiorem należącym do modelu, należały do tego modelu wszystkie zbiory będące jego elementami wraz ze swoimi elementami, itd.), czy też uniwersum zbiorów konstruowalnych Gödla (V=L) lub modele iteracyjne. Wszystkie te koncepcje wydają się bardzo jasne z intuicyjnego punktu widzenia, ale w przypadku dowolnego ich formalnego opisu, zawsze istnieją inne, niezwykle ważne i intuicyjnie jasne własności (i odpowiadające im zbiory), które nie są dowodliwe przy użyciu środków dostępnych w tej formalizacji. Pomijam tu sprawę niesprzeczności ZFC: w rzeczywistości nie wiemy, czy teoria ta posiada choćby tylko *jeden* model. [15]

Innym faktem, przemawiającym za tezą o istnieniu wielu pojęć zbioru jest istnienie różnych i nierównoważnych z ZFC aksjomatycznych systemów teorii mnogości. Jednakże, niektórzy wybitni znawcy współczesnej teorii zbiorów, na przykład K. Gődel, uparcie poszukiwali jednego, fundamentalnego pojęcia zbioru. Na podstawie analizy intuicyjnej i fenomenologicznej takiego pojęcia, Gődel chciał utworzyć aksjomatykę podającą własności pojęcia zbioru oraz uzyskać jednoznaczną odpowiedź na pytanie o prawdziwość, bądź fałszywość hipotezy kontinuum.[16] Niezależność hipotezy kontinuum od ZF może oznaczać, że ZF nie podaje adekwatnej charakterystyki intuicyjnego pojęcia zbioru.

Rozważając sprawę istnienia jednego, intuicyjnie fundamentalnego pojęcia zbioru, należy jeszcze zbadać, czy w matematyce współczesnej istnieją jakieś powody uzasadniające konieczność użycia pojęcia „intuicyjnego” zbioru. Może wystarczy ograniczyć się do analizy różnych sformalizowanych teorii zbiorów wraz z ich modelami?

---

[14] Por. I. Lakatos *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, eds. J. Worrall, E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne 1976.

[15] W rozwiązaniu tej kwestii mogą pomóc modele intuicyjne, o których piszę poniżej. Warto dodać w tym miejscu, że różne formalizacje arytmetyki, mają co najmniej tę jedną, istotną przewagę nad ZFC, że wszystkie dotyczą *jednego* intuicyjnego pojęcia liczby naturalnej. PA posiada też model standardowy.

[16] Być może interesującym dla Czytelnika okaże się fakt, że podana na końcu tego artykułu „nowa intuicja zbioru”, dostarcza także nowej odpowiedzi na pytanie o prawdziwość hipotezy kontinuum.

Oprócz powszechnie znanych ograniczeń w formalnym opisie struktur matematycznych (twierdzenia limitacyjne), istnieje wiele innych. Od strony formalnej, nie ma natomiast żadnych ograniczeń, które wymuszałyby, aby ściśle sformalizowane języki odnosiły się *tylko* do obiektów matematyki takich jak zbiory, kategorie, toposy, struktury algebraiczne, etc. Równie dobrze ZFC czy geometria elementarna Tarskiego, może odnosić się do zupełnie innych *niematematycznych* obiektów. ZFC może, przykładowo, być „zakodowanym" przepisem sporządzania jakiejś potrawy. Przywołam w tym miejscu, rozwijany od około dwóch lat, program *concept calculus* H. M. Friedmana.[17]

Friedman zauważył, że można podać formalne teorie kodyfikujące własności dowolnych pojęć, w tym (dotychczas) niematematycznych, wziętych z języka potocznego. Na przykład, istnieje możliwość sformułowania aksjomatów dla teorii opisującej własności pojęć „lepszy niż" i „dużo lepszy niż" (*better than*, *much better than*), tzw. teoria T. Okazuje się, że ZFC i T są wzajemnie interpretowalne. Tak więc, T jest niesprzeczna wtw ZFC jest niesprzeczna. Dowód takiej relatywnej niesprzeczności angażuje niezwykle słabe środki dowodowe, dopuszczalne w pierwotnym programie Hilberta. Friedman podaje więcej przykładów *concept calculus*. Można także uporządkować teorie matematyczne biorąc pod uwagę relację „interpretowalności" (w sensie Tarskiego[18]) jednej teorii w drugiej. W przypadku teorii zbudowanych z jednego zdania otrzymujemy strukturę podobną do tzw. *Turing degrees*.[19]

Moim zdaniem, fakty te wskazują na *intensjonalną nieokreśloność* teorii sformalizowanych i są związane z analizą tzw. *modeli intuicyjnych* w matematyce. Wyjaśnię to na przykładzie systemu geometrii Euklidesowej płaszczyzny, podanym przez Tarskiego.

Teorie matematyczne, takie jak geometria Euklidesowa, posiadają pewne zamierzone interpretacje. W systemie Tarskiego zmienne przebiegają „punkty", u Hilberta punkty i pewne inne obiekty geometryczne, a w jeszcze innych formalizacjach mogą dotyczyć kół (np. E. V. Huntington) lub innych obiektów. Dla planimetrii Tarskiego zachodzi twierdzenie o reprezentacji, które mówi, że jeśli jakaś struktura jest modelem dla tej teorii, to jest izomorficzna z pewną strukturą algebraiczną. Z powodu intensjonalnej nieokreśloności teorii matematycznych, zamiast o punktach możemy mówić o dowolnych innych *przedmiotach*, na przykład o „stołach, krzesłach i kuflach do piwa" (Hilbert).

Model nazywam *intuicyjnym* jeśli posługujemy się dowolnymi *przedmiotami*, tj. takimi obiektami, które posiadają (przynajmniej niektóre) własności nie opisane *explicite* przez teorię, której model rozpatrujemy. Szczególną grupę takich modeli tworzą *intuicyjne modele matematyczne*, gdzie przedmiotami są obiekty definiowalne formalnie w innych teoriach matematycznych. Jeśli w geometrii Tarskiego zastąpimy „punkt" przestrzeni przez – powiedzmy – przestrzeń liniową, to otrzymamy przykład ostatniego typu modeli intuicyjnych. Można wtedy rozważyć problem, czy dla każdego takiego podstawienia istnieje niesprzeczne i „intuicyjnie sensowne" z matematycznego punktu widzenia, rozszerzenie danej teorii.[20]

---

[17]Prace istnieją głównie w formie preprintów; por. http://osdir.com/ml/science.mathematics.fom/2006-07/msg00039.html.

[18] Por. A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson *Undecidable Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1953, część I *A general method in proofs of undecidability*.

[19] Struktury takie Friedman nazywa *unary Tarski degrees*; por. H. Friedman *Interpretations according to Tarski*. (*Interpretations of set theory in discrete mathematics and informal thinking. Lecture 1*), zamieszczone na stronie internetowej H. M. Friedmana.

[20] Od strony formalnej, poszukujemy nowej teorii, która jest interpretacją teorii wyjściowej. W sprawie interpretacji, por. np. R. Montague *Interpretability in terms of models*, Indagationes Mathematicae, 27(3), 1965, s. 467-476, R. Epstein, L. W. Szczerba *Relatedness and interpretability*, Philosophical Studies 36, 1979, s. 225-

Jeszcze węższą klasę matematycznych modeli intuicyjnych stanowią te, gdzie przedmiotami są obiekty, które posiadają definicje „wewnątrz" teorii, której model intuicyjny rozpatrujemy. Na przykład, jeśli w geometrii Tarskiego zastąpimy „punkt" przez „prostą". Okazuje się, że w tym ostatnim wypadku istnieją pewne ograniczenia.

Wyobraźmy sobie, że każdy punkt płaszczyzny spełniającej aksjomaty Tarskiego „zastąpiliśmy" przez prostą prostopadłą do tej płaszczyzny i przechodzącą przez dany punkt. Wszystkie aksjomaty Tarskiego, które w zamierzeniu dotyczyły punktów, będą prawdziwe w nowym (trójwymiarowym) modelu intuicyjnym, jeśli relacje „leżenia pomiędzy" i kongruencji (tj. pierwotne relacje u Tarskiego) dla nowych *przedmiotów* (prostych) zdefiniujemy następująco: prosta *a* leży pomiędzy prostymi *b* i *c* wtw gdy odpowiadające tym prostym punkty (przed zamianą) spełniają tę relację. Analogicznie postępujemy z kongruencją. Dla takich prostych są prawdziwe wszystkie aksjomaty planimetrii Tarskiego. Nasz model jednak nie jest „płaski" lecz trójwymiarowy, pomimo tego, że nowe przedmioty spełniają wszystkie aksjomaty planimetrii. Model będzie dwuwymiarowy tylko dla niektórych przedmiotów, na przykład dla pęków prostych na płaszczyźnie. Czy jednak istnieje model, który zastępuje dokładnie jeden punkt dokładnie jedną prostą i jest płaski?

Można udowodnić istnienie takiego modelu korzystając z aksjomatu wyboru (np. wybierając po jednej prostej z każdego pęku prostych). Okazuje się jednak, że jeśli przedmiot(y), który podstawiamy za „obiekty zamierzone" modelu pierwotnego jest obiektem definiowalnym w teorii pierwotnej, to odpowiednie relacje nie mogą być zdefiniowane w teorii pierwotnej i na odwrót (wynika to z drugiego twierdzenia Gödla). Modele takie są „nieregularne", w tym sensie, że relacje „leżenia pomiędzy" i kongruencji są „niewyrażalne" w języku pierwotnej teorii. (W naszym przykładzie metoda wyboru prostej z pęku nie może być „uporządkowana", tzn. odbywać się według jakiejś zasady lub cechy wyróżniającej proste na płaszczyźnie, o której „da się opowiedzieć" w języku pierwotnej teorii, opisującej płaszczyznę.) Istnieje szereg dalszych prawidłowości, jakim podlega zmiana przedmiotów w modelu i przejście do innego modelu intuicyjnego.

Czytelnik z łatwością zauważy, że „rachunki pojęć" (*concept calculus*) Friedmana są związane z analizą modeli intuicyjnych i, często, są ich szczególnym przypadkiem. Podstawową cechą modeli intuicyjnych jest możliwość ich budowy i posługiwania się nimi bez uprzedniej formalizacji. Model intuicyjny dostarcza „intuicyjnej interpretacji" danej teorii. Dla danego typu przedmiotów istnieje wiele różnych modeli intuicyjnych; por. przykład z „prostą". Modele tego rodzaju są jedną z *platońskich* metod badania matematycznego.[21] Są one także istotne w matematyce głównie dlatego, że matematycy

231, V. Pambuccian *Groups and plane geometry*, Studia Logica 81, 2005, s. 387–398, J. van Benthem, D. Pearce *A mathematical characterization of interpretation between theories*, Studia Logica 43(3), 1984, s. 295-303, W. M. Farmer Theory interpretation in simple type theory, Lecture Notes In Computer Science 816, 1993, s. 96-123, J. Waszkiewicz *The notion of isomorphism and identity for many-valued relational* structures, Studia Logica 27, 1971, s. 93-98, etc. Pojęcie interpretacji pierwszy ściśle zdefiniował A. Tarski, chociaż, z historycznego punktu widzenia, było używane od dawna; por. A. Tarski *Undecidable theories*, in collaboration with A. Mostowski and R. M. Robinson. Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1953, s. 20-23. W sprawie zastępowania jednych obiektów matematycznych innymi, por. Z. Semadeni *Zjawisko zastępowania jednych obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Didactica Mathematicae 30, 2007, s. 1-39.

[21] Są one „platońskie" w sensie platonizmu jako metody badania w matematyce; por. Z. Król *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wyd. IFiS PAN, Warszawa 2006. Należy także podkreślić dydaktyczną przydatność modeli intuicyjnych; por. Z. Semadeni *Zjawisko zastępowania jednych obiektów matematycznych …*, *op. cit.*

pracują zawsze w jakimś modelu intuicyjnym. Z twierdzeń limitacyjnych wynika, że matematyka jest formalizowalna tylko *lokalnie*: dla każdej matematycznej struktury istnieje jej „zewnętrze", czyli inna formalna struktura z odpowiadającą jej formalną teorią.[22] Modele intuicyjne pozwalają badać związki pomiędzy takimi różnymi teoriami w nieco inny, niż w teorii kategorii sposób. Przykładami modeli intuicyjnych są „język" teorii (przedmiotami są tutaj symbole posiadające różny kształt, niezdefiniowany w danej teorii), arytmetyzacja składni, interpretacja logiki klasycznej i intuicjonistycznej w topologii, modele w toposach, itd. Geometrie nieeuklidesowe powstały *najpierw* jako pewne modele intuicyjne. (Na przykład, można zamienić „przestrzeń euklidesową" i „prostą euklidesową" przez „sferę" i „koło wielkie sfery" (geometria eliptyczna).)

Analiza modeli intuicyjnych pozwala wykryć szereg *ukrytych założeń*, przyjmowanych bezwiednie w różnych formalnych teoriach. Wobec możliwości istnienia *częściowych* podstawień przedmiotów za „wyjściowe" obiekty danej teorii (tj. podstawień tylko za niektóre „punkty" lub podstawień różnych rodzajów przedmiotów za jednorodne „punkty") i tym samym *niejednorodnych modeli intuicyjnych*, widać, że takim założeniem jest przekonanie o *intensjonalnej jednorodności* dziedziny modelu. (Jest to nieco inna sytuacja niż rozpatrywana w *many-sorted logics.*)

Definicja prawdy Tarskiego jest kolejnym przykładem użycia modelu intuicyjnego: po odpowiednich „podstawieniach" dochodzimy do wniosku, że formułując tę teorię pracowaliśmy w pewnym modelu intuicyjnym: „język", „spełnianie", „prawda", „metajęzyk" itd., to pewne *przedmioty*, a *rzeczywiste* ich własności matematyczne dotyczą homomorfizmów pomiędzy „punktami" w sensie algebry abstrakcyjnej.[23] Dopiero algebraizacja teorii prawdy w języku „punktowej" algebry abstrakcyjnej, ujawnia „przedmiotowy charakter" pojęć używanych w teorii prawdy typu Tarskiego (nazywam to *otoczką intensjonalną*).

Matematyka potrzebuje nowej teorii prawdy intensjonalnej.[24]

Modele intuicyjne mają wielkie znaczenie w teorii zbiorów. Można podać szereg typów takich modeli dla teorii mnogości.[25] Dodatkowo, można przy ich pomocy analizować *ściśle* wyobrażenia i intuicje, jakie – często jedynie *implicite* – towarzyszą pracy matematyków. Przykładem tego może być powiązanie *intuicji zbioru* w ZFC i innych *ekstensjonalnych* teoriach zbioru z intuicyjnym modelem geometrycznym, w którym elementy zbioru są punktami w pewnym obszarze geometrycznym. Identyczność elementów definiujemy jako „bycie w tym samym miejscu" a ich różność jako „bycie w innych miejscach". Można podać

[22] Stosunkowo nowym jest - udowodnione przez J. Króla - ograniczenie w teoretycznej możliwości konstrukcji nieskończonego ciągu formalizacji: *klasyczny* język – *klasyczny* metajęzyk – *klasyczny* meta-metajęzyk itd., dla pewnych klasycznych obiektów matematycznych (np. gładkich rozmaitości różniczkowalnych): jeśli cały „kompleks" ma być niesprzeczny i całkowicie sformalizowany, musimy na pewnym poziomie przyjąć, że „meta-środowisko" jest intuicjonistyczne.

[23] Por. H. Rasiowa, R. Sikorski *The mathematics of metamathematics*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.

[24] Teoria prawdy Tarskiego opiera się na takiej intensjonalnej teorii, gdyż *prawdziwość* relacji *w modelu*, którym odpowiadają zdania atomowe, nie jest w niej *definiowana*. Dlatego, teoria Tarskiego jest trywialna w sensie, jaki nadaje temu wyrażeniu prof. A. Grzegorczyk: Tarski definiuje tylko jak *przyjętą* i *rozpoznaną* prawdziwość zdań atomowych przenieść na zdania złożone w języku rachunku predykatów. Podobnie „trywialne" są inne waluacje, na przykład w toposach, czy semantyki Kripkego.

[25] Do podobnych wniosków doszedł R. McNaughton; por. R. McNaughton *Axiomatic systems, conceptual schemes, and the consistency of mathematical theories*, Philosophy of Science 21, 1954, s. 44-53 oraz tenże: *Conceptual schemes in set theory*, Philosophical Review 66, 1957, s. 66-80.

odpowiadający temu *concept calculus* opisujący te relacje. Zwykłe nasze wyobrażenia matematyczne, z jakich korzystamy przy czytaniu „tekstu" z teorii zbiorów czy teorii kategorii, dotyczą „kropek" w pewnej „lokalnej rozpostartości przestrzennej" (por. także diagramy Venna).[26] Są to przedmioty, gdyż żadne własności takiego wyobrażenia (np. przestrzenne) nie są określone formalnie, a własności formalne są interpretowane w takim modelu intuicyjnym.
Istnieje wiele sytuacji, gdzie ze zdumieniem stwierdzamy istnienie głębokich związków pomiędzy (pozornie) całkowicie niezależnymi teoriami; por. hipotezę Maldaceny, zasadę holograficzną w mechanice kwantowej i tzw. *Ads/CFT correspondence*.[27]

Możemy teraz spróbować odpowiedzieć na postawione wyżej pytania. Istnieją co najmniej dwie, fundamentalne cechy wspólne dla różnych formalnych koncepcji zbioru. Po pierwsze, wszystkie koncepcje zbioru – zarówno teoriomnogościowe jak i kategorialne – dotyczą „punktów" a nie obdarzonych realnymi własnościami przedmiotów. Przyjmuje się, że każda struktura złożona z przedmiotów da się przedstawić w modelu „punktowym". Drugą własność można najlepiej scharakteryzować jako *ekstensjonalność w sensie kryterium nierozróżnialności Leibniza*.

Muszę w tym miejscu dodać kilka dalszych wyjaśnień. Teorie te są „punktowe" (dotyczy to także bezpunktowych topologii *locales* i innych tego typu), gdyż posiadanie danej własności przez element struktury, w której interpretujemy daną formalną teorię, modelowane jest w sposób konwencjonalny. Przy waluacjach w zbiorach „punkt" (element modelu) ma daną własność jeśli należy do dziedziny danej relacji. „Sam z siebie" nie jest jednak nośnikiem żadnych „rzeczywistych" własności. Jedyne rzeczywiste jego własności – też relacyjne(!) – to „bycie identycznym z …" i „bycie różnym od …" innego punktu (najczęściej interpretowane w „kropkowym" modelu intuicyjnym: każdy zbiór jest zbudowany z punktów lub z obiektów, które zawierają punkty).

Czy każdy model intuicyjny podlega formalizacji w języku „punktów"? (Nie. Antynomię Russella można zinterpretować jako dowód tego faktu.)[28]

W wyniku analiz modeli intuicyjnych można podać pewne uogólnienie pojęcia zbioru, które nie prowadzi do antynomii Russella i wyjaśnia także, co rozumiem przez wspomnianą „ekstensjonalność w sensie Leibniza". Muszę jednak najpierw dodać kilka kolejnych wyjaśnień.

Dla realizacji naszego celu należy zwrócić uwagę na fakt *podwójnej* ekstensjonalności teorii matematycznych: logicznej i specyficznej (lub pozalogicznej).

---

[26] Przykładami prac, których wyniki formalne można wykorzystać do rekonstrukcji odpowiednich modeli intuicyjnych, prace A. Tarskiego *Sentential Calculus and Topology* i *Foundations of the Geometry of Solids*, (w: *Logic, Semantics, Metamathematics, Papers from 1923 to 1938* by Alfred Tarski, J. H. Woodger, J. Corcoran eds., Oxford University Press, 1983, s. 421-454 i 24-29); por. także R. Epstein i L. W. Szczerba *Relatedness and interpretability*, Philosophical Studies 36, 1979, s. 225-231.

27 "We show unexpected connection of Set Theoretical Forcing with Quantum Mechanical lattice of projections over some separable Hilbert space"; por. J. Król *Set Theoretical Forcing in Quantum Mechanics and AdS/CFT Correspondence* (http://www.springerlink.com/content/hp0u23u4p3280476/) oraz J. Król *Model Theory and the Ads/CFT Correspondance* (http://arxiv.org/abs/hep-th/0506003): "Renormalization in gravity-field theory limit of AdS/CFT correspondence is reformulated in terms of exotic R^4's." (!).

[28] Por. Z. Król *Non-formal analysis of the concept of set: hidden assumptions of set theory* (w druku).

Ekstensjonalność logiczna oznacza inwariantność twierdzeń danej teorii względem podstawień za zmienne w WFF formułach (*well-formed formulae*) wyrażeń równoważnych logicznie. Równoważność taka jest określona przez aksjomaty logiczne teorii i zależy od użytego systemu logiki, a inwariantność formuł w stosunku do podstawień wyrażeń równoważnych można (najczęściej) udowodnić metasystemowo (samo twierdzenie jest wówczas tezą danej teorii). „Inwariantność" oznacza równoważność logiczną *w danym systemie* wyjściowego wyrażenia z wyrażeniem otrzymanym w wyniku podstawienia za pewne zmienne wolne wyrażeń równoważnych logicznie. Ekstensjonalność logiczna jest ściśle związana z identycznością pewnych obiektów w danej teorii. Identyczność jako relacja równoważności dookreśla kiedy mamy do czynienia z formułami równoważnymi logicznie. „Identyczność" przyjęło się traktować jako część aparatu logicznego teorii, wydaje się jednak, że ma ona wiele wspólnego z następnym rodzajem ekstensjonalności.

Drugi rodzaj ekstensjonalności dotyczy *ekstensjonalności specyficznej*, a polega na sformułowaniu, które obiekty specyficzne (pozalogiczne) uznajemy za identyczne (równoważne specyficznie). Takie identyczne obiekty możemy podstawiać wzajemnie (w określonych przez reguły podstawiania warunkach) w WFF, a otrzymane w wyniku podstawienia formuły uznajemy (na mocy pewnego aksjomatu) za równoważnie logicznie. Zadanie ekstensjonalności specyficznej, jako nie wynikającej z aksjomatów logicznych teorii, odbywa się najczęściej poprzez podanie oddzielnego aksjomatu ekstensjonalości, takiego jak na przykład Aksjomat 1. Sformalizowana teoria matematyczna nie musi jednak posiadać aksjomatów ekstensjonalności specyficznej (por. arytmetykę Peano PA, gdzie dwa napisy uznajemy za „równe" (identyczne), gdy oznaczają tę samą liczbę), gdyż często są one zbędne, zwłaszcza jeśli występują tam aksjomaty identyczności. Oczywiście obecność aksjomatów identyczności nie przeszkadza wprowadzeniu do teorii ekstensjonalności specyficznej, jak to widać, na przykład, w ZFC.

W pewnych typach teorii, np. w *non-well-founded sets*[29], aksjomaty specyficzne narzucają bardzo mocne warunki ekstensjonalności specyficznej. Tak jest z *AFA* (*Anti-Foundation Axiom*), który stwierdza, że każdy *graf* ma tylko jedną dekorację (*decoration*). Oprócz specyficznej treści, która postuluje istnienie, poza „normalnymi" zbiorami, także zbiorów typu „$x \in x$", czy nieskończonych serii „… $x \in y \in z \in u$" (i oczywiście wielu innych), doprowadza do identyfikacji szeregu struktur. Z *AFA* wynika, na przykład, że istnieje tylko jeden zbiór typu „$x \in x$" oraz, że uniwersum V jest silnie ekstensjonalne.[30]

W klasycznych teoriach zbiorów aksjomaty ekstensjonalności specyficznej można formułować w różny sposób i możliwości te są związane ze sposobem wprowadzenia relacji identyczności w danej teorii (por. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Lévy *Foundations of set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol. 67, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London 1973, dalej: [FBH-L 1973], s. 22-30). Oczywiście, w teoriach zbiorów z klasami (np. NBG - system von Neumanna-Bernaysa-Gödla[31]), należy modyfikować (w elementarny sposób) aksjomaty ekstensjonalności specyficznej dla zbiorów (czyli nasz Aksjomat 1), aby stwierdzały identyczność pewnych klas. Podobnie jest w ZFA (teorii zbiorów Zermelo-Fraenkela z atomami).

---

[29] Por. P. Aczel *Non-well-founded sets*, Lecture Notes Number 14, CSLI (Center for the Study of Language and Information), Leland Stanford Junior University U.S.A 1988.
[30] Por. Aczel, *op. cit.*, rozdział II, s. 19-31.
[31] Por. T. Jech *Set Theory*, Academic Press, N. York, London 1978, s. 76-77.

Matematyka współczesna jest prawie całkowicie ekstensjonalna. Każda klasyczna teoria matematyczna jest ekstensjonalna zarówno logicznie jak i specyficznie. Tylko niektóre teorie matematyczne starają się uwzględniać – w bardzo ograniczonym zakresie – intensjonalność, a odbywa się to najczęściej przy tendencji do zachowania ekstensjonalności logicznej. Ewentualne zmiany i ograniczenia dotyczą przeważnie ekstensjonalności specyficznej.[32]

Każdy z klasycznych systemów teorii zbiorów opisanych w [FBH-L 1973] jest ekstensjonalny logicznie i specyficznie.

Ekstensjonalna logicznie i specyficznie są teoria kategorii i kategorialne teorie mnogości. W teorii kategorii zbadano związki ekstensjonalności specyficznej z wewnętrzną logiką teorii. Wyjaśniono tam m.in., że każdy *well-pointed* (kategorialna wersja aksjomatu ekstensjonalności[33]) topos jest biwalentny, a jeśli jest *well-pointed*, to jest klasyczny, itd. Wyjaśniono także związki ekstensjonalności z aksjomatem wyboru (AC). Na przykład, wiemy, że jeśli topos jest boolowski (tj. klasyczny) i prawdziwa jest w nim kategorialna wersja aksjomatu wyboru, to jest słabo ekstensjonalny oraz, że topos jest *well-pointed* wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasyczny, biwalentny i spełnia kategorialną wersję AC. Logika toposów, które w naturalny sposób są modelami dla logik wyższych rzędów, jest ściśle ekstensjonalna; por. *Logic of topos*, M. P. Fourman s. 1053-1090 w: J. Barwise ed., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

Historia zagadnienia konstrukcji języków sformalizowanych jest istotna dla ukonstytuowania się pewnych cech używanych obecnie języków sformalizowanych i teorii zbiorów. Pierwsza systematyczna praca (obok prac Boole'a[34]) – chyba najważniejsza praca w dziejach logiki – poświęcona temu zagadnieniu [Frege 1879][35], opisuje budowę języka sformalizowanego wychodząc od analizy istniejących w języku potocznym - a więc zastanych - wyrażeń złożonych.[36] Bardziej formalnie przejawia się to w jednej z najważniejszych zasad filozofii Fregego: „sens wypowiedzi określa sens poszczególnych i mniejszych jej składników". Współcześnie budowę języka przeprowadza się „od dołu", tj. wychodząc od pewnych elementarnych wyrażeń, pokazuje się jak z nich tworzyć wyrażenia złożone. Podejście Fregego jest doskonałym przykładem podejścia hermeneutycznego w matematyce, które polega na analizie pewnej *zastanej* sytuacji matematycznej. Każde naprawdę nowe i wielkie odkrycie w dziejach matematyki pojawia się właśnie na tej drodze. Po takim odkryciu można już *zapomnieć* o rzeczywistej drodze, na jakiej zostało ono uzyskane i dla potrzeb

[32] Z prób podania intensjonalnych teorii zbiorów wymienić należy: R. Hinnion *Intensional Positive Set Theory*, Reports on Mathematical Logic 40, 2006, s. 107-125, P. C. Gilmore *An intensional type theory: motivation and cut-elimination*, Journal of Symbolic Logic, 66, 2001, s. 283-400 oraz program matematyki intensjonalnej (por. S. Shapiro ed., *Intensional Mathematics*, North Holland Publishing Company, New York 1984). Por. także P. T. Johnstone, 1983, *The point of pointless topology*, Bulletin of the American Mathematical Society 1983, 8(1), s. 41-53.

[33] Istnieją różne i nierównoważne sformułowania.

[34] Por. G. Boole *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, http://www.gutenberg.org/etext/15114.

[35] 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S., Louis Nebert. (Tłumaczenie angielskie: *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in Jean Van Heijenoort, ed., 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press; dalej: [Heijenoort 1967]).

[36] Frege był wyraźnie świadomy tej różnicy: "I do not start from concepts in order to built up thoughts or propositions out of them; rather, I obtain the components of a thoughts by decomposition of the thought" (wypowiedź Fregego z 26 lipca 1919 roku; cytuję za [Heijenoort 1967] s. 1). Przeciwnie postępuje Tarski budując teorię prawdy w naukach dedukcyjnych.

podręcznikowej jasności wystarczy podać wypreparowaną konstrukcję „logiczną", pomijając zbędne (intensjonalne) uzasadnienia.

Frege konsekwentnie abstrahuje od *sposobu* formułowania sensu wypowiedzi i pokazuje, że w logice (i matematyce) istotna jest jedynie prawdziwość lub fałszywość zdań. Formułując logikę jako logikę prawdziwościową, mógł stwierdzić, że z punktu widzenia logiki istnieją tylko dwa przedmioty: Prawda i Fałsz. Oznacza to, że logika zajmuje się tylko tymi wypowiedziami, o których możemy jednoznacznie stwierdzić, że są albo prawdziwe, albo fałszywe.
To przekonanie, którego źródeł można doszukiwać się u B. Bolzano[37], miało kolosalny wpływ na całą pofregowską matematykę i logikę. Zdecydowało ono bowiem o *ekstensjonalnym* charakterze matematyki współczesnej. Logika zdań w ujęciu Fregego abstrahuje od (intensjonalnego) sensu wypowiedzi. Formalnie możemy dla niej zbudować zero-jedynkowe modele, lub dwuwartościowe tablice prawdziwościowe. Sprawa ta – niejako mimowolnie – przesądziła o ekstensjonalności także logiki predykatów. Wyrażenia równoważne logiczne traktuje się jako „mające to samo znaczenie" i dlatego zastąpienie (podstawienie) jednego z nich innym równoważnym, nie może wpływać na prawdziwość całego wyrażenia. We współczesnych wersjach logiki predykatów można bez trudu udowodnić twierdzenie o ekstensjonalności wyrażeń logicznych.

Ekstensjonalność była także jednym z filarów nośnych programu logicyzmu. Z kolei, fiasko logicyzmu udowodniło, że dla potrzeb rekonstrukcji matematyki nie wystarczą tylko logiczne podstawy i trzeba dołączyć do czystej logiki także pewne wypowiedzi mające jakieś (pozalogiczne) „znaczenie" (np. wyrażenia zawierające relację należenia do zbioru). Powstały nasze teorie pierwszego (i innych) rzędu, gdzie obok aksjomatów logicznych mamy aksjomaty specyficzne (prekursorami byli Hilbert i Gödel). Obecnie takie teorie traktuje się jako „dogodne narzędzia", zapominając o ogromnych wysiłkach, które pokazały, że jest to pewna konieczność matematyczna, wynikająca z niemożliwości wyeliminowania wypowiedzi specyficznych, niosących pewną treść pozalogiczną.

Łatwo dostrzec, że aksjomat komprehensji (Aksjomat 2) jest sprzeczny na mocy ekstensjonalności logicznej: w dowodzie sprzeczności tego aksjomatu nie korzystamy z ekstensjonalności specyficznej (Aksjomat 1).

Wiadomo także, że częściowe ograniczanie ekstensjonalności specyficznej nie pozwala na uniknięcie antynomii Russella.[38]

Analiza ukrytych, intuicyjnych założeń i intuicyjnych modeli dla teorii zbiorów pozwala na podanie pewnego nowego modelu intuicyjnego. Kodyfikacja formalna takich intuicji doprowadza to teorii, w której możemy posługiwać w sposób nieograniczony aksjomatem komprehensji.[39]

Możemy wyobrazić sobie zbiór jako obiekt (przedmiot) złożony z dwóch „warstw": elementów i otoczki. W ekstensjonalnych teoriach zbioru zakłada się, że z danych elementów

[37] Por. B. Bolzano „Bernard Bolzano's Grundlegung der Logik. Ausgewählte Paragraphen aus der *Wissenschsftslehre*, *Band I und Band II* mit ergänzenden Textzusammenfassungen einer Einleitung und Registern herausgegeben von Friedrich Kambartel.", Philosophische Bibliothek Band 259, Felix Meiner, Hamburg 1963.
[38] Por. R. Hinnion *Intensional Positive Set Theory*, Reports on Mathematical Logic 40, 2006, s. 107-125.
[39] Por. Z. Król *Non-formal analysis of the concept of set: hidden assumptions of set theory* (w druku).

możemy utworzyć tylko *jeden* zbiór. Istnieje więc wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem i jego elementami. Sposób „wiązania" elementów w zbiór lub „powód", dla którego elementy „trafiają" do danego zbioru, są całkowicie nieistotne. Zwykle jednak myślimy o pewnych przedmiotach, obdarzonych rzeczywistymi cechami. I chociaż zbiory „ludzi" oraz „osób na Ziemi" (lub zbiór rozwiązań równania z wielkiego twierdzenia Fermata i pewnej grupy – powiedzmy dwumianów) są identyczne z ekstensjonalnego punktu widzenia, to tworzymy je z intensjonalnie innych powodów. Ich ekstensjonalne własności, takie jak równoliczność, są wtórne. W „nowej intuicji zbioru" zbiory są identyczne, gdy mają identyczne nie tylko elementy, ale i „otoczki". Oczywiście, rolę „otoczki" mogą spełniać własności i pojęcia. W języku pierwszego rzędu oznacza to konieczność indeksowania takich zbiorów poprzez wyraźne wskazanie formuły, która wiąże elementy w zbiór. Nie trzeba też z góry zakładać (choć można i nie prowadzi to do sprzeczności), że formułom logicznie równoważnym odpowiadają identyczne „otoczki".[40]

III. Zakończenie.

Rozważania nad rozwojem pojęcia zbioru chciałbym zakończyć bardzo ogólną refleksją dotyczącą rozwoju matematyki jako całości.

Współczesna wiedza matematyczna, zupełnie podobnie jak matematyka dawniejsza, nie może obejść się bez niesformalizowanych, intuicyjnych procedur i sposobów postępowania. Istniejące ramy pojęciowe takie, jak na przykład system teorii zbiorów Zermelo-Fraenkela czy użycie języków sformalizowanych, okazują się bardziej historycznie niż rzeczowo umotywowane.[41]

Staje się to wyraźne po podaniu miejsc „rozdwojenia" we współczesnych sformalizowanych teoriach. „Rozdwojenia" są obecne w matematyce prawie od jej początku i nie dotyczą tylko wiedzy sformalizowanej.[42] Przykładem rozdwojenia może być *intuicyjne* przekonanie o bezwarunkowej obowiązywalności piątego postulatu Euklidesa „o prostych równoległych" lub przekonanie, że są tylko dwie wartości logiczne.[43] Rozdwojeniem jest także obecne w przekonaniu, że jest możliwa tylko jedna uniwersalna relacja należenia do zbioru.[44] W

---

[40] W teoriach zbioru zwykle wprowadzamy różne obiekty, które nie są zbiorami (takie jak indywidua lub zbiór pusty). Robimy to na zasadzie konwencji lub uznając, że „zbiór" można zdefiniować podając odpowiednie operacje tworzenia zbiorów. Na przykład, w ZFC na mocy aksjomatów wyróżniania i nieskończoności (stwierdzającego istnienie przynajmniej jednego zbioru), istnieje zbiór pusty, który w intuicyjnym sensie nie jest zbiorem. Dodatkowo, w ZFA odróżniamy zbiór pusty od innych indywiduów. Zakładamy, że wynik każdej takiej operacji jest „zbiorem". Bardziej podstawowe od pojęcia zbioru jest pojęcie *obiektu* (nie należy tego rozumieć w sensie teorii kategorii), które pozwala zachować te odróżnienia. [W „nowej intuicji zbioru" można rozważyć obiekty złożone z samych „otoczek".] Na podstawie analizy odpowiednich modeli intuicyjnych można pokazać, że „nie wszystko jest zbiorem" w matematyce, a nawet w samej teorii zbiorów. Istnieje możliwość sformułowania *czystej teorii zbiorów* bez jakichkolwiek innych obiektów.

[41] Por. P. Maddy *Believing the axioms. I*, Journal of Symbolic Logic 53, 1988, s. 481-511.

[42] Por. Z. Król *The Emergence of New Concepts in Science*. W: A. P. Wierzbicki, Y. Nakamori, eds., *Creative Environments: Issues for Creativity Support for the Knowledge Civilization Age*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007 , s. 415-442.

[43] Rozdwojenie jest więc zdeterminowane historycznie: dzisiaj nikogo nie dziwią *boolean valued models* (uważane są za klasyczne) i *local set theories*; por. np. J. L. Bell *Toposes and Local Set Theories*, Clarendon Press, Oxford 1988. Por. też C. C. Chang *The axiom of comprehension in infinite valued logic*, Mathematica Scandinavica, 13, 1963, s. 9-30.

[44] Pokazują to np. *double extension set theory*; por. Z. Król *Non-formal analysis of the concept of set: hidden assumptions of set theory* (w druku), R. Hinnion "About the coexistence of *classical sets* with *non-classical* ones: a survey", Logic and Logical Philosophy, 11, 2003, s. 79-90, M. Randall Holmes *'The structure of ordinals and the interpretation of ZF in double extension set theory*, Studia Logica (http://math.boisestate.edu/~holmes/ ,

„rozdwojeniu” intuicyjnie i *aktualnie* prezentowana jest tylko jedna *apodyktycznie oczywista* możliwość. Inne możliwości są *bierne* (*nieaktywne*). Ich „bierność” polega na tym, że nie wywierają rzeczywistego wpływu na nasze rozumowania i są tylko czysto teoretycznymi możliwościami. Innymi przykładami rozdwojeń są: hipoteza kontinuum (CH), przekonanie, że każdy zbiór można dobrze uporządkować, ekstensjonalność logiczna i specyficzna lub wcześniejszy aksjomat stwierdzający, że „część jest mniejsza od całości”. Formalnym wyrazem rozdwojeń jest niezależność pewnych „prawd matematycznych” od dobrze ugruntowanego, już sformalizowanego „kontekstu”, tj. teorii sformalizowanej. Jeśli matematyk lub społeczność matematyków podąża tylko jedną ścieżką rozdwojenia, oznacza to, że wybór taki nie jest określony przez formalną strukturę teorii i *explicite* podane reguły postępowania. Takie ukryte założenia i „rozdwojenia” istnieją także w sformalizowanych teoriach zbiorów i są częścią tzw. horyzontu hermeneutycznego matematyki.

Powstanie współczesnych systemów podstaw matematyki wynikało z trudności przed jakimi znalazła się matematyka. Kulminacja trudności przejawia się w postaci tzw. kryzysu. W systemach tych chodziło o podanie niepodważalnej i wolnej od sprzeczności bazy wyjściowej (fundamentu) aktualnie znanej wiedzy matematycznej. Tymczasem, równie wielki problem, jaki do tej pory nie znalazł jeszcze w pełni opisu i wyjaśnienia, to zagadnienie praktyki badawczej w matematyce i związana z tym analiza *preformalnej wiedzy matematycznej*, będącej nie tylko punktem wyjścia dla tworzenia wiedzy matematycznej (także z historycznego punktu widzenia), lecz cały czas dookreślającej nawet (pozornie) najbardziej sformalizowane „rachunki”. Do tej pory nikomu nie udało się całkowicie *aktualnie* sformalizować choćby tylko jeden, mały fragment matematyki.[45]

Teoria zbiorów, teoria kategorii, intuicjonizm, matematyka intensjonalna itp., próbują analizować rzeczywistą praktykę matematyczną. Na przykład, w matematyce intensjonalnej[46] opisuje się różnicę pomiędzy stadium sformalizowanym a preformalnym w terminach pewnych (ograniczenie intensjonalnych) predykatów epistemicznych: nieformalne stadium wyjściowe posługuje się „logiką epistemiczną”.

Przynajmniej niektóre z tzw. kryzysów w matematyce były spowodowane przez określone postawy - czasem nie w pełni uświadomione - względem tego, co uznaje się za podstawę matematyki. Inaczej mówiąc, błędne przekonania w kwestii „czym jest matematyka” doprowadzają często do sytuacji kryzysowej w matematyce.

Pierwsza z takich sytuacji kryzysowych, wywołana przez odkrycie wielkości niewspółmiernych w starożytnej Grecji, powstała w wyniku konfliktu pomiędzy *explicite* sformułowanym przez pitagorejczyków przekonaniem, że „wszystko jest liczbą” a zastaną sytuacją matematyczną.[47] Dowód niewspółmierności pewnych wielkości geometrycznych, np. boku kwadratu z jego przekątną, nie był – jak obecnie często się interpretuje na podstawie

---

w druku), A. Kisielewicz *Double extension set theory*, Reports on Mathematical Logic, 23, 1989, s. 81-89, A. Kisielewicz *A very strong set theory?*, Studia Logica 61, 1998, s. 171-178, etc.

[45] Powodów jest wiele, ale jeden można krótko przedstawić: żeby ściśle sformalizować jakiś język, należy mieć ściśle sformalizowany metajęzyk. Jednakże, do formalizacji metajęzyka potrzebna jest formalizacja meta-metajęzyka, itd. O ile wiem, nikt tego jeszcze nie dokonał *aktualnie*. Na pewnym poziomie *musimy* posłużyć się pewnymi *przedmiotami* w sensie modeli intuicyjnych. Zwykle dzieje się tak już na poziomie języka danej teorii, gdyż operujemy nieformalnym metajęzykiem.

[46] Por. S. Shapiro, *op. cit.*

[47] Por. Król Z. *Apologia matematyki* pitagorejskiej, Przegląd Filozoficzny, 2, 2007, s. 1-12. Analogiczna sytuacja była z tezą logicyzmu, że „wszystko jest logiką”.

rekonstrukcji opartej na tekście Arystotelesa[48] - dowodem *nie wprost*, pokazującym tylko niewspółmierność pewnych wielkości geometrycznych, lecz był dowodem ukazującym istnienie przynajmniej dwóch *różnych* rodzajów wielkości w matematyce. „Nie wszystko jest liczbą (naturalną)."

Matematyka nieustannie tworzona jest w *horyzoncie hermeneutycznym* nieaktowych, niesformalizowanych przekonań, ukrytych „cichych założeń" (*tacit knowledge*), a zawartość tego horyzontu jest zmienna i inna w różnych epokach historycznego rozwoju matematyki. Zawartość horyzontu i jego *obecność* ujawnia się w wyniku metodycznej rekonstrukcji.

[48] Por. *Analityki pierwsze* 41a.